И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин, Еще один конструктивный вариант теоремы Коши, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 20, 36–39

И.Д.Заславский, Г.С.Цейтин

ЕЩЕ ОДИН КОНСТРУКТИВНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ КОШИ

Будем употреблять буквы x , y , z , u (возможно, с индексами) в качестве переменных для конструктивных вещественным чисел, букву n - для натуральных чисел. Символом $(x::y)$ будем обозначать интервал $(\min(x,y), \max(x,y))$ (мы рассматриваем также пустые интервалы вида (x,x)).

Теорема. Пусть конструктивная функция f определена на сегменте $[x_1, x_2]$, а конструктивная функция g - на сегменте $[y_1, y_2]$ и пусть интервалы $(f(x_1) :: f(x_2))$ и $(g(y_1) :: g(y_2))$ имеют общую точку. Тогда можно построить такое x из $[x_1, x_2]$ и такое y из $[y_1, y_2]$, что

$$f(x) = g(y).$$

Лемма I. Если два интервала имеют общую точку, то они имеют общую рациональную точку.

Доказательство очевидно.

Лемма 2. Для любого интервала $\mathfrak{J}$ и любых x , y , z из того, что интервалы $(x::y)$ и $(y::z)$ не имеют общих точек с $\mathfrak{J}$,следует, что интервал $(x::z)$ не имеет общих точек с $\mathfrak{J}$.

Доказательство. Предположим, что интервал $(x::z)$ имеет общую точку u с интервалом $\mathfrak{J}$, и сведем это предположение к противоречию перебором различных случаев взаимного расположения точек x, y, z и u .

Доказательство теоремы. Пусть выполнены условия теоремы. Будем строить числовые последовательности X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 , такие что сегменты $[X_1(n), X_2(n)]$ лежат в $[x_1, x_2]$ и образуют последовательность вложенных сегментов с длинами, стремящимися к нулю, сегменты $[Y_1(n), Y_2(n)]$ лежат в $[y_1, y_2]$ и также образуют последовательность вложенных сегментов с длинами, стремящимися к нулю и, кроме того, при всяком n интервалы

$$(f(X_1(n)) :: f(X_2(n)))$$

и

$$(g(Y_1(n)) :: g(Y_2(n)))$$

имеют общую точку (далее эти интервалы будут обозначаться соответственно через F_n и G_n).

Для краткости вместо построения алгорифмов X_1, X_2, Y_1 и Y_2 опишем способ последовательного построения упомянутых сегментов. Полагаем $X_i(0) = x_i$, $Y_i(0) = y_i$ (здесь и далее i = 1,2). Пусть при некотором n уже построены сегменты $[X_1(n), X_2(n)]$ и $[Y_1(n), Y_2(n)]$ и пусть интервалы F_n и G_n имеют общую точку. Положим $\bar{X}_n = \frac{1}{2}\cdot(X_1(n) + X_2(n))$ и рассмотрим два интервала:

$$F'_n = (f(X_1(n)) :: f(\bar{X}_n)),$$

$$F''_n = (f(\bar{X}_n) :: f(X_2(n))).$$

Ввиду леммы 2 не может быть, чтобы ни один из них не имел общей точки с G_n , откуда по лемме 1 следует, что не может быть, чтобы ни F'_n , ни F''_n не имел с G_n общей рациональной точки. С другой стороны, множества общих рациональных точек F'_n с G_n и F''_n с G_n перечислимы, поэтому, согласно принципу А.А.Маркова, мы найдем рациональную точку, принадлежащую одновременно F'_n и G_n, или рациональную точку, принадлежащую одновременно F''_n и G_n. В первом случае в качестве сегмента $[X_1(n+1), X_2(n+1)]$ берем $[X_1(n), \bar{X}_n]$, во втором – $[\bar{X}_n, X_2(n)]$. Затем аналогичным способом строим сегмент $[Y_1(n+1), Y_2(n+1)]$ (разница лишь в том, что вместо интервала G_n используем F_{n+1} , а не F_n).

Последовательности X_1 и X_2 имеют общий предел, который обозначим через x ; соответственно общий предел последовательностей Y_1 и Y_2 обозначим через y . Тогда $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$ и

$$f(X_i(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x),$$

$$g(Y_i(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(y).$$

Если $f(x) \neq g(y)$, то, начиная с некоторого n ,

$$|f(X_i(n)) - f(x)| < \frac{1}{3} \cdot |f(x) - g(y)|,$$

$$|g(Y_i(n)) - g(y)| < \frac{1}{3} \cdot |f(x) - g(y)|,$$

и тогда интервалы F_n и G_n не имеют общих точек, что невозможно. Итак, неверно, что $f(x) \neq g(y)$. Теорема доказана.

Замечание. Можно избежать использования принципа А.А.Маркова на каждом шаге описанного выше процесса, если вместо лемм I и 2 использовать следующее утверждение: для любого интервала $\mathcal{J}$ и любых x , y , z и n , если интервал $(x::z)$ имеет с интервалом $\mathcal{J}$ две общих рациональных точки, расстояние между которыми равно 2^{-n} , то хотя бы один из двух интервалов $(x::y)$ и $(y::z)$ имеет с $\mathcal{J}$ две общих рациональных точки, расстояние между которыми равно 2^{-n-2} (для доказательства достаточно рассмотреть рациональные приближения x , y и z с точностью до 2^{-n-3}).

Следствие. Если конструктивная функция f определена на сегменте $[x_1, x_2]$ и u таково, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| > |u|,$$

то можно построить такие z_1 и z_2 из $[x_1, x_2]$, что

$$f(z_1) - f(z_2) = u.$$

Доказательство. Определим функцию g на $[x_1, x_2]$ равенством

$$g(x) = f(x) - u.$$

Тогда интервалы $(f(x_1) :: f(x_2))$ и $(g(x_1) :: g(x_2))$ имеют общую точку. Остается применить теорему.