

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ НАСЫЩЕНИЯ

В. В. Жук, Г. И. Натансон

Решается следующая задача. Дан класс функций K . Требуется указать насыщенный процесс приближения, для которого K является классом насыщения. Библи. 8 назв.

Как известно, процесс приближения $\{U_n\}$ называется *насыщенным с порядком насыщения* $\varphi(n)$, если для всех функций из рассматриваемого пространства, отличных от постоянной $*$), справедливо неравенство

$$\|f - U_n(f)\| \geq a_f \varphi(n), \quad (1)$$

где $a_f > 0$, и найдется такая отличная от постоянной функция, что

$$\|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n)). \quad (2)$$

Множество функций, удовлетворяющих условию (2), называется *классом насыщения*.

Ряд математиков (Ж. Фавар, Г. Алексич, М. Заманский, Ф. И. Харшиладзе, А. Х. Турецкий, Р. Г. Мамедов и др.) рассматривал так называемую проблему насыщения:

Дан процесс приближения. Требуется установить, насыщен ли он, и, если это так, то найти порядок и класс насыщения.

В настоящей работе решается обратная задача:

Дан класс функций K . Требуется указать насыщенный процесс приближения, для которого K является классом насыщения.

*) Вместо подпространства констант иногда фигурируют и другие конечномерные подпространства.

Мы будем называть оператор U_n , определяющий такой процесс, насыщающим оператором класса K .

Условимся о следующем:

\tilde{C} — пространство непрерывных 2π -периодических функций с обычной нормировкой; рассматриваемые функции принадлежат \tilde{C} , и операторы действуют из \tilde{C} в множество тригонометрических полиномов.

$E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n .

$S_n(f; x)$ есть n -я частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f (иногда будем опускать x и писать $S_n(f)$, это относится и к другим операторам).

$\omega_k(f, \delta)$ есть k -й модуль гладкости функции f .

\tilde{f} — функция, тригонометрически сопряженная с f .

$\varphi(n)$ — строго положительная невозрастающая функция, $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Доказательства наших теорем строятся по одному и тому же плану. Сначала мы доказываем, что K есть класс насыщения введенного процесса (в предположении, что порядок насыщения равен $\varphi(n)$). Для этого показывается:

$$A) f \in K \Rightarrow \|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n));$$

$$B) \|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n)) \Rightarrow f \in K.$$

Далее устанавливается, что $\varphi(n)$ действительно есть порядок насыщения, т. е. выполнено (1). Для этого достаточно показать:

С. Если $\|f - U_{n_i}(f)\| = O(\varphi(n_i))$ для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}$ натурального ряда, то $f \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K = \{f : E_n(f) = O(\varphi(n))\}$, где функция $\varphi(n)$ удовлетворяет дополнительному условию $\varphi(n) = O(\varphi(2n))$. Насыщающим оператором для класса K будет

$$U_n(f) = (1 + \varphi(n))\tau_n(f),$$

где

$$\tau_n(f) = n^{-1} \sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f)$$

— оператор Валле-Пуссена.

Доказательство. А) $E_n(f) = O(\varphi(n))$. Так как $\|\tau_n(f)\| \leq 3\|f\|$ и $\|f - \tau_n(f)\| \leq 4E_n(f)$ (см., например, [1], стр. 211), то

$$\|f - U_n(f)\| \leq 4E_n(f) + 3\varphi(n)\|f\| = O(\varphi(n)).$$

В) $\|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n))$. Тогда
 $E_{2n}(f) \leq E_{2n-1}(f) \leq \|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n)) =$
 $= O(\varphi(2n)) = O(\varphi(2n - 1))$.

С) $\|f - U_{n_l}(f)\| = o(\varphi(n_l))$. Поскольку при $\nu \leq n_l$ будет $a_\nu(\tau_{n_l}(f)) = a_\nu(f)$, где $a_\nu(f)$ — косинус-коэффициент Фурье функции f , то для этих n_l

$$\begin{aligned} \varphi(n_l) |a_\nu(f)| &= \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_{n_l}(f; x)] \cos \nu x \, dx \right| = o(\varphi(n_l)), \end{aligned}$$

т. е. $a_\nu(f) = 0$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$). Аналогично синус-коэффициенты $b_\nu(f) = 0$. Таким образом, $f \equiv 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K = \{f : \omega_k(f, 1/n) = O(\varphi(n))\}$. Насыщающим оператором будет

$$U_n(f) = (1 - \varepsilon_k \varphi(n)) B_n^{[k]}(f).$$

Здесь

$$B_n^{[k]}(f; x) = S_n(f; x) + 2^{-k} \sum_{\mu=0}^k C_k^\mu S_n(f; x + \mu\pi/n) (-1)^{\mu+1}$$

— оператор Р. М. Тригуба, обобщающий известный оператор С. Н. Бернштейна, $\varepsilon_k = \cos k\pi/2 + \sin k\pi/2$.

Доказательство. Воспользуемся найденными Р. М. Тригубом [2] соотношениями

$$\begin{aligned} \|f - B_n^{[k]}(f)\| &= O(\omega_k(f, 1/n)), \\ \omega_k(f, 1/n) &= O(\|f - B_n^{[k]}(f)\|). \end{aligned}$$

А) $\omega_k(f, 1/n) = O(\varphi(n))$. В силу того, что $\|B_n^{[k]}(f)\| = O(\|f\|)$, имеем

$$\begin{aligned} \|f - U_n(f)\| &\leq \|f - B_n^{[k]}(f)\| + \varphi(n) \|B_n^{[k]}(f)\| = \\ &= O(\omega_k(f, 1/n)) + \varphi(n) \|f\| = O(\varphi(n)). \end{aligned}$$

В) $\|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n))$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_k(f, 1/n) &= O(\|f - B_n^{[k]}(f)\|) = O(\|f - U_n(f)\| + \\ &+ \varphi(n) \|B_n^{[k]}(f)\|) = O(\varphi(n)). \end{aligned}$$

С) $\|f - U_{n_l}(f)\| = o(\varphi(n_l))$. Запишем $B_n^{[k]}(f)$ в комплексной форме:

$$B_n^{[k]}(f; x) = \sum_{\nu=-n}^n (1 - \lambda_\nu^{(n)}) c_\nu e^{i\nu x},$$

где

$$\lambda_\nu^{(n)} = \left(\frac{1 - e^{i\nu\pi/n}}{2} \right)^k, \quad c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

Ясно, что при $0 < \nu \leq n_l$

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_{n_l}(f; x)] (\bar{c}_\nu e^{-i\nu x} + \bar{c}_{-\nu} e^{i\nu x}) dx \right| = o(\varphi(n_l))$$

или, поскольку $|c_\nu| = |c_{-\nu}|$,

$$c_\nu |^2 |\lambda_\nu^{(n_l)} + \lambda_{-\nu}^{(n_l)} + \varepsilon_k \varphi(n_l) (2 - \lambda_\nu^{(n_l)} - \lambda_{-\nu}^{(n_l)})| = o(\varphi(n_l)).$$

Но $\lambda_\nu^{(n_l)} = \lambda_{-\nu}^{-(n_l)}$, $\arg \lambda_\nu^{(n_l)} = k(\nu\pi/2n_l - \pi/2)$. Будем считать n_l столь большим, что $k\nu\pi/2n_l < \pi/2$. Тогда

$$\text{sign}(\lambda_\nu^{(n_l)} + \lambda_{-\nu}^{(n_l)}) = \text{sign} \text{Re} e^{i(k\nu\pi/2n_l - k\pi/2)} = \varepsilon_k.$$

Кроме того, $2 - \lambda_\nu^{(n_l)} - \lambda_{-\nu}^{(n_l)} > 0$. Значит,

$$c_\nu |^2 [|\lambda_\nu^{(n_l)} + \lambda_{-\nu}^{(n_l)}| + \varphi(n_l)(2 - \lambda_\nu^{(n_l)} - \lambda_{-\nu}^{(n_l)})] = o(\varphi(n_l)).$$

Отсюда $|c_\nu|^2 (2 - \lambda_\nu^{(n_l)} - \lambda_{-\nu}^{(n_l)}) = o(1)$. Так как

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_\nu^{(n_l)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_{-\nu}^{(n_l)} = 0,$$

то $c_\nu = c_{-\nu} = 0$ при $\nu > 0$. Равенство $c_0 = 0$ доказывается еще проще. Итак, все коэффициенты Фурье функции f равны 0, т. е. $f \equiv 0$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$K = \{f : \omega_k(\tilde{f}, 1/n) = O(\varphi(n)),$$

где функция φ такова, что каждое из соотношений

$$E_n(f) = O(\varphi(n)), \quad E_n(\tilde{f}) = O(\varphi(n))$$

влечет другое*). Насыщающими операторами для класса K будут

$$U_n(f) = (1 - \varphi(n))Z_n^{[k]}(f), \quad k \equiv 1 \pmod{2},$$

$$U_n(f) = (1 - \varphi(n))D_n^{[k]}(f), \quad k \equiv 0 \pmod{2}.$$

Здесь

$$Z_n^{[k]}(f; x) = \sum_{\nu=0}^n [1 - (\nu/n)^k] (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$$D_n^{[k]}(f; x) = \sum_{\nu=-n}^n \left[1 - \left(\frac{|\nu|}{n} \right)^{k-1} \frac{1 - e^{i\nu\pi/n}}{2} \right] c_\nu e^{i\nu x}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай нечетного k .

А) $\omega_k(\tilde{f}, 1/n) = O(\varphi(n))$. Тогда по обобщенной теореме Джексона $E_n(\tilde{f}) = O(\varphi(n))$, откуда $E_n(f) = O(\varphi(n))$. Но **)

$$\|f - Z_n^{[k]}(f)\| = O(E_n(f) + \omega_k(\tilde{f}, 1/n)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f - U_n(f)\| &= O(E_n(f) + \omega_k(\tilde{f}, 1/n) + \\ &\quad + \varphi(n)\|Z_n^{[k]}(f)\|) = O(\varphi(n)). \end{aligned}$$

ибо

$$\|Z_n^{[k]}(f)\| = O(\|f\|).$$

В) $\|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n))$. Так как (см. [6])

$$\omega_k(\tilde{f}, 1/n) = O(E_n(\tilde{f}) + \|f - Z_n^{[k]}(f)\|),$$

то, учитывая, что $E_n(\tilde{f}) = O(\varphi(n))$, получим

$$\begin{aligned} \omega_k(\tilde{f}, 1/n) &= O(E_n(\tilde{f}) + \|f - U_n(f)\| + \\ &\quad + \varphi(n)\|Z_n^{[k]}(f)\|) = O(\varphi(n)). \end{aligned}$$

С) $\|f - U_{n_l}(f)\| = o(\varphi(n_l))$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a_\nu [1 - (1 - \varphi(n_l))(1 - (\nu/n_l)^k)] &= \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_{n_l}(f; x)] \cos \nu x dx \right| = o(\varphi(n_l)), \end{aligned}$$

*) Как показала Н. К. Бари [3], это будет выполнено, если $\sum_{k=n}^{\infty} \varphi(k)/k = O(\varphi(n))$.

**) Случай $k = 1$ исследован С. Б. Стечкиным [4]. Случай $k > 1$ см. в [5].

т. е.

$$|a_v|[(v \setminus n_l)^k + \varphi(n_l)(1 - (v \setminus n_l)^k)] = o(\varphi(n_l)),$$

откуда $a_v = 0$.

Точно так же $b_v = 0$. Таким образом, $f \equiv 0$.

Перейдем к случаю четного k .

А) $\omega_k(\tilde{f}, 1/n) = O(\varphi(n))$. По-прежнему $E_n(f) = O(\varphi(n))$. Так как для любого тригонометрического полинома T_n порядка не выше n будет

$$\begin{aligned} \|B_n^{[1]}(T_n) - T_n\| &\leq \frac{\pi}{2n} \|T_n'\|, \\ \|Z_n^{[k-1]}(T_n) - T_n\| &= n^{-k+1} \|\tilde{T}_n^{(k-1)}\|, \end{aligned} \quad (3)$$

то из леммы § 5 работы [7] следует

$$\|D_n^{[k]}(T_n) - T_n\| \leq \frac{\pi}{2n^k} \|\tilde{T}_n^{(k)}\|.$$

Применяя теорему из работы [6], найдем

$$\|D_n^{[k]}(f) - f\| = O(E_n(f) + \omega_k(\tilde{f}, 1/n)).$$

Остальное аналогично случаю нечетного k .

В) $\|f - U_n(f)\| = O(\varphi(n))$. Из известного неравенства (см., например, [8], стр. 228)

$$n^{-1} \|T_n'\| \leq \frac{1}{2} \left\| T_n\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - T_n(x) \right\| = \|B_n^{[1]}(T_n) - T_n\|$$

и формулы (3) на основании цитированной леммы заключаем, что

$$\|D_n^{[k]}(T_n) - T_n\| \geq n^{-k} \|\tilde{T}_n^{(k)}\|.$$

С помощью теоремы из статьи [6] получаем отсюда

$$n\omega_{k+1}(\tilde{F}, 1/n) = O(\|D_n^{[k]}(f) - f\|),$$

где \tilde{F} — первообразная функции \tilde{f} . Затем, как показано в [7],

$$\omega_k(\tilde{f}, 1/n) = O(E_n(\tilde{f}) + n\omega_{k+1}(\tilde{F}, 1/n)).$$

Таким образом,

$$\omega_k(\tilde{f}, 1/n) = O(E_n(\tilde{f}) + \|D_n^{[k]}(f) - f\|).$$

Дальнейшее ясно.

С) $\|f - U_{n_l}(f)\| = o(\varphi(n_l))$. Имеем отсюда при $0 \leq \nu \leq n_l$

$$\rho = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_{n_l}(f; x)] [\bar{c}_\nu e^{-i\nu x} + \bar{c}_{-\nu} e^{i\nu x}] dx \right| = o(\varphi(n_l)).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \rho &= \left| |c_\nu|^2 \left\{ 1 - (1 - \varphi(n_l)) \left[1 - \left(\frac{\nu}{n_l}\right)^{k-1} \frac{1 - e^{i\nu\pi/n_l}}{2} \right] \right\} + \right. \\ &\quad \left. + |c_{-\nu}|^2 \left\{ 1 - (1 - \varphi(n_l)) \left[1 - \left(\frac{\nu}{n_l}\right)^{k-1} \frac{1 - e^{-i\nu\pi/n_l}}{2} \right] \right\} \right| = \\ &= 2|c_\nu|^2 \left[\left(\frac{\nu}{n_l}\right)^{k-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n_l} + \varphi(n_l) \left(1 - \left(\frac{\nu}{n_l}\right)^{k-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n_l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|c_\nu|^2 (1 - (\nu/n_l)^{k-1} \sin^2 \nu\pi/2n_l) = o(1).$$

Значит, $c_\nu = 0$ и $f \equiv 0$.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что все факты, на которые мы опирались при доказательстве наших теорем, справедливы также в пространстве \tilde{L} -суммируемых 2π -периодических функций. Далее, нигде в доказательствах мы не использовали специфики пространства \tilde{C} . Поэтому утверждения теорем останутся в силе, если заменить $E_n(f)$ на $E_n(f)_{\tilde{L}}$, $\omega_k(f, \delta)$ на $\omega_k(f, \delta)_{\tilde{L}}$ и соответствующим образом понимать насыщение.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило
29.V.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.
- [2] Тригуб Р. М., О λ -суммах Фурье. Сб. «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций», Баку, 1965, стр. 389—396.
- [3] Барн Н. К., О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., 19 (1955), 285—302.

- [4] С т е ч к и н С. Б., О приближении периодических функций суммами Фейера, Труды Матем. ин-та АН СССР, 62 (1961), 48—60.
- [5] Ж у к В. В., О приближении 2π -периодической функции значениями некоторого ограниченного полуаддитивного оператора, I. Вестник Ленингр. ун-та, № 1 (1967), 21—35.
- [6] Ж у к В. В., О приближении периодических функций линейными методами суммирования рядов Фурье, Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, Новгород, 1967, стр. 202—210.
- [7] Ж у к В. В., О приближении 2π -периодической функции линейным оператором, Сб. «Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций», Ленинград, 1965, стр. 93—115.
- [8] Т и м а н А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.