Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Огнева, В. М. Чернышенко, Об одном итерационном процессе с последовательной аппроксимацией обратного оператора, *Матем. заметки*, 1980, том 28, выпуск 5, 785–790

https://www.mathnet.ru/mzm6408

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
28 апреля 2025 г., 03:18:59

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

В. А. Огнева, В. М. Чернышенко

В работе доказана теорема о сходимости итерационного процесса с последовательной аппроксимацией обратного оператора (см., например, [1], [2]) для решения нелинейного операторного уравнения

$$P(x) = 0. \tag{1}$$

Операция $P(x)$ действует из B-пространства X в пространство Y того же типа.

Для реализации рассматриваемого здесь процесса требуется задать начальное приближение x_0 к корню уравнения (1) и линейный оператор w_0^{-1}, аппроксимирующий производную $P'(x_0)$. Предложенный процесс имеет квадратичную скорость сходимости. Определим итерационный процесс формулами

$$x_{n+1} = x_n - w_n P(x_n),$$

$$w_{n+1} = 2w_n - w_n P'(x_{n+1})\, w_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Пусть элемент x_0 и линейный оператор w_0^{-1} удовлетворяют условиям

$$\max\{\| P(x_0) \|, \| w_0^{-1} - P'(x_0) \|\} \leqslant \delta_0, \quad \| w_0 \| \leqslant S_0. \tag{3}$$

Рассмотрим шар S: $\| x - x_0 \| \leqslant R$ и потребуем, чтобы операция $P(x)$ обладала в этом шаре первой и второй

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1980

производными Фреше, причем

$$\| P'(x) \| \leqslant L, \quad \| P''(x) \| \leqslant M \quad (x \in S). \tag{4}$$

Положим

$$\mu = L + \delta_0, \quad h = MS_0^2\delta_0 + S_0\delta_0, \quad \tau = 1 + h,$$

$$\lambda = \mu S_0 h, \quad \nu = 2\,(\mu/(1-\lambda))^3,$$

$$\rho = (1/2)\,\nu S_0^3\,(S_0 + MS_0^2), \; H = \max\,\{h, \rho h\}. \tag{5}$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть в сфере* S: $\| x - x_0 \| \leqslant R$ *операция* $P(x)$ *обладает первой и второй производными Фреше, удовлетворяющими соотношениям* (4), *элементы* x_0 *и* w_0^{-1} *удовлетворяют соотношениям* (3) *и, кроме того, выполнены условия*

$$H\tau^6 < 1, \quad \lambda < 1, \quad \tau^5 S_0\delta_0/(\tau^5 - 1) \leqslant R. \tag{6}$$

Тогда итерационная последовательность $\{x_n\}$, *построенная по* (2), *сходится к корню* x^* *уравнения* (1), *принадлежащему шару* S, *и имеет место оценка*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{S_0\delta_0}{\tau^5 - 1}\,\tau^5 \left(\frac{1}{\tau^5}\right)^n (H\tau^6)^{2^n - 1}\,.$$

Доказательство. С учетом (1), (3) и (5) получаем

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant \| w_0 \| \; \| P(x_0) \| \leqslant S_0\delta_0,$$

$$\| w_0^{-1} \| \leqslant \| P'(x_0) \| + \| P'(x_0) - w_0^{-1} \| \leqslant L + \delta_0 = \mu. \tag{7}$$

Оценим норму $\| w_1 - w_0 \|$. Используя (1) и (2), находим, что

$$\| w_1 - w_0 \| \leqslant \| w_0 \|^2 \,[\| w_0^{-1} - P'(x_0) \| + {} + \| P'(x_1) - P'(x_0) \| \,] \leqslant S_0 h. \tag{8}$$

Дальнейшее доказательство продолжим методом математической индукции. Предположим, что для $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ имеют место следующие утверждения:

1) $x_i \in S$;

2) операторы w_i^{-1} существуют и $\| w_i^{-1} \| \leqslant \mu$;

3) $\| w_i^{-1} - P'(x_i) \| \leqslant (1/\tau^6)^i\,(H\tau^6)^{2^i-1}\delta_0$;

4) $\| w_i \| \leqslant S_0\tau^i$;

5) $\| P(x_i) \| \leqslant (1/\tau^6)^i\,(H\tau^6)^{2^i-1}\,\delta_0$;

6) $\| x_{i+1} - x_i \| \leqslant S_0 \delta_0 (1/\tau^5)^i (H\tau^6)^{2^i-1}$;

7) $\| w_{i+1} - w_i \| \leqslant S_0 h (1/\tau^3)^i (H\tau^6)^{2^i-1}$.

При $n = 0$ справедливость утверждений 1) — 7) вытекает из условий теоремы и соотношений (7), (8).

Покажем, что эти утверждения остаются в силе при переходе от n к $n+1$.

Используя 6), получаем

$$\| x_{n+1} - x_0 \| \leqslant S_0 \delta_0 \sum_{i=0}^{\infty} (1/\tau^5)^i \leqslant S_0 \delta_0 \frac{\tau^5}{\tau^5 - 1} \leqslant R,$$

что означает принадлежность элемента x_{n+1} шару S и, следовательно, справедливость индуктивного утверждения 1) при $i = n + 1$.

Покажем, что оператор $\overset{-1}{w}_{n+1}$ существует. Согласно 2) и 7) имеем

$$\| w_{n+1} - w_n \| \leqslant S_0 h;$$

$$\| \overset{-1}{w}_{n+1} \| \, \| w_{n+1} - w_n \| \leqslant \mu S_0 h = \lambda < 1.$$

Из последнего соотношения и теоремы Банаха [3] следует существование операторов $\overset{-1}{w}_{n+1}$ и $(w_n + \Delta w_n)^{-1}$, где

$$\Delta w_n = t (w_{n+1} - w_n), \qquad t \in [0, 1],$$

и оценка

$$\| (w_n + \Delta w_n)^{-1} \| \leqslant \mu / (1 - \lambda). \tag{9}$$

Имеем далее

$$\| \overset{-1}{w}_{n+1} \| \leqslant L + \| \overset{-1}{w}_{n+1} - P' (x_{n+1}) \|. \tag{10}$$

Оценим норму $\| \overset{-1}{w}_{n+1} - P' (x_{n+1}) \|$. Введем для этого вспомогательную операцию

$$R_i (z) = z^{-1} - P' (x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Первый и второй дифференциалы Фреше этой операции определяются соответственно соотношениями

$$R_i' (z) \Delta_1 z = -z^{-1} \Delta_1 z z^{-1}, \tag{11}$$

$$R_i'' (z) \Delta_1 z \Delta_2 z = z^{-1} \Delta_1 z z^{-1} \Delta_2 z z^{-1} + z^{-1} \Delta_2 z z^{-1} \Delta_1 z z^{-1}.$$

Имеем

$$\overset{-1}{w}_{n+1} - P' (x_{n+1}) = R_{n+1} (w_{n+1}) =$$

$$= R_{n+1} (w_{n+1}) - R_{n+1} (w_n) - R_{n+1}' (w_n) (w_{n+1} - w_n). \tag{12}$$

Соотношение (12) справедливо в силу того, что

$$R_{n+1}(w_n) + R'_{n+1}(w_n)(w_{n+1} - w_n) \equiv 0.$$

Последнее соотношение следует из (2) и (11).

Применяя к (12) аналог формулы Тейлора для операций, получаем с учетом (11), (9), (5) и (7), что

$$\| w_{n+1}^{-1} - P'(x_{n+1}) \| \leqslant (1/2) \sup_{w \in [w_n,\, w_{n+1}]} \| R''_{n+1}(w) \| \, \| w_{n+1} - w_n \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1/2)\, 2 \sup_{t \in [0,1]} \| [w_n + \Delta w_n]^{-1} \|^3 \, \| w_{n+1} - w_n \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (\nu/2) \| w_{n+1} - w_n \|^2 \leqslant (\nu/2) S_0^2 h^2 (1/\tau^6)^n (H\tau^6)^{2^{n+1}-2} \leqslant$$
$$\leqslant \rho h (1/\tau^6)^n (H\tau^6)^{2^{n+1}-2} \delta_0 \leqslant (1/\tau^6)^{n+1} (H\tau^6)^{2^{n+1}-1} \delta_0.$$

Таким образом, мы доказали справедливость утверждения 3) при $i = n + 1$ и, с учетом (10), справедливость индуктивного утверждения 2).

Далее имеем

$$\| w_{n+1} \| \leqslant \| w_n \| + \| w_{n+1} - w_n \| \leqslant$$
$$\leqslant S_0 \tau^n + S_0 h (1/\tau^3)^n (H\tau^6)^{2^n - 1} \leqslant S_0 \tau^n (1 + h) =$$
$$= S_0 \tau^{n+1},$$

что доказывает утверждение 4) при $i = n + 1$.

Переходим к проверке 5). Имеем

$$\| P(x_{n+1}) \| \leqslant \| P(x_{n+1}) - P(x_n) - P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \| +$$
$$+ \| P(x_n) + P'(x_n) w_n P(x_n) \| \leqslant (M/2) \| x_{n+1} - x_n \|^2 +$$
$$+ \| w_n^{-1} - P'(x_n) \| \, \| w_n \| \, \| P(x_n) \|.$$

Используя здесь соотношения 4) — 6), находим

$$\| P(x_{n+1}) \| \leqslant (1/\tau^6)^{n+1} (H\tau^6)^{2^{n+1}-2} \delta_0^2 ((M/2) S_0^2 + S_0) \leqslant$$
$$\leqslant (1/\tau^6)^{n+1} (H\tau^6)^{2^{n+1}-1} \delta_0,$$

что и требовалось установить.

Справедливость 6) вытекает из цепочки соотношений

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| \leqslant \| w_{n+1} \| \quad \| P(x_{n+1}) \| \leqslant$$
$$\leqslant S_0 \tau^{n+1} (1/\tau^6)^{n+1} (H\tau^6)^{2^{n+1}-1} \delta_0 =$$
$$= S_0 \delta_0 (1/\tau^5)^{n+1} (H\tau^6)^{2^{n+1}-1}.$$

Докажем, наконец, что соотношение 7) имеет место при $i = n + 1$.

Используя 1) и 2), находим

$$\| w_{n+2} - w_{n+1} \| \leqslant$$
$$\leqslant \| w_{n+1} \|^2 [\| w_{n+1}^{-1} - P'(x_{n+1}) \| + M \| x_{n+2} - x_{n+1} \|] \leqslant$$
$$\leqslant S_0^2 \tau^{2n+2} [(1/\tau^6)^{n+1} (H\tau^6)^{2^{n+1}-1} \delta_0 +$$
$$+ MS_0\delta_0 (1/\tau^5)^{n+1} (H\tau^6)^{2^{n+1}-1}] \leqslant (1/\tau^3)^{n+1} (H\tau^6)^{2^{n+1}-1} S_0 h.$$

Таким образом, на основании метода полной математической индукции можем утверждать, что соотношения 1)—7) имеют место для любого натурального n.

Используя 7), находим

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant S_0\delta_0 \sum_{i=n}^{\infty} (1/\tau^5)^i (H\tau^6)^{2^i-1} \leqslant$$
$$\leqslant S_0\delta_0 (1/\tau^5)^n (H\tau^6)^{2^n-1} \tau^5/(\tau^5 - 1). \quad (13)$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. В силу полноты пространства X существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Переходя в (13) к пределу при $p \to \infty$, получаем оценку

$$\| x^* - x_n \| \leqslant S_0\delta_0 (1/\tau^5)^n (H\tau^6)^{2^n-1}\tau^5/(\tau^5 - 1).$$

С помощью предельного перехода в 5) устанавливаем, что $P(x^*) = 0$, т. е. x^* — корень уравнения (1).

Теорема полностью доказана.

Замечание. Покажем в заключение, что

$$\lim_{n\to\infty} w_n = [P'(x^*)]^{-1}. \quad (14)$$

В самом деле, существование предела $w^* = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ следует из 7) и полноты банахова пространства линейных операторов. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении (2), получаем

$$w^* [I - P'(x^*) w^*] = 0, \quad [I - w^*P'(x^*)] w^* = 0, \quad (15)$$

где I — единичный оператор.

Из теоремы Банаха [3] следует, что оператор w^* как предел последовательности линейных операторов, имеющих обратные, обратим, т. е. $[w^*]^{-1}$ существует. С учетом последнего утверждения мы приходим к эквивалентности соотношений (14) и (15). Наконец, используя 7), находим

$$\| w_{n+p} - w_n \| \leqslant S_0 h (1/\tau^3)^n (H\tau^6)^{2^n-1}\tau^3/(\tau^3 - 1);$$
$$\| w^* - w_n \| \leqslant S_0 h (1/\tau^3)^n (H\tau^6)^{2^n-1}\tau^3/(\tau^3 - 1).$$

Таким образом, мы установили, что последовательность $\{w_n\}$ сходится к $[P'(x^*)]^{-1}$ с квадратичной скоростью сходимости.

Днепропетровский государственный университет

Поступило 11.X.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ульм С. Ю., Об итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора, Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем., 16, № 4 (1967), 401—411.
[2] Огнева В. А., Чернышенко В. М., Об одном аналоге метода хорд в пространстве Банаха, Матем. заметки, 8, № 4 (1970), 487—492.
[3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, М., «Наука», 1977.