Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, О периодических группах Фробениуса,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 6, 1224–1228

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2023. Том 64, № 6

УДК 512.542

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ ФРОБЕНИУСА

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Находятся условия, при которых сильно изолированная нормальная подгруппа периодической группы G с дополнительными условиями конечности обладает дополнением в G.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.609

Ключевые слова: периодическая группа, группа Фробениуса.

Введение

Конечная группа G называется *группой Фробениуса*, если она обладает собственной нетривиальной подгруппой H, удовлетворяющей следующему условию: *для любого элемента $g \in G \setminus H$ пересечение H с H^g тривиально*.

Согласно знаменитой теореме Фробениуса, доказанной в начале прошлого века, группа Фробениуса G содержит собственную нетривиальную нормальную подгруппу F, для которой $F \setminus 1 = G \setminus \bigcup\limits_{g \in G} H^g$. Подгруппа F называется *ядром Фробениуса*, а H — *дополнением Фробениуса* группы G.

Строение конечных групп Фробениуса изучено достаточно подробно: если G — конечная группа Фробениуса с ядром F и дополнением H, то $G = FH$ и $F \cap H = 1$. Дополнение H индуцирует в F при сопряжении в G регулярную группу автоморфизмов, т. е. группу, каждый нетривиальный элемент которой не имеет в F нетривиальных неподвижных точек. Другими словами, H при сопряжении действует свободно на F.

По теореме Цассенхауза любая силовская p-подгруппа из H содержит ровно одну подгруппу порядка p, т. е. является либо циклической группой, либо (при $p = 2$) группой кватернионов; H либо разрешима, либо обладает единственным неабелевым композиционным фактором, и этот фактор изоморфен знакопеременной группе A_5 степени 5. Что касается ядра F, то оно нильпотентно и ступень нильпотентности F ограничена некоторой функцией от наименьшего простого числа, делящего порядок H (так называемой функцией Хигмана).

Теорема Фробениуса несправедлива в общем случае для бесконечных групп, и здесь *группой Фробениуса* называют полупрямое произведение $G = FH$ (F, как и для конечных групп, называется *фробениусовым ядром*, а H — *фробениусовым дополнением*), если $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$ и $F \setminus \{1\} = G \setminus \bigcup\limits_{g \in G} H^g$.

Здесь также справедливо следующее утверждение.

Если G — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H, то $N_G(H) = H$, $C_G(h) \leq H$ для любого нетривиального элемента $h \in H$, т. е. H действует при сопряжении в G свободно на F. Кроме того, $C_G(f) \leq F$ для любого $1 \neq f \in F$, иными словами, F является *сильно изолированной* нормальной подгруппой в G.

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект № 23-41-10003).

Бесконечные группы Фробениуса играют важную роль в теории групп с различными условиями конечности, в которой наиболее сильные результаты получены В. П. Шунковым и его учениками — представителями красноярской школы теории групп.

Одной из интересных задач в теории периодических групп с дополнительными условиями конечности является поиск естественных условий, при которых сильно изолированная нормальная подгруппа периодической группы G обладает дополнением в G. Этой задаче и посвящена настоящая работа.

Основным ее результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть G — периодическая группа, F — ее нетривиальная собственная нормальная абелева подгруппа, содержащая централизатор в G любого своего неединичного элемента. Тогда F дополняется в G, т. е. в G существует подгруппа H, для которой $G = FH$, и G является группой Фробениуса с фробениусовым ядром F и фробениусовым дополнением H.*

Эта теорема утвердительно отвечает на вопрос 20.96 из Коуровской тетради [1].

Условие теоремы 1 можно ослабить заменой условия коммутативности F условием локальной конечности F.

Теорема 2. *Пусть G — периодическая группа, F — ее локально конечная нормальная собственная нетривиальная подгруппа, содержащая централизатор любого своего неединичного элемента. Тогда G — группа Фробениуса с ядром F.*

От условия локальной конечности в теореме 2 нельзя отказаться, как показывает

Предложение 1. *Пусть $G = B(m, n)$ — свободная бернсайдова группа простой экспоненты $n \geqslant 665$ с $m \geqslant 2$ порождающими. Тогда в G существует нетривиальная нормальная сильно изолированная подгруппа F индекса n^m, не дополняемая в G.*

Доказательство. По известным результатам С. И. Адяна [2, гл. VII, теорема 1.8] G — не локально конечная группа, в которой любая нетривиальная конечная подгруппа является циклической группой порядка n. В силу свободы G в ней есть нормальная подгруппа F, факторгруппа G/F по которой изоморфна элементарной абелевой группе A порядка n^m. Если бы в G существовала подгруппа, дополняющая F до G, то она была бы изоморфна нециклической группе A, что невозможно. С другой стороны, централизатор любого элемента $1 \neq f \in F$ в G совпадает с $\langle f \rangle$, т. е. содержится в F. Таким образом, F сильно изолирована в G. Предложение 1 доказано.

Вопрос. *Пусть G — периодическая группа, F — ее сильно изолированная нормальная подгруппа и $\pi(F) \cap \pi(G/F) = \varnothing$. Обладает ли F дополнением в G?*

§ 1. Предварительные леммы

Лемма 1. *Пусть G — периодическая группа, F — ее собственная нетривиальная нормальная подгруппа, содержащая централизатор в G любого своего неединичного элемента.*

Если F локально конечна и дополняема в G, т. е. $G = FH$ для некоторой подгруппы H, тривиально пересекающейся с F, то G — группа Фробениуса с фробениусовым ядром F и фробениусовым дополнением H.

Доказательство. Пусть $g \in G \setminus H$ и $D = H \cap H^g$. Так как $G = FH = HF$, то $g = hf$, $h \in H$, $f \in F$ и $D = H \cap H^{hf} = H \cap H^f$.

Если $D \neq 1$, то существует $1 \neq h_0 \in H$, для которого $h_0^f = h_1 \in H$ и $f^{-1}h_0fh_0^{-1} = h_1h_0^{-1} = h_1h_0^{-1} \in H$. С другой стороны, $f^{-1}(hfh^{-1}) \in F$, поэтому $h_1h_0^{-1} \in H \cap F = 1$. Отсюда $h_0 = h_1 = h_0^f$, т. е. $h_0f = fh_0$. Поскольку F сильно изолирована, то $f = 1$ и $g \in H$; противоречие. Поэтому $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$.

Далее, если $fh \in G \setminus F$, где $f \in F$, $h \in H$, то $\langle f, h\rangle = \langle f^x \mid x \in \langle h\rangle\rangle\langle h\rangle$, и поскольку F локально конечна, подгруппа $X = \langle f, h\rangle$ конечна и является группой Фробениуса с фробениусовым ядром $X \cap F$ и фробениусовым дополнением $\langle h\rangle$, поэтому $fh \in \langle h\rangle^X \subseteq H^G$ и, таким образом, $G = F \cup H^G$ — группа Фробениуса. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — периодическая группа, F — ее собственная локально конечная нетривиальная нормальная подгруппа, содержащая централизатор в G любого своего неединичного элемента. Если G/F обладает нетривиальным центром, то G — группа Фробениуса с ядром F.*

Доказательство. По лемме 1 достаточно показать, что G обладает дополнением к F. Покажем, что таким дополнением является $C_G(z)$, где zF — любой нетривиальный элемент из центра G/F.

Для этого достаточно показать, что любой элемент $x \in G$ представим в виде $x = fc$, где $f \in F$, $c \in C_G(z)$. Это очевидно, если $x = f \in F$ или $x = c \in C_G(z)$. Пусть $x \in G$ и $x \notin F$, $x \notin C_G(z)$. Тогда $K = \langle x, z\rangle$ — неабелева группа и $\langle x, z\rangle F/F$ — конечная абелева группа. Поскольку F локально конечна, подгруппа $K = \langle x, z\rangle$ конечна и $F_0 = K \cap F$ нетривиальна. Поэтому K — группа Фробениуса с ядром F_0. Так как $z \notin F_0$, то z содержится в некотором фробениусовом дополнении H_0 к F_0 в K. Поскольку $H_0 \cap F = H_0 \cap F_0 = 1$, дополнение H_0 изоморфно подгруппе факторгруппы G/F и поэтому z содержится в центре H_0. Теперь $x \in K \leq FC_G(z)$. Из произвольности x вытекает, что $G = FC_G(z)$. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 1

До конца доказательства теоремы 1 зафиксируем следующую ситуацию: G — периодическая группа, F — ее собственная нетривиальная абелева подгруппа, содержащая централизатор в G любого своего неединичного элемента.

По лемме 1 для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что в G есть дополнение к F.

Лемма 3. *Если F не содержит инволюций, то G обладает дополнением к F.*

Доказательство. Пусть вначале в G/F есть инволюция tF. Тогда для любого $f \in F$ элемент $(ff^t)^t = f^tf^{t^2} = ff^t$ лежит в $C_F(t)$. По условию $ff^t = 1$, т. е. $f^t = f^{-1}$ и элемент Ft факторгруппы G/F принадлежит центру G/F. Действительно, для любых $g \in G$ и $1 \neq f \in F$ имеем $f^{tg} = (f^{-1})^g = (f^g)^{-1} = f^{gt}$, откуда $[g, t] \in C_G(f) \leq F$. По лемме 2 G обладает дополнением к F.

Пусть теперь G/F не содержит инволюций и τ — автоморфизм F, инвертирующий любой элемент F. Тогда $\langle\tau\rangle$ свободно действует на F и централизует G/F.

По [3] τ продолжается до автоморфизма τ^* группы G, и $C_G(\tau^*)$ — дополнение к F. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если F — 2-группа, то G обладает дополнением к F.*

Доказательство. Если G/F содержит элемент порядка 3, то, как следует из [4, теорема 1], он лежит в центре G/F. По лемме 2 G обладает дополнением к F.

Пусть G/F не содержит элементов порядка 3. Положим $P = G \times G = \{(g_1, g_2) \mid g_1, g_2 \in G\}$. Обозначим через $G^* = \{(g, g) \mid g \in G\}$ диагональ P, $F^* = \{(f, f) \mid f \in F\}$ и $H = (F \times F) \cdot G^* = \{(f_1, f_2) \mid f_1, f_2 \in F\} \cdot G^*$. Очевидно, $G^* \simeq G$, $F^* \simeq F$. Очевидно, $H = \{(g, gf) \mid g \in G, f \in F\}$ и если $(g, gf) = (g_1, g_1 f_1)$, где $g_1 \in G$, $f_1 \in F$, то $g = g_1$, $f = f_1$.

Пусть отображение $t : F \times F \to F \times F$ определено правилом $(f_1, f_2)t = (f_2, f_1^{-1} f_2^{-1})$ для любых $f_1, f_2 \in F$. Простая проверка показывает, что t — автоморфизм порядка 3 группы $F \times F$, действующий на $F \times F$ без нетривиальных неподвижных точек и t централизует факторгруппу $H/(F \times F) \simeq G^*/(G^* \cap (F \times F)) = G^*/F^* \simeq G/F$, рассматриваемую как подгруппу группы автоморфизмов $F \times F$.

По лемме 2 H обладает дополнением C к $F \times F$, изоморфным $G/F \simeq G^*/F^*$. Очевидно, $C \leq P$ и любой элемент из C имеет вид (g, gf), где $g \in G$, $f \in F$. При этом $\{g \in G \mid (g, gf) \in C\}$ является полным набором представителей смежных классов по F в G. Поэтому отображение $p : (g, gf) \to g$ из C в G накрывает G/F, т. е. $FCp = G$, и является гомоморфизмом C в G. Ядро этого гомоморфизма содержится в $F \times F$, и так как $\pi(C) \cap \pi(F) = \varnothing$, то Cp — дополнение F в G. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *G обладает дополнением H к F, и G — группа Фробениуса с фробениусовым ядром F и фробениусовым дополнением H.*

Доказательство. Предположим, что G не обладает дополнением к F. Пусть F_0 — множество всех 2-элементов из F, а F_1 — множество всех элементов из F нечетных порядков. Очевидно, $F = F_0 \times F_1$. По леммам 2 и 4 $F_1 \neq 1 \neq F_0$.

Пусть $\overline{G} = G/F_0$, $\overline{F} = F/F_0$. Тогда $\overline{F}$ — сильно изолированная подгруппа в $\overline{G}$, не содержащая инволюций. По лемме 2 в $\overline{G}$ существует дополнение $\overline{C}$ к $\overline{F}$. Пусть C — полный прообраз $\overline{C}$ в G. Очевидно, F_0 — сильно изолированная нормальная 2-подгруппа в C. По лемме 4 в C есть дополнение H к F_0, которое является дополнением к F в G. Поскольку абелева периодическая группа локально конечна, G является группой Фробениуса с ядром F и дополнением H по лемме 1.

Тем самым доказана лемма 5, а с ней и теорема 1.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — периодическая группа с локально конечной нормальной сильно изолированной подгруппой F и $\overline{x} = Fx$ — элемент простого порядка p в G/F. Ясно, что порядок x равен p и x индуцирует в F при сопряжении в G автоморфизм порядка p без нетривиальных неподвижных точек. Если D — конечное множество элементов из F, то $K = \{D^i \mid i = 1, 2, \dots, |x|\}$ — конечная $\langle x \rangle$-инвариантная подгруппа в F. По теореме Томпсона – Хигмана K — нильпотентная подгруппа, ступень нильпотентности которой не превосходит некоторого числа h, зависящего только от p. Поскольку тождество нильпотентности группы ступени h зависит от $h+1$ переменных, F нильпотентна и, в частности, разрешима.

Для окончания доказательства нам потребуется следующий критерий сильной изолированности нормальной локально конечной подгруппы.

Предложение 2. *Пусть F — локально конечная нормальная подгруппа периодической группы G и $1 \neq F \neq G$. Подгруппа F сильно изолирована в G*

тогда и только тогда, когда любой элемент из $G \setminus F$ *является* π'*-элементом, где* $\pi = \pi(F)$.

Доказательство. Пусть F сильно изолирована в G, т. е. содержит централизатор в G любого своего неединичного элемента. Пусть $x \in G \setminus F$. Так как $\langle F, x\rangle$ локально конечна, то $X = \langle x, y\rangle$ конечна для любого $1 \neq y \in F$. Очевидно, $X \cap F$ сильно изолирована в X, поэтому X — группа Фробениуса с ядром $X \cap F$. Отсюда следует, что порядок x взаимно прост с порядком y для любого $y \in F$, т. е. x является π'-элементом.

Пусть, наоборот, любой элемент x из $G \setminus F$ является π'- элементом и $1 \neq y \in F$. Тогда снова $X = \langle x, y\rangle$ — конечная группа Фробениуса с ядром $X \cap F$ и, следовательно, $xy \neq yx$. Таким образом, $C_G(y) \leq F$, и предложение доказано.

Вернемся к доказательству теоремы 2, которое проведем индукцией по ступени разрешимости l группы F. Пусть $\pi = \pi(F)$.

При $l = 1$ теорема 2 превращается в теорему 1. Если же $l > 1$, то пусть $F_0 = F^{(l-1)}$ — коммутативный член ряда коммутантов F. По предложению 2 любой элемент из $G\setminus F$ является π'-элементом, поэтому любой элемент из $G/F_0 \setminus F/F_0$ является π'-элементом и по предложению 2 F/F_0 — сильно изолированная подгруппа в G/F_0. По предположению индукции F/F_0 обладает дополнением C/F_0 в G/F_0. По предложению 2 F_0 обладает дополнением C_0 к F_0 в C, которое является дополнением к F в G. По лемме 1 G — группа Фробениуса. Теорема 2 доказана.

Благодарность. Авторы благодарны Даниле Олеговичу Ревину, замечания которого позволили существенно улучшить статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Unsolved problems in group theory.* The Kourovka notebook. V. 20. Novosibirsk, 2022 (https://alglog.org/20tkt.pdf)
2. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
3. *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д* . О продолжении регулярного автоморфизма // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 770–772.
4. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.

Поступила в редакцию 13 августа 2023 г.
После доработки 13 августа 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Лыткина Дарья Викторовна (ORCID 0000-0002-5052-3972)
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович (ORCID 0000-0003-3028-8490)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
mazurov@math.nsc.ru