A. A. Tkachenko, S. A. Shabrov, About solvability of integro-differential equation with extended Stieltjes integral, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2007, Volume 7, Issue 2, 36–39

DOI: 10.18500/1816-9791-2007-7-2-36-39

Доказательство следует из единственности решения однородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

Таким образом, функции $\varphi(x), \psi(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, т.е. базис в пространстве таких решений. С помощью этой системы $\{\varphi, \psi\}$ при любых условиях на концах соответствующее решение уравнения (3) наверняка представимо при надлежащем выборе C_1, C_2 в виде $u(x) = z(x) + C_1\varphi(x) + C_2\psi(x)$, где $z(x)$ — решение уравнения (3), обеспечиваемое теоремой 1.

Теорема 2. *Для однозначной разрешимости уравнения* (3) *при любом* $F(x) \in BV$ *и при любых значениях на концах необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение* (3) *(при* $F(x) \equiv 0$*) и условиях* (2) *имело только тривиальное решение* $u(x) \equiv 0$.

Теорема 3. *Для однозначной разрешимости вариационной задачи* (2), (4) *достаточно, чтобы функция* $Q(x)$ *была неубывающей.*

Доказательство. Покажем, что однородное уравнение (3) (при $F(x) \equiv 0$)при условиях (2) имеет только тривиальное решение. Пусть $u_0(x)$ — нетривиальное решение уравнения $(pu')(x) = \int\limits_0^x u\,dQ$ при условиях (2). Пусть для определенности $u_0(\tau) > 0$ всюду на промежутке $[0, \tau]$. Тогда, так как $u_0'(\tau) = 0$, мы должны иметь $\int\limits_0^\tau u(s)\,dQ(s) = 0$, откуда в силу неубывания Q мы получаем противоречие с неравенством $u(x) > 0$ при $0 < x < \tau$. □

В заключение отметим, что введенное нами пространство E является банаховым по норме

$$\|u\| = \sup_{[o,\ell]} |u(x)| + V_0^\ell[pu'(x)].$$

Доказательство этого факта существенно опирается на классические теоремы Хелли и ввиду достаточной деликатности в сочетании с громоздкостью в данной работе не приводится.

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В.* О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче // Докл. АН. 2002. Т. 383, № 5. С. 1–4.
2. *Кац И.С., Крейн М.Г.* О спектральных функциях струны // Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
3. *Алексеев В.М., Тихонов В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат.лит., 1979. 432 с.
4. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны // Изв. вузов. Северокавказ. регион. Естественные науки. Математика и механика сплошной среды. 2004. Спецвыпуск. С. 186–191.
5. *Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A.* Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation With Generalised Coefficient // J. of Mathematical Sciences. 2004. V. 119, № 6. P. 769–787.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

УДК 517.923

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСШИРЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

А.А. Ткаченко, С.А. Шабров

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: 191180@mail.ru, shabrov_s_a@info.vsu.ru

В работе доказывается разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стилтьеса.

About Solvability of Integro-Differential Equation with Extended Stieltjes Integral

A.A. Tkachenko, S.A. Shabrov

In the paper are proved solvability of initial-value problem for integro-differential equation with Stieltjes integral.

В работе изучается вопрос о разрешимости интегро-дифференциального уравнения

$$-pu_\mu'(x) + \int\limits_0^x u d[Q] = F(x) - F(0) - pu_\mu'(0) \quad (x \in \overline{[0,1]}_2^\mu) \tag{1}$$

в форме задачи Коши. В уравнении $p(x)$ ($\inf p > 0$), $Q(x)$ и $F(x)$ являются функциями ограниченной вариации. Подобное уравнение возникает при моделировании малых деформаций разорванной струны, концы которой имеют упругое сочленение с помощью пружин (см., напр., [3, 4]).

Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. Пусть $J_\mu = [0,1]\backslash S(\mu)$. Введем на J_μ метрику $\rho(x,y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство (J_μ, ρ), очевидно, не является полным. Обозначим через $\overline{[0,1]}^\mu$ его стандартное пополнение по метрике ρ. При таком пополнении каждая точка ξ из $S(\mu)$ превращается в собственные элементы, которые ранее были предельными, обозначаемые нами через $\xi - 0$ и $\xi + 0$. Пусть $\overline{[0,1]}^\mu_1 = \overline{[0,1]}^\mu \bigcup S(\mu)$. Множество $\overline{[0,1]}^\mu_2$ получается из $\overline{[0,1]}^\mu_1$ заменой каждой точки $\xi \in S(\mu)$ на пару собственных элементов τ_1^ξ и τ_2^ξ, причем будем считать, что $\xi - 0 < \tau_1^\xi < \tau_2^\xi < \xi + 0$.

Производная $u'_\mu(x)$ определена на $\overline{[0,1]}^\mu_2$, причем для точек $\xi \in S(\mu)$

$$u'_\mu(\tau_1^\xi) = \frac{u(\xi) - u(\xi-0)}{\mu(\xi) - \mu(\xi-0)} \qquad \text{и} \qquad u'_\mu(\tau_2^\xi) = \frac{u(\xi+0) - u(\xi)}{\mu(\xi+0) - \mu(\xi)}.$$

Интеграл в (1) понимается как π–интеграл и задается следующим образом:

$$\int\limits_\alpha^\beta v\,d[u] = \int\limits_\alpha^\beta v\,du_0 + \sum_{\substack{\alpha<s\le\beta \\ s\in S(u)}} v(s-0)(u(\tau_1^s) - u(s-0)) +$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha\le s\le\beta \\ s\in S(u)}} v(s)(u(\tau_2^s) - u(\tau_1^s)) + \sum_{\substack{\alpha\le s<\beta \\ s\in S(u)}} v(s+0)(u(s+0) - v(\tau_2^s)),$$

где $v \in \overline{[0,1]}^\mu_1$, $u \in \overline{[0,1]}^\mu_2$, u_0 – непрерывная часть u, точки $\alpha, \beta \in \overline{[0,1]}^\mu_2$.

Подобный интеграл впервые был введен Ю.В. Покорным [1], [2] и получил дальнейшее свое развитие и применение в работах [3], [4].

Заметим, что уравнение (1) в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ реализуется в виде равенств

$$\begin{gathered} -[(pu'_\mu)(\tau_1^\xi) - (pu'_\mu)(\xi-0)] + u(\xi-0)[Q(\tau_1^\xi) - Q(\xi-0)] = F(\tau_1^\xi) - F(\xi-0), \\ -[(pu'_\mu)(\tau_2^\xi) - (pu'_\mu)(\tau_1^\xi)] + u(\xi)[Q(\tau_2^\xi) - Q(\tau_1^\xi)] = F(\tau_2^\xi) - F(\tau_1^\xi), \\ -[(pu'_\mu)(\xi+0) - (pu'_\mu)(\tau_2^\xi)] + u(\xi+0)[Q(\xi+0) - Q(\tau_2^\xi)] = F(\xi+0) - F(\tau_2^\xi). \end{gathered} \tag{2}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Для любой точки $x_0 \in \overline{[0,1]}^\mu_2 \backslash S(\mu)$ и любых чисел u_0, v_0 задача*

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x u d[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'_\mu(x_0) = v_0 \end{cases} \tag{3}$$

имеет единственное значение.

Доказательство. В случае, когда $Q(x) \equiv \mathrm{const}$, разрешимость задачи (3) очевидна. Пусть $Q(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Рассмотрим два случая, когда множество $S(\mu)$ точек разрыва функции $\mu(x)$ конечно и когда $S(\mu)$ счетно. Пусть $S(\mu)$ конечно, т.е. $S(\mu) = \{0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < 1\}$.

Уравнение (1) нам удобно заменить эквивалентным уравнением

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^x \left(\frac{1}{p(t)} \int\limits_{x_0}^t u(s) d[Q(s)] \right) d\mu(t) + z(x),$$

где $z(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^x \frac{p(x_0) - F(t) + F(x_0)}{p(t)} d\mu(t)$. В последних двух (и последующих) равенствах внешние интегралы (по μ) понимаются по Лебегу–Стилтьесу.

Разрешимость последнего уравнения эквивалентна разрешимости уравнения $u = Au + z$ с оператором $(Au)(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{p(t)} \left(\int\limits_{x_0}^{t} u(s)d[Q(s)] \right) d\mu(t)$, действующим из $C(\overline{[0,1]}_1^{\mu})$ в $C(\overline{[0,1]}_1^{\mu})$, где $C(\overline{[0,1]}_1^{\mu})$ — пространство μ-непрерывных на $\overline{[0,1]}_1^{\mu}$ функций.

Покажем, что для любых двух функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, определенных на $\overline{[0,1]}_2^{\mu}$, выполняется неравенство

$$|A(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \le \frac{V_0^1(Q)}{\min\limits_{x \in \overline{[0,1]}_1^{\mu}} p(x)} |\mu(x) - \mu(x_0)| \cdot \max_{s \in [x_0, x]} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|, \tag{4}$$

где $V_0^1(Q)$ — полная вариация $Q(x)$ на $\overline{[0,1]}_2^{\mu}$. Имеем

$$|A(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{p(t)} \int\limits_{x_0}^{t} (\varphi_1 - \varphi_2)(s) d[Q(s)] d\mu(t) \right| \le \frac{1}{\min\limits_{x \in \overline{[0,1]}_2^{\mu}} p(x)} \max_{s \in [x_0, x]} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \times$$

$$\times \int\limits_{x_0}^{x} \left| \int\limits_{x_0}^{t} d[Q(s)] \right| d\mu(t) \le \frac{V_0^1(Q)}{\min\limits_{x \in \overline{[0,1]}_2^{\mu}} p(x)} |\mu(x) - \mu(x_0)| \cdot \max_{s \in [x_0, x]} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|.$$

Пусть $x_0 \in [\xi_i + 0, \xi_{i+1} - 0]$ и $\varepsilon = \frac{p_0}{2V_0^1(Q)}$, где $p_0 = \inf\limits_{\overline{[0,1]}_2^{\mu}} p > 0$. Так как функция $\mu(x)$ строго монотонно возрастает и непрерывна на $[\xi_i + 0, \xi_{i+1} - 0]$, то существует такое разбиение множества $[\xi_i + 0, \xi_{i+1} - 0]$ точками $\xi_i = x_0^{\xi_i} < x_1^{\xi_i} < \ldots < x_{n_i}^{\xi_i} = \xi_{i+1} - 0$, из $\overline{[0,1]}_2^{\mu} \backslash S(\mu)$, что $0 < \mu(x_{j+1}^{\xi_i}) - \mu(x_j^{\xi_i}) < \varepsilon$ для всех $j = 0, \ldots, n_j - 1$. Тогда $x_0 \in [x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]$ при некотором k. Воспользовавшись теперь неравенством (4) получаем, что для всех $x \in [x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]$ справедливо неравенство

$$|Au(x)| \le \frac{1}{p_0} \max_{[x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]} |u(x)| V_0^1(Q)(\mu(x_{k+1}^{\xi_i}) - \mu(x_k^{\xi_i})) < \frac{1}{2}\|u\|.$$

Следовательно, оператор A является сжимающим, и уравнение $u = Au + z$ разрешимо в $C([x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}])$ — пространстве μ-непрерывных на $[x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]$ функций. Обозначим через $\varphi(x)$ решение уравнения на этом отрезке.

Рассмотрим отрезок $[x_{k+1}^{\xi_i}, x_{k+2}^{\xi_i}]$, примыкающий к $[x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]$ справа. Поставим теперь задачу Коши в точке $x_{k+1}^{\xi_i}$:

$$\begin{cases} u(x_{k+1}^{\xi_i}) = \varphi(x_{k+1}^{\xi_i}), \\ u'_{\mu}(x_{k+1}^{\xi_i}) = \varphi'_{\mu}(x_{k+1}^{\xi_i}). \end{cases} \tag{5}$$

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что в $C([x_{k+1}^{\xi_i}, x_{k+2}^{\xi_i}])$ оператор A также будет сжимающим, следовательно, существует решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (5). Продолжим этот процесс вправо до тех пор, пока не достигнем точки $x = \xi_{i+1}$. Тогда после проведения описанной выше процедуры нам становятся известны значения $\varphi(\xi_{i+1} - 0)$ и $\varphi'_{\mu}(\xi_{i+1} - 0)$. Воспользовавшись формулами (2) получаем значения для $\varphi(\xi_{i+1} + 0)$ и $\varphi'_{\mu}(\xi_{i+1} + 0)$. Проводя теперь для отрезка $[\xi_{i+1} + 0, \xi_{i+2} - 0]$ аналогичные рассуждения покажем существование на нем решения. Таким образом, решение продолжаемо до точки $x = 1$. Аналогично решение продолжается и влево до точки $x = 0$.

Пусть теперь $S(\mu)$ счетно. Выберем из $S(\mu)$ только те точки ξ_i, в которых величина скачка функции $\mu(x)$ превышает ε. Таких точек будет конечное количество, поскольку функция $\mu(x)$ имеет ограниченную вариацию. Поэтому отрезок $[0, 1]$ разбивается на конечное число отрезков, и дальнейшие рассуждения проводятся как и в случае конечного числа точек разрыва.

Замечание. При постановке задачи Коши мы исключали точки разрыва x_0 разрыва функции $\mu(x)$. Дело в том, что если $x_0 \in S(\mu)$, то функция $u(x)$ в точке $x = x_0$ имеет единственное значение, а производная $u'_{\mu}(x)$ имеет два значения. Поэтому при $x_0 \in S(\mu)$ мы можем рассматривать задачи

$$\begin{cases} -pu'_{\mu}(x) + \int\limits_{0}^{x} ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_{\mu}(0), \\ u(x_0 - 0) = u_0, \\ u'_{\mu}(\tau_1^{\xi}) = v_0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_1^\xi) = v_0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_2^\xi) = v_0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0 + 0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_2^\xi) = v_0, \end{cases} \tag{9}$$

В силу равенств (2) задачи (6), (7), (8), (9) сводятся к задаче вида (3). Поэтому в силу предыдущей теоремы задачи (6), (7), (8), (9) также однозначно разрешимы.

Авторы выражают признательность и благодарность Юлию Витальевичу Покорному за постановку задачи и чуткое руководство, а также Маргарите Борисовне Зверевой за замечания, которые способствовали улучшению текста статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07–01–00397).

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.
2 *Покорный Ю.В.* О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля // Докл. АН. 2002. Т. 383, № 5. С. 1–4.
3. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* О задаче Штурма–Лиувилля с разрывными решениями // Труды математического факультета. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2005. Вып. 10. С. 119–130.
4. *Зверева М.Б.* О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стилтьеса: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2005. 120 с.

УДК 517.53

О ЧИСЛЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

А.В. Фрянцев

Владимирский государственный университет,
студент 4 курса
E-mail: versionfalex@vpti.vladimir.ru

Получена формула аппроксимации дифференциальных операторов специального вида. Указана оценка абсолютной погрешности аппроксимации. Показано, что рассматриваемая аппроксимация является точной на многочленах.

On Numerical Approximation of Differential Polynomials

A.V. Fryantsev

A numerical approximation formula was devised for differential operators of a special form. An absolute approximation error value was indicated. It was shown that the mentioned approximation is accurate for polynomials.

1. ТЕОРЕМА ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В работах [1, 2] предложен метод аппроксимаций аналитических функций посредством сумм вида $\sum_k \lambda_k f(\lambda_k z)$ (здесь f — некоторая фиксированная аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция, а аппроксимация проводится за счет подбора комплексных чисел λ_k) и указаны приложения метода к численному дифференцированию и интегрированию аналитических функций. В теореме 1 настоящей работы метод модифицируется применительно к аппроксимации дифференциальных многочленов, обобщающих оператор дифференцирования.

Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(z - z_0)^j$ аналитична в некотором замкнутом круге $\mathbb{U}(r, z_0) :=$ $:= \{z : \ |z - z_0| \le r\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ и $P(\lambda) = \sum\limits_{s=1}^{q} p_s \lambda^s$ — некоторый фиксированный многочлен степени q, $p_q \ne 0$, $P(0) = 0$.