N. M. Bogolyubov, V. E. Korepin, Correlation functions of one-dimensional Bose gas in thermodynamic equilibrium, *TMF*, 1984, Volume 60, Number 2, 262–269

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 2
август, 1984

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОМЕРНОГО БОЗЕ-ГАЗА В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ

Боголюбов Н. М., Корепин В. Е.

Рассматривается состояние термодинамического равновесия одномерного бозе-газа при ненулевой температуре. Метод вычисления корреляторов в этой системе проиллюстрирован на простейшем примере — корреляционной функции токов. Чрезвычайно полезными оказываются формулы алгебраического анзаца Бете [1].

1. ВВЕДЕНИЕ

Бозе-газ является весьма интересной и физически содержательной системой. Впервые задача о бозе-газе со слабым взаимодействием была решена в работе [2]. В работах [3, 4] было отмечено, что собственные функции гамильтониана одномерного бозе-газа с точечным взаимодействием могут быть точно найдены. Одномерный бозе-газ эквивалентен квантовому нелинейному уравнению Шредингера. Мы будем употреблять сокращение НШ, чтобы обозначить модель. Гамильтониан модели имеет вид

$$H=\int\limits_0^L dx(\partial_x\Psi^+\partial_x\Psi+c\Psi^+\Psi^+\Psi\Psi-h\Psi^+\Psi), \tag{1}$$

$$[\Psi(x),\ \Psi^+(y)]=\delta(x-y),$$

здесь L — длина ящика, c — константа связи ($c>0$), h — химический потенциал ($h>0$).

Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) был применен к этой модели в работах [1, 5, 6, 7, 8]. В случае отталкивания основное состояние системы (море Дирака) было построено при нулевой температуре в работе [9]. В работе [10] рассматривалась термодинамика модели при ненулевой температуре. Состояние термодинамического равновесия описывается двумя уравнениями:

$$\varepsilon(\lambda)=\lambda^2-h-\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda,\mu)\ln[1+e^{-\varepsilon(\mu)/T}]\,d\mu, \tag{2}$$

$$2\pi\rho(\lambda)\vartheta^{-1}(\lambda)=1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda,\mu)\rho(\mu)\,d\mu, \tag{3}$$

где $\varepsilon(\lambda)$ — энергия возбужденного состояния над физическим вакуумом; T — температура; $K(\lambda,\mu)=2c/[c^2+(\lambda-\mu)^2]$;

$$\vartheta^{-1}(\lambda)=1+e^{\varepsilon(\lambda)/T}. \tag{4}$$

Функция $\varepsilon(\lambda)$ является четной функцией λ, монотонно возрастающей на положительной полуоси, $\varepsilon(\lambda)\to\lambda^2$ при $\lambda\to\pm\infty$. Функция $\rho(\lambda)$ — это плотность моря.

Собственную функцию гамильтониана, описывающую состояние термодинамического равновесия мы будем обозначать $|\Omega_T\rangle$. Над основным состоянием существует два типа возбуждений — частица и дырка. С помощью метода работы [11] легко вычислить матрицу рассеяния этих возбуждений. Она определяется с помощью «голой» фазы рассеяния $\Phi(\lambda)=$ $=i\ln[(\lambda+ic)/(\lambda-ic)]$ и одевающих уравнений. Мы выбираем ветвь логарифма так, что $\Phi(\infty)=0$. «Одетая» фаза рассеяния $F(\lambda_p, \lambda_h)$ частицы с импульсом λ_p на дырке с импульсом λ_h однозначно определяется уравнением

$$F(\lambda_p,\lambda_h)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda_p,\mu)\vartheta(\mu)F(\mu,\lambda_h)\,d\mu=\Phi(\lambda_p-\lambda_h). \tag{5}$$

Матрица рассеяния частицы на дырке равна

$$S(\lambda_p,\lambda_h)=\exp\{-iF(\lambda_p,\lambda_h)\}\quad(\lambda_p>\lambda_h). \tag{6}$$

В работе [12] вычислены нормы бетевских волновых функций $|\Psi_k\rangle$

$$\langle\Psi_k|\Psi_k\rangle=\det{}_k(\varphi'). \tag{7}$$

Здесь $k\times k$-матрица φ' определяется как $\varphi_{jk}'=\partial\varphi_j/\partial\lambda_k$, а фазы φ_j равны

$$\varphi_j=\lambda_jL+\sum_{\substack{n\neq j\\ n=1}}\Phi(\lambda_j-\lambda_n). \tag{8}$$

Важно отметить, что в термодинамическом пределе якобиан (7) существенно упрощается:

$$\det{}_N(\varphi')\to\prod_{j=1}^{N}[2\pi L\rho(\lambda_j)\vartheta^{-1}(\lambda_j)]\det\left[1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}_T\right], \tag{9}$$

$$N\to\infty,\quad L\to\infty,\quad N/L=\text{const}.$$

Последний сомножитель — это детерминант интегрального оператора, который действует на функцию F в левой части равенства (5). В работах [13, 14] с помощью КМОЗ были вычислены корреляторы в одномерном бозе-газе с отталкиванием при нулевой температуре. В настоящей работе аналогичным способом вычислены корреляторы при произвольной температуре. Общий метод вычисления проиллюстрирован на простейшем примере коррелятора токов $j=\Psi^+\Psi$. Ответ представлен в виде ряда, который дает, например, улучшенную версию $1/c$-разложения — поправки дают равномерное приближение по расстоянию. В пределе $c\to0$ ряд также существенно упрощается. Слагаемое с номером n порождается вкладом n-вакуумных частиц.

2. КОРРЕЛЯТОР ТОКОВ

Вычисление коррелятора токов сводится к вычислению среднего от оператора Q_1^2:

$$\langle\Omega_T|j(x)j(0)|\Omega_T\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle\Omega_T|Q_1^2|\Omega_T\rangle, \tag{10}$$

здесь $Q_1=\int\limits_0^x \Psi^+\Psi\,dx$ — оператор числа частиц на отрезке $[0, x]$. Для того чтобы вычислить разложение среднего $\langle\Omega_T|Q_1^2|\Omega_T\rangle$, удобно рассмотреть другое среднее $\langle\Psi_k|Q_1^2|\Psi_k\rangle$. Здесь $|\Psi_k\rangle$ — это k-частичная, нормированная специальным образом (7) собственная функция гамильтониана, зависящая от импульсов λ_j, $j=1,\ldots,k$. В работе [13] доказано, что это среднее представимо в псевдополиномиальном виде

$$\langle\Psi_k|Q_1^2|\Psi_k\rangle=\sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-1}J_{n,m}^{k}x^n y^m, \tag{11}$$

$$y=L-x. \tag{12}$$

Коэффициенты $J_{n,m}^k$ являются рациональными функциями от λ_j и $\exp\{i\lambda_j x\}$. Коэффициент J_{00}^k называется неприводимой частью этого среднего $I_k=J_{00}^k$. В работе [14] доказано, что все коэффициенты $J_{n,m}^k$ могут быть выражены через неприводимые части I_i с $i\leqslant k$. Неприводимая часть может быть представлена в виде [13]

$$I_k(\{\lambda_j\})=\sum_{\{\lambda\}=\{\lambda^+\}\cup\{\lambda^-\}\cup\{\lambda^0\}}\exp\left\{-ix\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)\right\}A_k^n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},\{\lambda^0\}). \tag{13}$$

Здесь суммирование ведется по разбиению множества $\{\lambda_j\}$ на три непересекающихся подмножества $\{\lambda^+\}$, $\{\lambda^-\}$ и $\{\lambda^0\}$, причем $\mathrm{card}\{\lambda^+\}=\mathrm{card}\{\lambda^-\}=n$; $\mathrm{card}\{\lambda^0\}=k-2n$; $n\leqslant[k/2]$. Величины A_k^n называются коэффициентами Фурье неприводимой части, они не зависят от x, являются рациональными функциями λ_j. Свойства коэффициентов Фурье подробно исследованы в работе [13]. Важнейшее их свойство состоит в том, что они малы в пределе сильной и слабой связи

$$A_k^n \xrightarrow[c\to 0]{} c^{k-2};\qquad A_k^n \xrightarrow[c\to\infty]{} c^{2-k};\qquad k\geqslant 2. \tag{14}$$

Неприводимые части зависят от c аналогично. Неприводимые части можно элементарно вычислить при небольших k как с помощью КМОЗ, так и с помощью координатной волновой функции [13]. Например:

$$I_0=0;\quad I_1=0; \tag{15}$$

$$I_2(\lambda_1\lambda_2)=A_2^1(\lambda_1\lambda_2)[e^{-ix(\lambda_1-\lambda_2)}-1]+A_2^1(\lambda_2\lambda_1)[e^{-ix(\lambda_2-\lambda_1)}-1],$$

$$A_2^1(\lambda_1\lambda_2)=\frac{-2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2+ic}{\lambda_1-\lambda_2-ic}\right).$$

Трехчастичная неприводимая часть равна

$$(16)\qquad I_3(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)=\sum_P\,[e^{-ix(\lambda_{P_1}-\lambda_{P_2})}-1]A_3^1(\lambda_{P_1},\lambda_{P_2},\lambda_{P_3}).$$

Сумма ведется по перестановкам P импульсов λ_1, λ_2, λ_3. Коэффициент Фурье A_3^1 равен

$$(17)\qquad A_3^1(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)=\frac{8c}{\lambda_{12}^2}\left(\frac{\lambda_{12}+ic}{\lambda_{12}-ic}\right)\left[\frac{\lambda_{32}}{\lambda_{31}}+\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32}}\right]\frac{1}{(\lambda_{31}+ic)(\lambda_{23}+ic)},$$
$$\lambda_{jk}=\lambda_j-\lambda_k.$$

Чтобы вычислить вклад неприводимой части в коррелятор, ее следует «одеть». Одевающее преобразование определяется с помощью функции $P_n(t,\ \{\lambda^+\},\ \{\lambda^-\})$, которая зависит от $(2n+1)$ вещественных аргументов t, λ_j^+, λ_j^-, $j=1,\ldots,n$. Эта функция однозначно определяется одевающим уравнением

$$(18)\qquad 1+2\pi P_n(t)=\left\{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j^+-t+ic}{\lambda_j^+-t-ic}\right)\left(\frac{\lambda_j^--t-ic}{\lambda_j^--t+ic}\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}K(t,s)\vartheta(s)P_n(s)\,ds\right\}$$

и неравенством $\operatorname{Re}P_n(t,\ \{\lambda^+\},\ \{\lambda^-\})\leqslant 0$. Можно доказать теорему существования его решения.

Перечислим важнейшие свойства функции P_n.

1. При комплексном сопряжении наборы $\{\lambda^+\}$ и $\{\lambda^-\}$ меняются местами: $P_n^*(t,\ \{\lambda^+\},\ \{\lambda^-\})=P_n(t,\ \{\lambda^-\},\ \{\lambda^+\})$.

2. Функция P_n является симметричной функцией всех λ_j^+ и всех λ_j^- по отдельности.

3. Функция P_{n-1} — это специальный случай P_n при $\lambda_n^+=\lambda_n^-$. Если наборы λ_j^+ и λ_j^- совпадают целиком $\lambda_j^+=\lambda_j^-$ при $j=1,\ldots,n$, то $P_n=0$.

4. При $t\to\pm\infty$ и фиксированных $\{\lambda^+\}$ и $\{\lambda^-\}$ функция $P_n(t,\ \{\lambda^+\},\ \{\lambda^-\})$ стремится к нулю.

5. Если $\{\lambda^+\}\neq\{\lambda^-\}$, то $\operatorname{Re}P_n(t)$ не обращается в нуль при конечных t.

6. Функция $P_n(t,\ \{\lambda^+\},\ \{\lambda^-\})$ ограничена во всей области определения: $|P_n(t,\ \{\lambda^+\},\ \{\lambda^-\})|\leqslant 1/\pi$.

7. В пределе слабой связи $c\to 0$, P_n стремится к нулю почти всюду за исключением областей $|\lambda_j^\pm-t|\leqslant c$. В этих областях P_n ограничена. Предел сильной связи обсуждается ниже.

С помощью функции P_n определим функцию p_n. Это функция $2n$ вещественных аргументов

$$(19)\qquad p_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})=i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^--\lambda_j^+)+\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta(t)P_n(t,\ \{\lambda^+\},\ \{\lambda^-\})\,dt.$$

Одевающее преобразование действует на неприводимую часть следующим образом: $I_k\to I_k^d$, где

$$(20)\qquad I_k^d=\sum_{\{\lambda\}=\{\lambda^+\}\cup\{\lambda^-\}\cup\{\lambda^0\}}e^{xp_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})}A_k^n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},\{\lambda^0\});$$

здесь сумма ведется по тем же разбиениям, что и в (13). Таким образом, одевающее преобразование действует только на экспоненты с помощью замены $\exp\left\{-ix\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)\right\}\to\exp\{xp_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})\}$, коэффициенты Фурье A_k^n остаются при этом неизменными. Итак, мы определили одевающее преобразование. Отметим, что $I_k^d(\{\lambda_j\})$ является вещественной, симметричной и ограниченной функцией при вещественных λ_j.

Теперь все готово для того, чтобы представить разложение коррелятора. Вклад k-частичных процессов Γ_k определяется как k-кратный интеграл от I_k^d с весом $\omega(\lambda)$:

$$\Gamma_k=\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{k}\left[\frac{\vartheta(\lambda_j)\,\omega(\lambda_j)\,d\lambda_j}{2\pi}\right]I_k^d(\{\lambda_j\}),\tag{21}$$

$$\omega(\lambda)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda,\mu)\,\vartheta(\mu)\,d\mu\right\}.\tag{22}$$

Вес $\omega(\lambda)$ — это функция ограниченной вариации

$$0<\omega(\lambda)<1.\tag{23}$$

Окончательно интересующее нас среднее равно

$$\frac{\langle\Omega_T|Q_1^2|\Omega_T\rangle}{\langle\Omega_T|\Omega_T\rangle}=x^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\lambda)\,d\lambda\right]^2+x\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta(\lambda)\,\sigma(\lambda)\,d\lambda+\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_k;\tag{24}$$

здесь $\rho(\lambda)$ — это плотность (3), а $\sigma(\lambda)$ определяется из уравнения

$$2\pi\sigma(\lambda)-\int_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda,\mu)\,\vartheta(\mu)\,\sigma(\mu)\,d\mu=[2\pi\rho(\lambda)]^2[1+e^{\varepsilon(\lambda)/T}]^2.\tag{25}$$

Отметим, что формула (24) отличается от соответствующей формулы при нулевой температуре лишь заменой меры интегрирования

$$\int_{-q}^{q}d\lambda\to\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta(\lambda)\,d\lambda.\tag{26}$$

Доказательство формулы (24) аналогично приведенному в работах [13, 14]. Для коррелятора токов получаем

$$\frac{\langle\Omega_T|j(x)j(0)|\Omega_T\rangle}{\langle\Omega_T|\Omega_T\rangle}=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\lambda)\,d\lambda\right]^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_k.\tag{27}$$

Достаточно рассмотреть случай $x>0$, т. к. коррелятор токов является четной функцией разности координат. Отметим, что из формул (2), (4), (13), (14), (18), (22) следует, что при $c\to\infty$ $\Gamma_k\to c^{2-k}$. Таким образом, ряд (27) аналогичен $1/c$-разложению, причем последнее из него элементарно извлекается. Отметим однако, что $1/c$-разложение дает неравномерное по расстоянию приближение. Разложение (27) лишено этого недостатка, оно дает равномерное по x приближение, например первое слагаемое справа дает главный член асимптотики при $x\to\infty$ и любом c:

$$\langle j(x)j(0)\rangle \xrightarrow[x\to\infty]{} \langle j(0)\rangle^2 = \left[\int \rho(\lambda)\,d\lambda\right]^2.$$

При $c\to 0$ I_k^d стремится к произведению δ-функций, k-кратный интеграл, выражающий Γ_k (21), явно вычисляется и разложение (27) резко упрощается.

С помощью формул (15), (16), (17) легко вычислить первые три слагаемых в правой части (27), что позволяет, например, вычислить коррелятор токов в пределе сильной связи с точностью до $(1/c)^2$. Обсудим этот предел более подробно. Энергия возбуждения стремится при $c\to\infty$ к

$$\varepsilon(\lambda)=\lambda^2-h(T)+O(1/c^2), \tag{28}$$

$$h(T)=h+\frac{T}{\pi c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\left[1+\exp\left\{\frac{h-\mu^2}{T}\right\}\right]d\mu.$$

Главный член асимптотики вакуумной плотности при $c\to\infty$ имеет вид $\rho(\lambda)\to(2\pi[1+\exp\{(\lambda^2-h)/T\}])^{-1}$. Отношение числа частиц N к длине ящика L стремится к $N/L=\rho_0+O(1/c)$,

$$\rho_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu}{1+\exp\{(\mu^2-h)/T\}}. \tag{29}$$

Более точное выражение для вакуумной плотности имеет вид

$$\rho(\lambda)=\frac{1+\dfrac{2}{c}\rho_0}{2\pi\left[1+\exp\left\{\dfrac{\lambda^2-h(T)}{T}\right\}\right]}+O\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{30}$$

Величина $\vartheta(\lambda)$ стремится к $\vartheta(\lambda)=\vartheta_0(\lambda)+O(1/c)$,

$$\vartheta_0(\lambda)=\frac{1}{1+\exp\left\{\dfrac{\lambda^2-h}{T}\right\}}. \tag{31}$$

Функция $P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})$ (18) при $|t|<c$ имеет вид

$$P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})=\frac{1}{i\pi c}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)[1+2\rho_0/c]- \tag{32}$$

$$-\frac{1}{\pi c^2}\left[\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)\right]^2+O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

а функция $p_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})$ (19) равна

$$p_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)[1+2\rho_0/c]+O\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{33}$$

Вес $\omega(\lambda)$ (22) стремится к

$$\omega(\lambda)=\exp\{-2\rho_0/c\}+O(1/c^2). \tag{34}$$

Используем эти формулы, чтобы вычислить асимптотику коррелятора токов. Главный член асимптотики имеет вид

$$(35)\qquad \frac{\langle\Omega_T|j(x)j(0)|\Omega_T\rangle}{\langle\Omega_T|\Omega_T\rangle}=\rho_0^2-\frac{1}{(2\pi)^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\vartheta_0(\lambda)\,d\lambda\right]^2+O\left(\frac{1}{c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{1+\exp\left\{\frac{\lambda^2-h}{T}\right\}}\right]^2-\frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda x}\,d\lambda}{1+\exp\left\{\frac{\lambda^2-h}{T}\right\}}\right]^2+O\left(\frac{1}{c}\right).$$

С помощью формул (15), (17), (20), (21), (27) можно вычислить уточненное выражение

$$(36)\qquad \frac{\langle\Omega_T|j(x)j(0)|\Omega_T\rangle}{\langle\Omega_T|\Omega_T\rangle}=\frac{1}{4\pi^2}\left[1+4\rho_0/c\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{1+\exp\left\{\frac{\lambda^2-h(T)}{T}\right\}}\right]^2-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial x_r}\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{1+\exp\left\{\frac{\lambda^2-h(T)}{T}\right\}}e^{i\lambda x_r}\right]^2-$$

$$-\frac{1}{2\pi^3c}\int_{R^3}\left[\prod_{j=1}^{3}\vartheta_0(\lambda_j)\,d\lambda_j\right]e^{ix(\lambda_2-\lambda_1)}\left(\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}\right)+O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Последний интеграл доопределен в смысле главного значения, здесь $x_r=x[1+2\rho_0/c]$. Поправка к выражению (36) имеет порядок $(1/c)^2$ при любом x. Отметим, что вычислить остальные члены ряда (27) столь же легко. Это позволит, например, уточнить формулу (36).

В конце обсудим предел низкой температуры. При $T\to 0$ выражение (35) упрощается. При $0<x<\sqrt{h}/T$ и $c=\infty$ коррелятор равен

$$\langle j(x)j(0)\rangle=\left(\frac{q}{\pi}\right)^2-\left(\frac{\sin qx}{\pi x}\right)^2+\frac{T^2}{12q^2}\left[\frac{\sin 2qx}{2qx}-\cos^2 qx\right],$$

здесь $q=\sqrt{h}$. На больших расстояниях $x\gg\sqrt{h}/T$ коррелятор стремится к константе:

$$\langle j(x)j(0)\rangle\to\left(\frac{q}{\pi}\right)^2-\frac{1}{12}\left(\frac{T}{q}\right)^2=\langle j(0)\rangle^2.$$

Отклонение коррелятора от квадрата среднего экспоненциально убывает по расстоянию:

$$\langle j(x)j(0)\rangle-\langle j(0)\rangle^2\sim\exp\left\{-\frac{T\pi}{q}x\right\}.$$

Отметим, что выражение (35) также упрощается при больших температурах:

$$(37)\qquad \langle j(x)j(0)\rangle-\langle j(0)\rangle^2=-\frac{T}{4\pi}\cos^2\left(x\sqrt{\frac{\pi T}{2}}+\frac{\pi}{4}\right)e^{-\sqrt{2\pi T}\,x},$$

здесь

$$\langle j(0)\rangle=\frac{\sqrt{T}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{1+\exp(\lambda^2)}.$$

Формула (37) выполняется при $c=\infty$, $T\to\infty$ и $x>1/\sqrt{T}$, она показывает, что при больших температурах происходит распадение корреляций.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, вычислен коррелятор токов в одномерном бозе-газе в состоянии теплового равновесия. Аналогично вычисляется любой коррелятор в этой модели. Качественно поясним ответ. Любой коррелятор равен среднему значению некоторого оператора O по физическому вакууму $\langle\Omega|O|\Omega\rangle$. Чтобы построить разложение этого коррелятора, следует вычислить среднее значение оператора O по k-частичному собственному состоянию гамильтониана $\langle\Psi_k|O|\Psi_k\rangle$. Неприводимую часть этого среднего следует определить как нулевой коэффициент в псевдополиномиальном представлении, аналогичном (11). Неприводимую часть следует одеть с помощью уравнений, аналогичных (18), и проинтегрировать. Таким образом, получается вклад k-частичных процессов рассеяния в коррелятор над физическим вакуумом.

В рамках этого подхода можно вычислить и разновременные корреляторы, в этом случае $O=\Psi^+(x)\exp\{-iHt\}\Psi(y)$. Отметим, что смысл разложения (24) с точки зрения теории представлений групп обсуждается в работах [15, 16].

В конце предложим некоторые гипотезы: 1) ряд (24), по-видимому, является сходящимся из-за веса $\omega(\lambda)$ (k-частичный процесс подавлен как ω^k), 2) коррелятор токов является функцией ограниченной вариации:

$$0\leqslant\frac{\langle\Omega|j(x_1)j(x_2)|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle}\leqslant\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(\lambda)\,d\lambda\right]^2.$$

Авторы благодарны А. Г. Изергину за обсуждения.

Литература

[1] *Фаддеев Л. Д.* Проблема квантовой теории поля. Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля. Дубна: ОИЯИ, 1979, 249–304.
[2] *Боголюбов Н. Н.*– Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, *11*, № 1, 77–90.
[3] *Березин Ф. А., Похил Г. П., Финкельберг В. М.*– Вестн. МГУ, сер. мат.-мех., 1964, № 1, 21–28.
[4] *McGuire J. B.*– J. Math. Phys., 1964, *5*, № 5, 622–629.
[5] *Склянин Е. К., Фаддеев Л. Д.*– ДАН СССР, 1978, *243*, № 6, 1430–1433.
[6] *Склянин Е. К.*– ДАН СССР, 1978, *244*, № 6, 1337–1341.
[7] *Изергин А. Г., Корепин В. Е., Смирнов Ф. А.*– ТМФ, 1981, *48*, № 3, 319–323.
[8] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*– Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1982, *120*, 69–74; Lett. Math. Phys., 1982, *6*, 283–286.
[9] *Lieb E. H., Liniger W.*– Phys. Rev., 1963, *130*, № 4, 1605–1624.
[10] *Yang C. N., Yang C. P.*– J. Math. Phys., 1969, *10*, № 7, 1115–1122.
[11] *Корепин В. Е.*– ТМФ, 1979, *41*, № 2, 169–189.
[12] *Korepin V. E.*– Commun. Math. Phys., 1982, *86*, 391–418.
[13] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*– Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1984, *133*, 92–112.
[14] *Корепин В. Е.*– Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1984, *133*, 133–145.
[15] *Корепин В. Е.*– ДАН СССР, 1982, *265*, № 6, 1361–1364.
[16] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*– Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, *131*, 80–87.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.IV.1984 г.

CORRELATION FUNCTIONS OF ONE-DIMENSIONAL BOSE-GAS IN THERMODYNAMICAL EQUILIBRIUM

Bogoliubov N. M., Korepin V. E.

Equilibrium thermodynamics of one-dimensional Bose-gas at non-zero temperature is considered. The calculation method of the correlation functions of the system is demonstrated on the simplest example of the currents correlation function. The formulas of the Bethe algebraic ansatz [1] turn out to be particularly useful.