В. И. Копейко, Симплектические группы над кольцами лорановских многочленов и диаграммы склейки, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1999, том 5, выпуск 3, 943–945

Симплектические группы над кольцами лорановских многочленов и диаграммы склейки

В. И. КОПЕЙКО
Калмыцкий государственный университет

УДК 512.666

Ключевые слова: симплектическая группа, элементарные симплектические матрицы, диаграммы склейки.

Аннотация

В работе показано, что если A — область главных идеалов, для которой $\mathrm{K}_1\,\mathrm{Sp}(A) = 0$, то при $r \geqslant 2$ группа $\mathrm{Sp}_{2r}(A[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}, Y_1, \dots, Y_m])$ порождается элементарными симплектическими матрицами.

Abstract

V. I. Kopeiko, Symplectic groups over Laurent polynomial rings and patching diagrams, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 5 (1999), № 3, p. 943–945.

In this note we prove the following result. Let A be a P.I.D. such that $\mathrm{K}_1\,\mathrm{Sp}(A) = 0$. Then the groups $\mathrm{Sp}_{2r}(A[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}, Y_1, \dots, Y_m])$ are generated by elementary symplectic matrices for all integers $r \geqslant 2$.

В работе мы придерживаемся определений и обозначений из [1, 2]. В частности, все рассматриваемые кольца предполагаются коммутативными и с единицей. Напомним [4], что область главных идеалов A называется специальной, если $\mathrm{SL}_r(A) = \mathrm{E}_r(A)$ при любом $r \geqslant 1$. Нетрудно показать (см., например, [1]), что в этом случае и $\mathrm{Sp}_{2r}(A) = \mathrm{Ep}_{2r}(A)$ при любом $r \geqslant 1$. Примерами специальных областей главных идеалов могут служить дискретно нормированные кольца, а также евклидовы кольца.

Целью работы является доказательство следующего результата.

Теорема. *Пусть A — специальная область главных идеалов. Положим $B = A[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}, Y_1, \dots, Y_m]$ $(n, m \geqslant 0)$. Тогда при $r \geqslant 2$ группа $\mathrm{Sp}_{2r}(A[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}, Y_1, \dots, Y_m])$ порождается элементарными симплектическими матрицами. В частности,* $\mathrm{K}_1\,\mathrm{Sp}(B) = 0$.

Замечание. В случае $n = 1$, $m = 0$, а также при $n = 0$, m любое результат был получен ранее в [3]. Второй случай был рассмотрен независимо и другими методами автором в [1].

Фундаментальная и прикладная математика 1999, том 5, № 3, с. 943–945.

Для доказательства теоремы нам необходим ряд вспомогательных результатов. Сначала напомним одно определение. В этом определении A — произвольное кольцо, B — подкольцо A, $s \in B$ — неделитель 0 в A, такой что гомоморфизм $B/sB \longrightarrow A/sA$, индуцированный вложением, является изоморфизмом. Эти данные приводят к декартовому квадрату колец:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_s & \longrightarrow & A_s \end{array}$$

называемому лоскутной (patching) диаграммой или диаграммой склейки. Очевидно, если $B/sB \cong A/sA$, то $\hat{A} \cong \hat{B}$, где $\hat{A}$ обозначает (s)-адическое пополнение кольца A. Отметим, что в этом случае также $B_s \cap A = B$.

В следующих двух леммах предполагается, что тройка (B, A, s) дает лоскутную диаграмму и $r \geqslant 2$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Ep}_{2r}(A_s)$. Тогда α запишется в виде $\alpha = \gamma_s\beta$, где $\beta \in \mathrm{Ep}_{2r}(B_s)$, $\gamma \in \mathrm{Ep}_{2r}(A)$.*

Для общей линейной группы лемма была доказана Форстом в [6, лемма 2.3], а для симплектической группы доказательство аналогично.

Лемма 2. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Sp}_{2r}(B_s)$. Тогда если $\alpha \in \mathrm{Ep}_{2r}(A_s)$, то α запишется в виде $\alpha = \gamma_s\beta$, где $\beta \in \mathrm{Ep}_{2r}(B_s)$, $\gamma \in \mathrm{Sp}_{2r}(B)$.*

Следует из леммы 1 и условия $B_s \cap A = B$.

Очевидно, что для произвольного кольца A тройка $(A[X], A[[X]], X)$ даёт лоскутную диаграмму, и значит, в силу леммы 2 получаем следующие два следствия, в которых через $A((X))$ обозначена локализация кольца $A[[X]]$ по мультипликативной системе, порождённой элементом X.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Sp}_{2r}(A[X, X^{-1}])$, $r \geqslant 2$. Тогда если $\alpha \in \mathrm{Ep}_{2r}(A((X)))$, то $\alpha = \gamma_X\beta$, где $\gamma \in \mathrm{Sp}_{2r}(A[X])$, $\beta \in \mathrm{Ep}_{2r}(A[X, X^{-1}])$.*

Следствие 2. *Если $\mathrm{Sp}_{2r}(A((X))) = \mathrm{Ep}_{2r}(A((X)))$ при некотором $r \geqslant 2$, то группа $\mathrm{Sp}_{2r}(A[X, X^{-1}])$ порождается группами $\mathrm{Sp}_{2r}(A[X])$ и $\mathrm{Ep}_{2r}(A[X, X^{-1}])$.*

В следующей лемме A — произвольное коммутативное кольцо.

Лемма 3 ([4, гл. 4, лемма 5.1]). *Пусть s — неделитель 0 в A, такой что A/sA — область главных идеалов. Тогда если $\mathrm{SL}_r(A) = \mathrm{E}_r(A)$, $\mathrm{SL}_r(A/sA) = \mathrm{E}_r(A/sA)$ при некотором натуральном r, то и $\mathrm{SL}_r(A_s) = \mathrm{E}_r(A_s)$.*

Лемма 4. *Если A — специальная область главных идеалов, то и $A((X))$ — специальная область главных идеалов.*

Сначала покажем, что $\mathrm{SL}_r(A((X))) = \mathrm{E}_r(A((X)))$ при любом натуральном r. Действительно, по предположению $\mathrm{SL}_r(A) = \mathrm{E}_r(A)$. В частности, $\mathrm{SL}_r(A[[X]]/(X)) = \mathrm{E}_r(A[[X]]/(X))$ и, кроме того, $\mathrm{SL}_r(A[[X]]) = \mathrm{E}_r(A[[X]])$ в силу леммы 1 из [2]. Следовательно, в силу леммы 3 $\mathrm{SL}_r(A((X))) = \mathrm{SL}_r(A[[X]]_X) = \mathrm{E}_r(A[[X]]_X) = \mathrm{E}_r(A((X)))$.

Покажем теперь, что $A((X))$ — область главных идеалов. Так как $\dim A \leqslant 1$, то $A[[X]]$ — регулярное кольцо размерности $\leqslant 2$ [5], и значит, $\dim A((X)) = \dim A[[X]]_X \leqslant 1$. Если $\dim A((X)) = 0$, то $A((X))$ — поле, и в этом случае доказывать нечего; в противном случае $A((X))$ — дедекиндово кольцо. Кроме того, в этом случае $A[[X]]$ — факториальное кольцо [5, теорема 20.8], и значит, его локализация $A((X)) = A[[X]]_X$ — также факториальное кольцо. Следовательно, $A((X))$ — (специальная) область главных идеалов.

Следствие. *Если A — специальная область главных идеалов, то $\mathrm{Sp}_{2r}(A((X))) = \mathrm{Ep}_{2r}(A((X)))$ при любом натуральном r.*

Доказательство теоремы будем проводить индукцией по n. Если $n = 0$, то утверждение доказано в [3, теорема 1.2]. Предположим, что $n > 0$, и пусть $\alpha \in \mathrm{Sp}_{2r}(B)$. Тогда $\alpha \in \mathrm{Sp}_{2r}(A((X))[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}, Y_1, \dots, Y_m])$, где через X мы обозначили X_n. Кроме того, будем обозначать $[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}, Y_1, \dots, Y_m]$ через $[n-1, m]$. Тогда, как показано выше, $A((X))$ — специальная область главных идеалов, и значит, $\alpha \in \mathrm{Ep}_{2r}(A((X))[n-1, m]) = \mathrm{Ep}_{2r}(A[[X]]_X[n-1, m])$ согласно предположению индукции. Так как тройка $(A[X][n-1, m], A[[X]][n-1, m], X)$, очевидно, дает лоскутную диаграмму, то в силу следствия 1 из леммы 2 α запишется в виде $\alpha = \gamma_X \beta$, где $\gamma \in \mathrm{Sp}_{2r}(A[X][n-1, m])$, $\beta \in \mathrm{Ep}_{2r}(A[X]_X[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}, Y_1, \dots, Y_m]) = \mathrm{Ep}_{2r}(B)$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что

$$\mathrm{Sp}_{2r}(A[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}, X_n, Y_1, \dots, Y_m]) = \\ = \mathrm{Ep}_{2r}(A[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}, X_n, Y_1, \dots, Y_m])$$

согласно предположению индукции.

Литература

[1] Копейко В. И. О структуре симплектической группы колец многочленов над регулярными кольцами размерности $\leqslant 1$ // УМН. — 1992. — Т. 47, № 4. — С. 193–194.

[2] Копейко В. И. О структуре специальной линейной группы над кольцами лорановских многочленов // Фундам. и прикл. матем. — 1995. — Т. 1, № 4. — С. 1111–1114.

[3] Grunewald F., Mennicke J., Vaserstein L. On symplectic groups over polynomial rings // Math. Z. — 1991. — V. 206, No. 1. — P. 35–56.

[4] Lam T. Y. Serre's conjecture // Lect. Notes Math. — 1978. — V. 635.

[5] Matsumura H. Commutative ring theory // Cambrige studies in advanced math. — 1986. — V. 9.

[6] Vorst T. The general linear groups over regular rings // Commun. Alg. — 1981. — V. 9, No. 5. — P. 499–509.

Статья поступила в редакцию в мае 1996 г.