

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 9, № 2 [1971], 105—112

УДК 517.5

О ПРИБЛИЖЕНИИ КЛАССОВ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Арестов, В. Н. Габушин

Указываются условия, при которых величина

$$F = \sup_{\|f^{(k)}\|_{L_p(S)} \leq 1} \inf_{\|\varphi^{(l)}\|_{L_r(S)} \leq n} \|f - \varphi\|_{L_p(S)}$$

конечна или бесконечна. В некоторых случаях вычислено
ное значение этой величины. Библи. 8 назв

Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ — произвольные, k, l — целые числа, S — отрезок числовой прямой, полупрямая или прямая, f — определенная на множестве S измеримая функция. Если $1 \leq p < \infty$, то норма функции f в метрике $L_p(S)$ определяется обычным образом, если же $p = \infty$, то $\|f\|_{L_\infty(S)} = \text{ess sup}_{x \in S} |f(x)|$. Через $B(k, q)$ будем обозначать класс функций f , у которых $(k-1)$ -производная локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(k)}\|_{L_q(S)} \leq 1$. Положим

$$B_n(l, r) = \{f(x) : f(x)/n \in B(l, r)\}.$$

Иногда для класса $B(k, q)$ будем использовать обозначение $B(k, q, S)$; этим мы подчеркиваем, что функции из класса $B(k, q)$ определены на множестве S .

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении функций класса $B(k, q)$ функциями класса $B_n(l, r)$

$$F(n)F(n, S) = \sup_{f \in B(k, q)} \inf_{\varphi \in B_n(l, r)} \|f - \varphi\|_{L_p(S)}. \quad (1)$$

С этой задачей тесно связана задача о наилучшем линейном методе приближения класса дифференцируемых

функций

$$F_L(n) = \inf_{V \in T(n)} \sup_{f \in B(k, q)} \|f - Vf\|_{L_p(S)}, \quad (2)$$

где $T(n)$ — множество таких аддитивных и однородных на $B(k, q)$ операторов V , что для любого $f \in B(k, q)$ имеем

$$\|(Vf)^{(l)}\|_{L_r(S)} \leq n.$$

Задачи такого рода рассматривались ранее в работах [2], [3] и др. В настоящей заметке указаны порядки величин $F_n(L)$ и $F(n, S)$, приведены условия конечности этих величин, если S — полупрямая или прямая, а также вычислены значения $F(n, S)$ в некоторых частных случаях.

ТЕОРЕМА 1. Если S — числовая прямая или полупрямая, $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 < k \leq l$, $l - k - 1/r + 1/q \neq 0$, то

$$F(n) = F(1)n^\gamma, \quad (3)$$

$$F_L(n) = F_L(1)n^\gamma, \quad (4)$$

где

$$\gamma = (1/q - 1/p - k) / (l + 1/q - k - 1/r).$$

Доказательство. Установим несколько более общий факт. Пусть μ, ν — положительные числа; S — отрезок $[0, t]$, полупрямая $[0, \infty)$ или прямая $(-\infty, \infty)$. Выберем числа a и b так, чтобы $ab^{k-1/q} = \mu$, $ab^{l-1/r} = \nu$, а затем положим $S_1 = [0, t/b]$, если $\text{mes } S < \infty$, и $S_1 = S$, если $\text{mes } S = \infty$. Введем обозначение

$$F_n(f, S) = \inf_{\varphi \in B_n(l, r, S)} \|f - \varphi\|_{L_p(S)},$$

и покажем, что если $g(x) = af(bx)$, то

$$F_\nu(g, S_1) = \mu^{1/\alpha} \nu^\gamma F_1(f, S), \quad (5)$$

где

$$\alpha = (l + 1/q - k - 1/r) / (l - 1/r + 1/p). \quad (6)$$

Действительно, поставим в соответствие функции $\varphi \in B_1(l, r, S)$ функцию $\psi(x) = a\varphi(bx)$. Нетрудно про-

верить, что

$$\left. \begin{aligned} \|g - \psi\|_{L_p(S_1)} &= ab^{-1/p} \|f - \varphi\|_{L_p(S)} = \mu^{1/\alpha} \nu^\gamma \|f - \varphi\|_{L_p(S)}, \\ \|\psi^{(l)}\|_{L_r(S_1)} &= ab^{l-1/r} \|\varphi^{(l)}\|_{L_r(S)} \leq \nu, \\ \|g^{(k)}\|_{L_q(S_1)} &= ab^{k-1/q} \|f^{(k)}\|_{L_q(S)} \leq \mu. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, формулой $\psi(x) = a\varphi(bx)$ установлено взаимно однозначное соответствие между классами $B(l, r, S)$ и $B_\nu(l, r, S_1)$. Используя формулы (7), получаем равенство (5).

Формулой $g(x) = af(bx)$, $f \in B(k, q, S)$, устанавливается также взаимно однозначное соответствие между классами $B(k, q, S)$ и $B_\mu(k, q, S_1)$. Полагая в (5) $\mu = 1$, приходим к равенству $F(\nu, S_1) = \nu^\gamma F(1, S)$. В случае $\text{mes } S = \infty$ отсюда получаем равенство (3).

Соотношение (4) устанавливается аналогичным образом (см. также [1]). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S — числовая прямая или полупрямая, $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 < k \leq l$, $l - k - 1/r + 1/q \neq 0$. Если $1 \leq q \leq \min(p, r)$, то

$$F(n) \leq F_L(1) < \infty,$$

если же $(l - k)p^{-1} + kr^{-1} > lq^{-1}$, то

$$F(n) = F_L(1) = \infty.$$

Доказательство. Пусть $q \leq \min(p, r)$. Покажем, что $F_L(n) < \infty$. Из теоремы 1 следует, что это утверждение достаточно доказать при некотором фиксированном значении n . Поставим в соответствие функции $f \in B(k, q)$ функцию G вида

$$G(x) = \int_0^x f(x+t)(x-t)^{l-k-1} dt / (l-k-1)! \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что $G^{(l-k)}(x) = f(x)$ и $G^{(j)}(0) = 0$ при $0 \leq j \leq l - k - 1$. В [5] указывается такой оператор

$$VG = \int_0^1 G(x+t)\psi(t) dt$$

с полиномиальным ядром $\psi(t)$, что

$$G^{(l-k)}(x) - VG = \int_0^1 \eta(\xi) G^{(l)}(x + \xi) d\xi,$$

где $\eta(\xi)$ — непрерывная функция. Так как

$$(VG)^{(l)} = VG^{(l)} = \int_0^1 G^{(l)}(x + t) \psi(t) dt = \int_0^1 f^{(k)}(x + t) \psi(t) dt,$$

$$f(x) - VG = \int_0^1 \eta(\xi) f^{(k)}(x + \xi) d\xi,$$

то, применяя сначала неравенство Гёльдера, а затем обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\begin{aligned} \|(VG)^{(l)}\|_{L_r(S)} &= \left\{ \int_S \left| \int_0^1 f^{(k)}(x + t) \psi(t) dt \right|^r dx \right\}^{1/r} \leq \\ &\leq \left\{ \int_S \left[\int_0^1 |f^{(k)}(x + t)|^q dt \right]^{r/q} \|\psi\|_{L_{q_1(0,1)}}^r dx \right\}^{1/r} \leq \\ &\leq \|\psi\|_{L_{q_1(0,1)}} \|f^{(k)}\|_{L_q(S)} \leq n, \\ \|f - VG\|_{L_p(S)} &\leq \|\eta\|_{L_{p_1(0,1)}} \|f^{(k)}\|_{L_q(S)}, \end{aligned}$$

где

$$n = \|\psi\|_{L_{q_1(0,1)}}, \quad 1/p + 1/p_1 = 1, \quad 1/q + 1/q_1 = 1.$$

Отсюда

$$F(n) \leq F_L(n) < \infty.$$

Рассмотрим случай, когда $(l - k)p^{-1} + kr^{-1} > lq^{-1}$. Установим сначала, что замыкание $\bar{B}(l, 1, T)$ множества $B(l, 1, T)$, $l \geq 2$, ограничено компактно в метрике $L_p(T)$ и для любой функции $f \in \bar{B}(l, 1, T)$ справедливо соотношение: $\text{var } f^{(l-1)}(x) \leq 1$; $T = [0, 1]$. Действительно, пусть $f_n \in B(l, 1, T)$, $\|f_n\|_{L_p(T)} \leq A$, $n = 1, 2, \dots$. Представим функцию f_n по формуле Тейлора в виде $f_n = P_n + R_n$, где

$$P_n = \sum_{i=0}^{l-1} f_n^{(i)}(0) \frac{x^i}{i!},$$

$$R_n = \int_0^x \{f_n^{(l-1)}(t) - f_n^{(l-1)}(0)\} (x - t)^{l-2} \frac{dt}{(l-2)!}.$$

Выделим из последовательности f_n сходящуюся подпоследовательность. Согласно, например, неравенству (10) из [7] $\|f_n^{(i)}\|_{C(T)} \leq M$, $i = 0, \dots, l-1$, где M не зависит от n . Поэтому множество полиномов P_n компактно в метрике $L_p(T)$ и, следовательно, найдется полином P^* и подпоследовательность $\{f_m\}$ из $\{f_n\}$ со свойством: $\|P_m - P^*\|_{L_p(T)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Так как $\text{var } f_n^{(l-1)} \leq \|f_n^{(l)}\|_{L(T)}$, то по принципу выбора Хелли найдется функция g и подпоследовательность (f_s) последовательности (f_m) со свойством

$$\text{var } \{f_s^{(l-1)}(x) - f_s^{(l-1)}(0) - g(x)\} \rightarrow 0, \quad g(0) = 0$$

при $s \rightarrow \infty$. Отсюда $f_s(x)$ сходится в метрике $L_p(T)$ к функции

$$G(x) = P^*(x) + \int_0^x g(t)(x-t)^{l-2} dt / (l-2)!$$

Выберем финитную функцию $f \in B(k, q)$ с носителем на отрезке T так, чтобы $\|f^{(l)}\|_{L_r(T)} > 1$. При $r = 1$ будем предполагать, что $\text{var } f^{(l-1)}(x) > 1$. Отметим, что при $r > 1$ множество $B(l, r, T)$ ограничено компактно в метрике $L_p(T)$ (см. [7]). Если $l = r = 1$, то очевидно, что

$$F(f, T) = \inf_{\|\varphi^{(l)}\|_{L_r(T)} \leq 1} \|f - \varphi\|_{L_p(T)} \neq 0. \quad (9)$$

В остальных случаях найдется такой элемент $\varphi^* \in \bar{B}(l, r, T)$, что

$$F(f, T) \geq \inf_{\varphi \in \bar{B}(l, r, T)} \|f - \varphi\|_{L_p(T)} = \|f - \varphi^*\|_{L_p(T)} \neq 0. \quad (9')$$

Пусть $m \geq 1$ — целое число, $\mu = (2m)^{-1/q}$, $\nu = m^{-1/r}$. Согласно (9) и (5) можно выбрать числа a и b так, чтобы функция $f_{\mu, \nu} = af(bx)$ и отрезок $S_{\mu, \nu} = [0, 1/b]$ удовлетворяли требованиям:

$$\|f_{\mu, \nu}^{(k)}\|_{L_q(T)} = \mu, \\ F_\nu(f_{\mu, \nu}, S_{\mu, \nu}) = \mu^{1/\alpha} \nu^\gamma F_1(f, T); \quad T = [0, 1].$$

Нетрудно проверить, что у функции

$$f_m(x) = \sum_{i=1}^{2m} f_{\mu, \nu}(x - i \text{ mes } S_{\mu, \nu})$$

$\|f_m^{(k)}\|_{L_q(S)} = 1$. Обозначим через S_i множество, получающееся при сдвиге отрезка $S_{\mu, \nu}$ на величину i мес $S_{\mu, \nu}$, $i = 1, \dots, 2m$. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная функция из класса $B(l, r, S)$, $S = [0, \infty)$ при $S = (-\infty, \infty)$. Выберем те отрезки S_i , на которых $\|\varphi^{(l)}\|_{L_r(S_i)} \leq \nu$. Этих отрезков будет не менее m , ибо в противном случае $\|\varphi^{(l)}\|_{L_r(S)} > 1$. Совокупность таких отрезков обозначим через σ . Тогда с учетом (9) и (9') находим, что

$$\begin{aligned} \|f_m - \varphi\|_{L_p(S)} &\geq \sum_{S_i \in \sigma} \|f_{\mu, \nu}(x - i \text{ мес } S_{\mu, \nu}) - \varphi\|_{L_p(S_{\mu, \nu})}^p \geq \\ &\geq m \inf_{\varphi \in B_\nu(l, r, S_{\mu, \nu})} \|f_{\mu, \nu} - \varphi\|_{L_p(S_{\mu, \nu})}^p = \\ &= m F_\nu^p(f_{\mu, \nu}, S_{\mu, \nu}) = F_1^p(f, T) m (2m)^{-p/\alpha q} m^{-\gamma p/r} \geq \\ &\geq C_2^p m^{1-p/\alpha q - \gamma p/r}, \end{aligned}$$

причем $C_2 > 0$ не зависит от m . Из условия $(l - k)p^{-1} + kr^{-1} > lq^{-1}$ следует, что $1/p - 1/\alpha q - \gamma/r > 0$, и, таким образом, $F_1(f_m, S) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $l - k - 1/r + 1/q = 0$. Если $k = l$, $q = r$, то, очевидно, $F_L(n) = F(n) = 0$ при $n \geq 1$ и $F_L(n) = \infty$ при $n < 1$. Если же $k = l - 1$, $q = \infty$, $r = 1$, то $F(n) = \infty$ и доказательство можно провести по общей схеме, полагая $\mu = \nu = 1$, $f_{\mu, \nu} = f$, $S_{\mu, \nu} = T$.

ТЕОРЕМА 3. Если $S = (-\infty, \infty)$, $0 < k < l$, то

$$F(n) = \sup_{\|f^{(k)}\|_{L_\infty(S)} \leq 1} \inf_{\|\varphi^{(l)}\|_{L_\infty(S)} \leq n} \|f - \varphi\|_{C(S)} = G_n, \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_n &= (k/l)^k (1 - k/l)^{l-k} K_k^{k/l} K_l^{k/(k-l)} n^{k/(k-l)}, \\ K_i &= \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{(i+1)(j-1)} (2j-1)^{-i-1}, \quad i = k, l. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

При $l \leq 5$ эта теорема сформулирована в [3]. При произвольных l там же указана оценка снизу $F(n) \geq G_n$.

Доказательство. Пусть $S = (-\infty, \infty)$, $S_i = [-i, i]$, $i = 1, 2, \dots$ Рассмотрим топологию равномерной сходимости на компактных множествах ([4], стр. 302). Известно, что в этой топологии последовательность

f_n сходится к f (обозначение: $f_n \xrightarrow{\tau} f$), если для любого i

$$\|f_n - f\|_{C(S_i)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Докажем формулу (10) в предположении, что множество

$$W(M) = \{f : f \in B_n(l, \infty), \|f\|_{C(S_i)} \leq M\}$$

компактно в топологии τ . Поставим в соответствие функции $f \in B(k, \infty)$ функцию F вида (8). Известно (см., например, [6]), что функцию \tilde{F}_i , определенную на множестве S_i равенством $\tilde{F}_i(x) = F(x)$, можно продолжить до некоторой финитной функции $F_i \in B(l, \infty)$. Пусть $f_i = F_i^{(l-k)}$. Очевидно, что $f_i \xrightarrow{\tau} f$. В [8] указан такой оператор $VF = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j F(x + jt)$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j| \leq n$, $t > 0$ — некоторое число, что

$$\|f_i - \varphi_i\|_{C(S)} \leq G_n.$$

Здесь $\varphi_i = VF_i$. В силу финитности функции F_i
 $(VF_i)^{(l-1)} = VF_i^{(l-1)}$ и $\|(VF_i)^{(l)}\|_{L_{\infty}(S)} \leq n$.

Очевидно, что для $i \geq 1$

$$\|\varphi_i\|_{C(S_i)} \leq \|f\|_{C(S_i)} + G_n = M$$

и в силу компактности $W(M)$ найдется функция $\varphi \in W(M)$ и подпоследовательность $\{\varphi_m\}$ последовательности $\{\varphi_i\}$ со свойством $\varphi_m \xrightarrow{\tau} \varphi$. Тогда для любого $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_{C(S_i)} &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \{\|f - f_m\|_{C(S_i)} + \\ &+ \|f_m - \varphi_m\|_{C(S_i)} + \|\varphi_m - \varphi\|_{C(S_i)}\} \leq G_n. \end{aligned}$$

Итак, формула (10) установлена.

Докажем теперь, что $W(M)$ — компактное множество (близкое утверждение имеется в [6], гл. 7). Для этого воспользуемся критерием Асколи (Арцела) ([4], стр. 304).

а) Поскольку $\|f\|_{C(S_i)} \leq M$, то согласно, например, неравенству (10) из работы [7] $|f^{(j)}(0)| \leq N$, $j = 0, \dots, l-1$, причем N не зависит от $f \in W(M)$. По формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{j=0}^{l-1} f^{(j)}(0) \frac{x^j}{j!} + \frac{1}{(l-1)!} \int_0^x f^{(l)}(t) (x-t)^{l-1} dt.$$

Отсюда и из условия $\|f^{(l)}\|_{L_{\infty}(S)} \leq n$ следует, что

$$|f(x)| \leq C(n, l, m) |x|^l.$$

б) Известно (см. [7]), что для любого $S_i, i = 1, 2, \dots$, множество $B(l, \infty, S_i)$ ограничено компактно в метрике $C(S_i)$. Поэтому, если $f_n \xrightarrow{\tau} f$ и $f_n \in W(M)$, то для любого i

$$\|f^{(l)}\|_{L^\infty(S_i)} \leq n \text{ и } \|f\|_{C(S_i)} \leq M,$$

т. е. $f \in W(M)$. Это означает, что $W(M)$ — замкнутое в топологии τ множество.

в) В силу ограниченной компактности множества $B(l, \infty, S_i)$, условия а) и критерия Асколи для отрезка S_i множество $W(M)$ равномерно непрерывно на каждом отрезке S_i .

Таким образом, выполнены все условия теоремы Асколи и, следовательно, $W(M)$ — компактное множество. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $F^+(n)$ — величина (1) для $p = q = r = \infty$ и $S = [0, \infty)$. В [3] доказано, что $F_n^+ \geq G_n$ при любых l и k . Поскольку всякую функцию $f \in B(k, \infty, S)$ можно продолжить до функции $\tilde{f} \in B(k, \infty, S_1)$, $S_1 = (-\infty, \infty)$, то $F^+(n) \leq F(n, S_1)$ и в силу теоремы 3 $F^+(n) = G_n$. При $l \leq 5$ это утверждение приведено в [3].

Свердловское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
2.III.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] С т е ч к и н С. Б., Наилучшее приближение линейных операторов, Матем. заметки, 1, № 2 (1967), 137—148.
- [2] Т а й к о в Л. В., О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций, Матем. заметки, 1, № 2 (1967), 155—162.
- [3] С у б б о т и н Ю. Н., Наилучшее приближение класса функций другим классом. Матем. заметки, 2, № 5 (1967), 495—504.
- [4] К е л л и Д., Общая топология, М., 1968.
- [5] А р е с т о в В. В., О наилучшем равномерном приближении оператора дифференцирования, Матем. заметки, 5, № 3 (1969), 273—284.
- [6] Н и к о л ь с к и й С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.
- [7] Г а б у ш и н В. Н., Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах, Матем. заметки, 8, № 5 (1970), 551—562.
- [8] D o m a r Y., An extremal problem related to Kolmogoroff's inequality for bounded functions, Arkiv for mat., 7, № 5 (1968), 433—441.