Алгебра и логика, 62, № 1 (2023), 114—134

DOI: 10.33048/alglog.2023.62.108 УДК 512.542.2

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С РАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ КОПРОСТЫХ АВТОМОРФЗМОВ, НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ КОТОРОЙ ИМЕЮТ ОГРАНИЧЕННЫЕ ЭНГЕЛЕВЫ СТОКИ

Е. И. ХУХРО, П. ШУМЯЦКИЙ

Изучение конечных групп в зависимости от неподвижных точек их автоморфизмов является одним из основных путей исследований в теории групп, внося вклад в структурные результаты и стимулируя развитие новых методов. Одним из наиболее известных примеров является теорема Дж. Томпсона [1] о нильпотентности конечной группы с автоморфизмом простого порядка, не имеющим нетривиальных неподвижных точек. Используя классификацию конечных простых групп, П. Раули [2] показал, что конечная группа с автоморфизмом любого порядка, не имеющим нетривиальных неподвижных точек, разрешима.

Изучение групп с автоморфизмами „почти без нетривиальных неподвижных точек“ относится к более общей ситуации, когда группа автоморфизмов $A \leq \operatorname{Aut} G$ может иметь нетривиальную подгруппу неподвижных точек $C_G(A)$, которая предполагается „малой“ в том или ином смысле. Обычная цель состоит в том, чтобы доказать, что группа „почти“ так же хороша, как в случае без нетривиальных неподвижных точек, где „почти“ означает по модулю „кусочков“, так или иначе соизмеримых с подгруппой неподвижных точек $C_G(A)$. Дж. Томпсон [3] доказал, что высота Фиттинга конечной разрешимой группы G с разрешимой группой автоморфизмов A копростого порядка ограничена в терминах высоты Фиттинга подгруппы $C_G(A)$ и композиционной длины $\alpha(A)$ группы A. (Напомним, что высота Фиттинга — это длина кратчайшего нормального ряда с нильпотентными факторами.) Работа Томпсона вдохновила многочисленные последующие работы, посвящённые похожим проблемам. Одни из наилучших результатов в этой области получил А. Турулл; см. его обзор [4]. Используя результаты А. Турулла, Б. Хартли и И. М. Айзаакс [5] доказали, что если конечная разрешимая группа G допускает разрешимую группу автоморфизмов A копростого порядка, то индекс $|G : F_{2\alpha(A)+1}(G)|$ ограничен в терминах $|C_G(A)|$ и $|A|$, где $F_{2\alpha(A)+1}(G)$ — соответствующий член ряда Фиттинга.

Стоит упомянуть, что когда группа автоморфизмов $A \leq \operatorname{Aut} G$ не нильпотентна, условие копростоты существенно для получения оценок высоты Фиттинга даже в случае без нетривиальных неподвижных точек $C_G(A) = 1$, как показали С. Д. Белл и Б. Хартли [6]. Но для нильпотентной группы автоморфизмов $A \leq \operatorname{Aut} G$ конечной разрешимой группы G, для которой $C_G(A) = 1$, высота Фиттинга группы G ограничена в терминах $\alpha(A)$ даже без условия копростоты: это частный случай теоремы Э. К. Дэйда [7], который доказал, что высота Фиттинга конечной разрешимой группы G ограничена в терминах $\alpha(H)$, где H — картерова подгруппа группы G.

В то время как вышеупомянутые результаты имели дело с ограничениями на порядок подгруппы $C_G(A)$ или её высоту Фиттинга, успешно использовались и другие условия „малости“ на $C_G(A)$. Е. И. Хухро и В. Д. Мазуров [8–11] рассматривали конечные группы G (не обязательно разрешимые), обладающие группой автоморфизмов A с подгруппой неподвижных точек $C_G(A)$ заданного ранга r. Здесь ранг группы H — это наименьшее натуральное число r, для которого каждая подгруппа из H порождается r элементами. Один из результатов в [9, 11], когда A разрешима и имеет копростой порядок, — это оценка ранга фактор-группы $G/F_{4^{\alpha(A)}-1}(G)$ в терминах r и $|A|$.

В настоящей работе мы рассматриваем конечные группы G с разрешимой группой автоморфизмов A копростого порядка, для которой все элементы из $C_G(A)$ удовлетворяют условиям типа энгелевости, выраженными в терминах так называемых энгелевых стоков (см. определение ниже). При заданном максимальном размере m этих стоков мы доказываем, что индекс $|G : F_{2\alpha(A)+2}(G)|$ ограничен в терминах m и $|A|$ (теорема 1). При заданном максимальном ранге r этих стоков мы доказываем, что ранг группы $G/F_{4^{\alpha(A)}+4\alpha(A)+3}(G)$ ограничен в терминах r и $|A|$ (следствие 4), а если дополнительно группа G разрешима, то индекс $|G : F_{4^{\alpha(A)}+4\alpha(A)+3}(G)|$ ограничен в терминах r и $|A|$ (теорема 3). Полученные результаты лежат в русле вышеописанных исследований автоморфизмов „почти без нетривиальных неподвижных точек“: если все элементы из $C_G(A)$ лево- или право-энгелевы (т. е. их левые или правые энгелевы стоки тривиальны), то $C_G(A) \leq F(G)$ по теореме Р. Бэра [12, 12.3.7], тогда A индуцирует группу автоморфизмов без нетривиальных неподвижных точек на $G/F(G)$, и потому группа G разрешима по теореме Я. М. Ванга и З. М. Чена [13], основанной на классификации конечных простых групп, причём высота Фиттинга группы G ограничена в терминах $\alpha(A)$ по теореме Дж. Томпсона [3] (с улучшенной оценкой $2\alpha(A)$ А. Турулла [14]).

Чтобы привести точные формулировки, нам потребуются соответствующие определения. Мы используем обозначения левонормированных простых коммутаторов $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_r] := [\dots[[a_1, a_2], a_3], \dots, a_r]$ и сокращённое обозначение $[a, {}_k b] := [a, b, b, \dots, b]$, где b повторяется k раз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Левым энгелевым стоком* элемента g группы G называется такое множество $\mathcal{E}(g)$, что для каждого $x \in G$ все достаточно длинные коммутаторы $[x, g, g, \dots, g]$ лежат в $\mathcal{E}(g)$, т. е. для каждого $x \in G$ существует такое натуральное $l(x, g)$, что $[x, {}_l g] \in \mathcal{E}(g)$ для всех $l \geqslant l(x, g)$.

Таким образом, то, что g — левый энгелев элемент, в точности означает, что можно выбрать $\mathcal{E}(g) = \{1\}$; то, что G — энгелева группа, означает, что можно выбрать $\mathcal{E}(g) = \{1\}$ для всех $g \in G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Правым энгелевым стоком* элемента g группы G называется такое множество $\mathcal{R}(g)$, что для каждого $x \in G$ все достаточно длинные коммутаторы $[g, x, x, \dots, x]$ лежат в $\mathcal{R}(g)$, т. е. для каждого $x \in G$ существует такое натуральное $r(x, g)$, что $[x, {}_r g] \in \mathcal{R}(g)$ для всех $r \geqslant r(x, g)$.

Таким образом, g — правый энгелев элемент в точности тогда, когда можно выбрать $\mathcal{R}(g) = \{1\}$; G — энгелева группа тогда, когда можно выбрать $\mathcal{R}(g) = \{1\}$ для всех $g \in G$.

Когда группа G конечна, каждый элемент имеет *наименьший* левый энгелев сток, поскольку пересечение двух левых энгелевых стоков $\mathcal{E}'(g)$ и $\mathcal{E}''(g)$ снова является левым энгелевым стоком элемента g. Аналогично, каждый элемент $g \in G$ имеет *наименьший* правый энгелев сток. В данной работе мы будем всегда использовать обозначения $\mathcal{E}(g)$ и $\mathcal{R}(g)$ для наименьших левого и правого энгелевых стоков элемента g соответственно, тем самым устраняя двусмысленность этих обозначений в вышеприведённых определениях. В тех случаях, когда требуется рассматривать левый или правый энгелев сток, построенный относительно подгруппы H, содержащей g, мы пишем соответственно $\mathcal{E}_H(g)$ или $\mathcal{R}_H(g)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем для краткости говорить, что элемент g группы G обладает *левым* (или *правым*) *энгелевым стоком ранга не выше* r, если имеется подгруппа ранга не выше r, являющаяся левым (соответственно правым) энгелевым стоком элемента g. Это эквивалентно тому, что подгруппа $\langle\mathcal{E}(g)\rangle$ (соответственно $\langle\mathcal{R}(g)\rangle$) имеет ранг не выше r.

Напомним, что ряд Фиттинга начинается с подгруппы Фиттинга $F_1(G) = F(G)$, которая является наибольшей нормальной нильпотентной подгруппой, а затем, по индукции, $F_{k+1}(G)$ — полный прообраз подгруппы $F(G/F_k(G))$. Высота Фиттинга конечной разрешимой группы G — это наименьшее h, для которого $F_h(G) = G$. На протяжении всей работы мы сокращённо пишем, скажем, „$(a, b, \dots)$-ограничен“ вместо „ограничен сверху только в терминах $a, b, \dots$“. Сформулируем основные результаты работы, первый из которых относится к мощности энгелевых стоков.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — конечная группа, допускающая разрешимую группу автоморфизмов A порядка, копростого с $|G|$. Пусть m — натуральное число, для которого выполнено одно из следующих условий:*

(a) *каждый элемент $g \in C_G(A)$ имеет левый энгелев сток $\mathcal{E}_G(g)$ мощности не более m;*

(б) *каждый элемент* $g \in C_G(A)$ *имеет правый энгелев сток* $\mathcal{R}_G(g)$ *мощности не более* m.

Тогда индекс разрешимого радикала $|G : S(G)|$ *ограничен в терминах* m, *а индекс* $|G : F_{2\alpha(A)+2}(G)|$ *ограничен в терминах* $|A|$ *и* m, *где* $\alpha(A)$ — *композиционная длина группы* A.

Здесь мы использовали индекс G в $\mathcal{E}_G(g)$ и $\mathcal{R}_G(g)$, чтобы подчеркнуть, что эти стоки рассматриваются во всей группе G.

Пока не ясно, можно ли исключить зависимость от $|A|$ в заключении теоремы 1 для индекса $|G : F_{2\alpha(A)+2}(G)|$. Известно, что это возможно, когда $|A|$ — простое число: в [15] мы рассматривали группу G, удовлетворяющую условиям теоремы 1 когда A имеет простой порядок, и доказали, что тогда в случае выполнения условия (а) группа G обладает метанильпотентной нормальной подгруппой m-ограниченного индекса, а в случае, когда выполнено условие (б), группа G обладает нильпотентной нормальной подгруппой m-ограниченного индекса. Доказательство теоремы 1 опирается на ряд полезных лемм из [15]. Более того, тот факт, что индекс $|G : S(G)|$ ограничен в терминах m, уже был установлен в [15, предл. 3.2], поэтому новая информация в теореме 1 относится к индексу $|G : F_{2\alpha(A)+2}(G)|$.

Другие два основных результата относятся к рангу энгелевых стоков.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* G — *конечная группа, допускающая разрешимую группу автоморфизмов* A *порядка, копростого с* $|G|$. *Пусть* r — *такое натуральное число, что каждый элемент* $g \in C_G(A)$ *обладает левым или правым энгелевым стоком* $\langle \mathcal{E}_G(g)\rangle$ *или* $\langle \mathcal{R}_G(g)\rangle$ *ранга не выше* r. *Тогда ранг фактор-группы* $G/S(G)$ *по разрешимому радикалу ограничен в терминах* r.

В теореме 2 „левый или правый“ применяется индивидуально к элементам из $C_G(A)$, так что это могут быть разные, левые или правые, энгелевы стоки для разных элементов из $C_G(A)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* G — *разрешимая конечная группа, допускающая разрешимую группу автоморфизмов* A *порядка, копростого с* $|G|$.

Пусть r — такое натуральное число, что выполняется одно из следующих условий:

(а) *каждый элемент $g \in C_G(A)$ обладает левым энгелевым стоком $\langle \mathcal{E}_G(g) \rangle$ ранга не выше r;*

(б) *каждый элемент $g \in C_G(A)$ обладает правым энгелевым стоком $\langle \mathcal{R}_G(g) \rangle$ ранга не выше r.*

Тогда индекс $|G : F_{4^{\alpha(A)}+4\alpha(A)+3}(G)|$ ограничен в терминах $|A|$ и r, где $\alpha(A)$ — композиционная длина группы A.

Из теорем 2 и 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть G — конечная группа, допускающая разрешимую группу автоморфизмов A порядка, копростого с $|G|$. Пусть r — такое натуральное число, что выполнено одно из следующих двух условий:*

(а) *каждый элемент $g \in C_G(A)$ обладает левым энгелевым стоком $\langle \mathcal{E}_G(g) \rangle$ ранга не выше r;*

(б) *каждый элемент $g \in C_G(A)$ обладает правым энгелевым стоком $\langle \mathcal{R}_G(g) \rangle$ ранга не выше r.*

Тогда ранг фактор-группы $G/F_{4^{\alpha(A)}+4\alpha(A)+3}(G)$ ограничен в терминах $|A|$ и r, где $\alpha(A)$ — композиционная длина группы A.

Заметим, что хотя хорошо известно, что обратный правого энгелева элемента является левым энгелевым, нет подобной прямой связи между левыми и правыми энгелевыми стоками, и условия (б) в теоремах 1 и 3 и следствии 4 не вытекают из условий (а). Вернее сказать, доказательства в этих случаях похожи и по большей части проводятся одновременно.

Другие результаты касательно автоморфизмов, неподвижные точки которых удовлетворяют ограничениям на их энгелевы стоки, были получены в [16–21]. Обобщения энгелевых условий для конечных, проконечных и компактных групп, использующие понятие энгелевых стоков, рассматривались в [22–28]. Естественной целью таких исследований является доказательство того, что группы (из определённых классов), имеющие „малые“ энгелевы стоки, обладают свойствами, близкими к хорошим свойствам энгелевых групп (в которых стоки тривиальны). В качестве примеров таких хороших свойств упомянем тот факт, что конечные энгелевы группы нильпотентны по теореме М. Цорна [12, 12.3.4], в то время как Дж. С. Уилсон и Е. И. Зельманов [29] доказали, что проконечные энгелевы группы локально нильпотентны. С другой стороны, примеры Е. С. Голода [30] показывают, что, вообще говоря, энгелевы группы могут не быть локально нильпотентными.

Далее используются следующие количественные результаты.

ТЕОРЕМА 5 [23, теор. 3.1]**.** *Пусть G — конечная группа, а m — натуральное число. Предположим, что каждый элемент $g \in G$ имеет левый энгелев сток $\mathcal{E}(g)$ мощности не более m. Тогда G обладает нормальной подгруппой N порядка, ограниченного в терминах m, для которой G/N нильпотентна.*

ТЕОРЕМА 6 [25, теор. 3.1]**.** *Пусть G — конечная группа, а m — натуральное число. Предположим, что каждый элемент $g \in G$ имеет правый энгелев сток $\mathcal{R}(g)$ мощности не более m. Тогда G обладает нормальной подгруппой N порядка, ограниченного в терминах m, для которой G/N нильпотентна.*

§ 1. Предварительные сведения

Для группы A, действующей автоморфизмами на группе B, мы используем обычные обозначения для коммутаторов $[b, a] = b^{-1}b^{a}$ и взаимных коммутантов $[B, A] = \langle [b, a] \mid b \in B, a \in A \rangle$, а также для централизаторов $C_B(A) = \{b \in B \mid b^a = b$ для всех $a \in A\}$ и $C_A(B) = \{a \in A \mid b^a = b$ для всех $b \in B\}$. Мы обычно обозначаем той же буквой φ автоморфизм, индуцированный автоморфизмом φ на фактор-группе по нормальной φ-инвариантной подгруппе.

Для краткости мы говорим, что автоморфизм φ конечной группы G является копростым автоморфизмом, если порядки φ и G взаимно просты: $(|G|, |\varphi|) = 1$. В следующей лемме собраны несколько хорошо известных свойств копростых автоморфизмов конечных групп.

ЛЕММА 7. *Пусть A — группа, действующая копростыми автоморфизмами на конечной группе G.*

(а) *Если N — нормальная A-инвариантная подгруппа группы G, то неподвижные точки группы A в фактор-группе G/N накрываются неподвижными точками группы A в G, т. е. $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$.*

(б) *Имеет место $[[G, A], A] = [G, A]$.*

(в) *Если группа G абелева, то $G = [G, A] \times C_G(A)$.*

Нам потребуется ещё одна полезная лемма о копростых действиях.

ЛЕММА 8 [15, лемма 2.4]**.** *Пусть V — абелева конечная группа, U — группа копростых автоморфизмов группы V, а m — натуральное число. Если $|[V, u]| \leqslant m$ для каждого $u \in U$, то порядок $|U|$ ограничен в терминах m.*

Напомним, что ранг конечной группы — это наименьшее натуральное число r, для которого каждая её подгруппа порождается r элементами. Следующий результат установлен Л. Ковачем [31] для разрешимых групп. Распространить его на любые конечные группы с использованием классификации конечных простых групп смогли независимо Р. Гуралник [32] и А. Луккини [33] (улучшив оценку $2d$, которую получили П. Лонгобарди и М. Май [34]).

ЛЕММА 9. *Если d — максимум рангов силовских подгрупп конечной группы, то ранг этой группы не превосходит $d + 1$.*

Следующая лемма появилась независимо и одновременно в работах Ю. М. Горчакова [35], Ю. И. Мерзлякова [36] и, как „лемма Ф. Холла", в работе Дж. Роузблэйда [37].

ЛЕММА 10. *Пусть p — простое число. Ранг p-группы автоморфизмов абелевой конечной p-группы ранга r ограничен в терминах r.*

Следующие две леммы также являются хорошо известными фактами.

ЛЕММА 11 (см., напр., [24, лемма 1.3])**.** *Конечная p'-группа линейных преобразований векторного пространства размерности n над полем характеристики p имеет n-ограниченный ранг.*

ЛЕММА 12. *Группа ранга r и периода e имеет (r,e)-ограниченный порядок.*

Для доказательства этой леммы не обязательно использовать положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда, т. к. она вытекает из оценок порядков силовских подгрупп, которые можно получить с использованием мощных p-групп.

Докажем теперь ранговый аналог леммы 8.

ЛЕММА 13. *Пусть V — элементарная абелева конечная p-группа, U — группа копростых автоморфизмов группы V, и r — натуральное число. Если ранг подгруппы $[V,u]$ не превосходит r для каждого $u \in U$, то ранг группы U ограничен в терминах r.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассматриваем V как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$ в аддитивной записи; тогда ранг подгруппы — это её размерность. Сначала предположим, что U абелева. Выберем такой $u_1 \in U$, что $[V,u_1] \neq 0$. По лемме 7(с), $V = [V,u_1] \oplus C_V(u_1)$, и оба слагаемых U-инвариантны, так как U абелева. Если $C_U([V,u_1]) = 1$, то ранг группы U r-ограничен в силу леммы 11. В противном случае выберем $1 \neq$ $\neq u_2 \in C_U([V,u_1])$; тогда $V = [V,u_1 \oplus [V,u_2] \oplus C_V(\langle u_1,u_2\rangle)$. Если $1 \neq$ $\neq u_3 \in C_U([V,u_1] \oplus [V,u_2])$, то $V = [V,u_1] \oplus [V,u_2] \oplus [V,u_3] \oplus C_V(\langle u_1,u_2,u_3\rangle)$, и т. д. Если $C_U([V,u_1] \oplus \cdots \oplus [V,u_k]) = 1$ на каком-то r-ограниченном шаге k, то U имеет r-ограниченный ранг по лемме 11. Однако если шагов слишком много, то для элемента $w = u_1u_2\cdots u_k$ при $k > r$ по лемме 7(б) имеет место $0 \neq [V,u_i] = [[V,u_i],w]$ для каждого $i = 1,2,\ldots,k$, поэтому у $[V,w] = [V,u_1] \oplus \cdots \oplus [V,u_k]$ ранг больше, чем r; противоречие.

Теперь рассмотрим общий случай. Если Q — силовская q-подгруппа из U, то выберем максимальную нормальную абелеву подгруппу M из Q. По доказанному выше ранг группы M r-ограничен. Следовательно, Q имеет r-ограниченный ранг по лемме 10, т. к. $C_P(M) = M$ и P/M вкладывается в группу автоморфизмов группы M. Ранг силовской q-подгруппы группы U r-ограничен для каждого простого делителя q порядка $|U|$, и ранг группы U r-ограничен в силу леммы 9. $\square$

Теперь напомним некоторые элементарные свойства энгелевых стоков. Следующая лемма вытекает из свойств копростых действий и формулы из работы Х. Хайнекена [38] о связи между левыми и правыми энгелевыми коммутаторами.

ЛЕММА 14 [25, лемма 3.2]. *Если V — абелева подгруппа конечной группы G, а элемент $g \in G$ нормализует V, причём $(|V|, |g|) = 1$, то*

$$[V, g] = \mathcal{E}_{V\langle g\rangle}(g) = \mathcal{R}_{V\langle g\rangle}(g).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Так как образ группового коммутатора $[a, {}_k b]$ под действием гомоморфизма ϑ является коммутатором $[a^\vartheta, {}_k b^\vartheta]$ образов, для любого элемента g группы G и любой нормальной подгруппы N образ левого (правого) энгелева стока $\mathcal{E}(g)$ (соответственно $\mathcal{R}(g)$) в G/N будет левым (правым) энгелевым стоком образа элемента g. Далее, для любой A-инвариантной секции M/N, т. е. фактор-группы A-инвариантной подгруппы M по A-инвариантной подгруппе N, нормальной в M, централизатор группы A в M/N есть образ централизатора $C_M(A)$ по лемме 7. Поэтому условия теоремы 1 наследуются любой A-инвариантной секцией. Будем свободно пользоваться этим фактом без особых ссылок.

§ 2. Стоки ограниченной мощности

Сначала рассмотрим разрешимую группу G высоты Фиттинга 2, удовлетворяющую условиям теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Пусть G — конечная группа, допускающая группу автоморфизмов A порядка копростого с $|G|$. Пусть m — такое натуральное число, что выполнено одно из следующих условий*:

(а) *каждый элемент $g \in C_G(A)$ имеет левый энгелев сток $\mathcal{E}_G(g)$ мощности не более m*;

(б) *каждый элемент $g \in C_G(A)$ имеет правый энгелев сток $\mathcal{R}_G(g)$ мощности не более m.*

Если $G = F_2(G)$, то централизатор $C_{G/F(G)}(A)$ группы A в $G/F(G)$ имеет m-ограниченный порядок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для облегчения обозначений до конца доказательства пишем $F = F(G)$. По теореме Гашюца, см. [39, утв. III.4.2], образ подгруппы Фиттинга F в фактор-группе группы G по подгруппе Фраттини $\Phi(F)$ группы F является подгруппой Фиттинга фактор-группы $G/\Phi(F)$. Так как $|C_{(G/\Phi(F))/(F/\Phi(F))}(A)| = |C_{G/F}(A)|$ по лемме 7 и условие наследуется фактор-группой $G/\Phi(F)$ в силу замечания 15, можно считать, что $\Phi(F) = 1$. Тогда F — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G по теореме Гашюца, см. [39, утв. III.4.5], и потому F — прямое произведение элементарных абелевых p-групп для различных p.

Пусть q — любое простое число, делящее $|C_{G/F}(A)|$, и Q — силовская q-подгруппа группы $C_{G/F}(A)$. Рассмотрим произвольный нетривиальный элемент $g \in Q$. Пусть $\hat{g}$ — прообраз элемента g в $C_G(A)$, он существует по лемме 7. Так как образ силовской q-подгруппы группы $\langle \hat{g} \rangle$ в G/F содержит g, можно выбрать $\hat{g}$ так, что это тоже q-элемент.

Тогда $\hat{g}$ индуцирует сопряжением нетривиальный копростой автоморфизм холловой q'-подгруппы $F_{q'}$ группы F. Если предположить противное, т. е. $\hat{g}$ централизует $F_{q'}$, то $\hat{g}$ централизует все факторы главного ряда группы G. В самом деле, требуемый ряд можно выбрать так, чтобы он содержал $F_{q'}$ и F. Элемент $\hat{g}$, будучи q-элементом, централизует главные q-факторы в $F/F_{q'}$; кроме того, $\hat{g}$ централизует все факторы этого ряда выше F, т. к. группа G/F нильпотентна по условию. В результате $\hat{g}$ принадлежал бы F в силу [12, 5.2.9]; противоречие.

Определяя действие элемента $g \in Q$ на $F_{q'}$ как индуцированное сопряжением элементом $\hat{g}$, выбранным как выше, получаем корректно определённое точное действие группы Q копростыми автоморфизмами на $F_{q'}$, поскольку $\langle \hat{g} \rangle \cap F$ содержится в силовской q-подгруппе группы F и потому централизует $F_{q'}$. В силу леммы 14 выполнено $[F_{q'}, \hat{g}] \subseteq \mathcal{E}(\hat{g}) \cap \mathcal{R}(\hat{g})$. Отсюда следует, что при любом из условий (а) или (б) подгруппа $[F_{q'}, \hat{g}] = [F_{q'}, g]$ имеет m-ограниченный порядок для произвольного $g \in Q$. По лемме 8 тогда m-ограничен и порядок $|Q|$. В частности, простое число q ограничено сверху в терминах m, так что имеется только m-ограниченное число простых чисел, делящих $|C_{G/F}(\varphi)|$. Порядок группы $C_{G/F}(\varphi)$ равен произведению порядков её силовских подгрупп, каждая из которых имеет m-ограниченный порядок, поэтому $|C_{G/F}(\varphi)|$ ограничен в терминах m. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Напомним, что G — конечная группа, допускающая разрешимую группу автоморфизмов A порядка, копростого с $|G|$, а m — такое натуральное число, что выполнено одно из следующих условий:

(а) каждый элемент $g \in C_G(A)$ имеет левый энгелев сток $\mathcal{E}_G(g)$ мощности не более m;

(б) каждый элемент $g \in C_G(A)$ имеет правый энгелев сток $\mathcal{R}_G(g)$ мощности не более m.

Известно [15, предл. 3.2], что индекс разрешимого радикала $|G : S(G)|$ ограничен в терминах m. Остаётся показать, что индекс $|G : F_{2\alpha(A)+2}(G)|$ ограничен в терминах $|A|$ и m. При этом мы можем, очевидно, считать, что группа G разрешима.

По теореме 5 или 6 (соответственно для случая (а) или (б)) получаем, что $C_G(A)$ обладает подгруппой m-ограниченного порядка с нильпотентной фактор-группой. Поэтому высота Фиттинга группы $C_G(A)$ ограничена в терминах m. Применяя теорему Томпсона [3] (или усовершенствование Турулла [14] с неулучшаемой оценкой), получаем, что высота Фиттинга группы G ограничена в терминах $\alpha(A)$ и m.

Теперь применим предложение 16 к каждой метанильпотентной фактор-группе $F_{i+2}(G)/F_i(G)$ при $i = 0, 1, 2, \dots$, где $F_0(G) = 1$. В силу этого предложения $|C_{F_{i+2}(G)/F_{i+1}(G)}(A)|$ ограничен в терминах m для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$. Высота Фиттинга группы G ограничена в терминах $\alpha(A)$ и m, и в силу леммы 7 получаем, что $|C_{G/F(G)}(A)|$ ограничен в терминах $\alpha(A)$ и m.

По теореме Хартли–Айзаакса [5, теор. A], применённой к фактор-группе $G/F(G)$ и её группе автоморфизмов, индуцированной группой A, следует, что $(2\alpha(A) + 1)$-я подгруппа Фиттинга группы $G/F(G)$ имеет $(|A|, m)$-ограниченный индекс, и поэтому индекс $|G : F_{2\alpha(A)+2}(G)|$ также $(|A|, m)$-ограничен. $\square$

§ 3. Ограничение ранга фактор-группы по разрешимому радикалу

Ограничение индекса разрешимого радикала в теореме 1 было получено в [15, предл. 3.2] как следствие недавнего результата Р. М. Гуралника и Г. Трэйси [40]. Доказательство теоремы 2, где мы получаем оценку ранга фактор-группы по разрешимому радикалу, аналогично.

ТЕОРЕМА 17 [40, теор. 1.6]**.** *Пусть $\tau \in \operatorname{Aut} G$ — инволютивный автоморфизм конечной группы G, и*

$$J(\tau) = \{g \in G \mid g \text{ нечётного порядка, } g^{\tau} = g^{-1}\}.$$

Предположим, что $[G, \tau] = G$. Тогда $G = \langle J(\tau) \rangle$.

Мы выведем из теоремы 17 предложение о группах копростых автоморфизмов, неподвижные точки которых обладают энгелевыми стоками ограниченного ранга, в большей общности, чем теорема 2, т. к. оно может оказаться применимым в других исследованиях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Пусть G — конечная группа, допускающая группу копростых автоморфизмов H. Предположим, что r — такое натуральное число, что каждый 2-элемент $t \in C_G(H)$ имеет левый или правый энгелев сток $\langle \mathcal{E}_G(t) \rangle$ или $\langle \mathcal{R}_G(t) \rangle$ ранга не выше r. Тогда ранг фактор-группы $G/S(G)$ по разрешимому радикалу r-ограничен.*

В этой формулировке „левый или правый“ применяется индивидуально к 2-элементам из $C_G(H)$, так что это могут быть разные, левые или правые, энгелевы стоки для разных 2-элементов из $C_G(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как условие наследуется фактор-группой $G/S(G)$, можно считать, что $S(G) = 1$. Тогда обобщённая подгруппа Фиттинга

$$F^*(G) = T_1 \times \ldots \times T_n \tag{1}$$

является прямым произведением неабелевых конечных простых групп T_i, которые переставляются группой H. Централизатор подгруппы $F^*(G)$

тривиален, поэтому группа G вкладывается в группу автоморфизмов группы $F^*(G)$, которая, как известно, имеет вид

$$(\operatorname{Aut} T_1 \times \ldots \times \operatorname{Aut} T_n)U, \tag{2}$$

где U — подгруппа симметрической группы S_n. Поскольку ранги групп внешних автоморфизмов $\operatorname{Aut} T_i/T_i$, как известно, не превосходят 3 (в силу классификации конечных простых групп, см. [41]), достаточно получить оценку в терминах r для ранга подгруппы $F^*(G)$. Таким образом, мы можем просто считать, что $G = F^*(G)$.

Как доказали Я. М. Ванг и З. М. Чен [13] на основе классификации конечных простых групп, конечная группа, допускающая группу копростых автоморфизмов с подгруппой неподвижных точек нечётного порядка, разрешима. Поэтому $C_G(H)$ содержит инволюции. Более того, можно выбрать инволюцию $\tau \in C_G(H)$ с нетривиальными проекциями на каждый из сомножителей T_i из (1). В самом деле, пусть $\{T_{i_1}, \ldots, T_{i_k}\}$ — одна из орбит группы H в её подстановочном действии на множестве $\{T_1, \ldots, T_n\}$. Ясно, что любой нетривиальный элемент произведения $T_{i_1} \times \ldots \times T_{i_k}$, централизуемый группой H, должен иметь нетривиальные проекции на каждый из сомножителей T_{i_j}. В централизаторе группы H в произведении $T_{i_1} \times \ldots \times$ $\times T_{i_k}$ имеется инволюция. Теперь в качестве $\tau \in C_G(H)$ выберем произведение этих инволюций по всем орбитам группы H. Тогда $\tau \in C_G(H)$ будет инволюцией с нетривиальными проекциями на каждый сомножитель T_i из (1). Следовательно, $G = F^*(G) = [G, \tau]$, т. к. каждая T_i — неабелева простая группа.

Если $g \in J(\tau)$, то $[\langle g \rangle, \tau] = \langle g \rangle$, т. к. $g^\tau = g^{-1}$ и g нечётного порядка. Тогда $\langle g \rangle \subseteq \mathcal{R}(\tau) \cap \mathcal{E}(\tau)$ в силу леммы 14. Значит, $J(\tau) \subseteq \langle \mathcal{R}(\tau) \rangle \cap \langle \mathcal{E}(\tau) \rangle$, и ранг у $\langle J(\tau) \rangle$ не выше r. Так как $[G, \tau] = G$, верно $G = \langle J(\tau) \rangle$ по теореме 17, что завершает доказательство. $\square$

В нашей ситуации мы получаем теорему 2 как следующее очевидное

СЛЕДСТВИЕ 19. *Пусть G — конечная группа, допускающая группу копростых автоморфизмов A. Пусть r — такое натуральное число, что каждый элемент $g \in C_G(A)$ имеет левый или правый энге-*

лев сток $\langle \mathcal{E}(g)\rangle$ *или* $\langle \mathcal{R}_G(g)\rangle$ *ранга не выше* r. *Тогда ранг фактор-группы* $G/S(G)$ *по разрешимому радикалу ограничен в терминах* r.

§ 4. Стоки ограниченного ранга в разрешимом случае

В этом параграфе мы доказываем теорему 3 о разрешимой конечной группе G, допускающей разрешимую группу копростых автоморфизмов A с ограничениями на ранги энгелевых стоков элементов из $C_G(A)$. Сначала сформулируем один из результатов Е. И. Хухро и В. Д. Мазурова о конечных группах с автоморфизмами, у которых подгруппы неподвижных точек имеют ограниченный ранг.

ТЕОРЕМА 20 (Хухро–Мазурова [9, теор. 5.2(c)])**.** *Если разрешимая конечная группа* G *допускает автоморфизм* φ *простого порядка* p, *взаимно простого с* $|G|$, *для которого* $C_G(\varphi)$ *имеет ранг* r, *то порядок группы* $G/F_4(G)$ (p,r)*-ограничен.*

Хотя работа [9] также содержит теорему о разрешимой группе A копростых автоморфизмов, здесь мы выводим по существу такой же результат с несколько лучшей функцией.

СЛЕДСТВИЕ 21. *Если разрешимая конечная группа* G *допускает разрешимую группу копростых автоморфизмов* A, *для которой* $C_G(A)$ *имеет ранг* r, *то порядок* $|G/F_{4^{\alpha(A)}+2\alpha(A)-1}(G)|$ *является* $(|A|,r)$*-ограниченным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_1 — нормальная подгруппа группы A простого индекса. Фактор-группа A/A_1 индуцирует автоморфизм простого порядка подгруппы $C_1 = C_G(A_1)$ с централизатором $C_{C_1}(A/A_1) = C_G(A)$ ранга r. По теореме 20 порядок $|C_1/F_4(C_1)|$ ограничен в терминах $|A/A_1|$ и r. Согласно одному из основных результатов работы Дж. Томпсона [3] для любого копростого автоморфизма $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ простого порядка выполняется включение $F(C_G(\varphi)) \leq F_4(G)$. Повторное применение этой теоремы по отношению к A_1 даёт включение $F_4(C_G(A_1)) \leq F_{4\cdot 4^{\alpha(A)-1}}(G) = F_{4^{\alpha(A)}}(G)$, [9, след. 5.6]. Тогда порядок $|C_{G/F_{4^{\alpha(A)}}(G)}(A_1)|$

ограничен в терминах $|A/A_1|$ и r в силу леммы 7(а). По теореме Хартли–Айзаакса [5, теор. A], применённой к $G/F_{4^{\alpha(A)}}(G)$ и её группе автоморфизмов, индуцированной группой A_1, индекс $(2(\alpha(A_1)+1)$-й подгруппы Фиттинга группы $G/F_{4^{\alpha(A)}}(G)$ ограничен в терминах $|A_1|$ и $|C_{G/F_{4^{\alpha(A)}}(G)}(A_1)|$, а следовательно, по доказанному выше, в терминах $|A|$ и r. Учитывая равенство $\alpha(A_1) = \alpha(A) - 1$, в результате получаем, что индекс $|G : F_{4^{\alpha(A)}+2\alpha(A)-1}(G)|$ является $(|A|, r)$-ограниченным. $\square$

Теперь мы готовы доказать теорему 3. Используем стандартные обозначения $O_{p'}(G)$ для наибольшей нормальной p'-подгруппы группы G и $O_{p',p}(G)$ для полного прообраза наибольшей нормальной p-подгруппы группы $G/O_{p'}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Напомним, что G — разрешимая конечная группа, допускающая разрешимую группу копростых автоморфизмов A, для которой выполнено одно из следующих условий:

(а) каждый элемент $g \in C_G(A)$ обладает левым энгелевым стоком $\langle \mathcal{E}_G(g) \rangle$ ранга не выше r;

(б) каждый элемент $g \in C_G(A)$ обладает правым энгелевым стоком $\langle \mathcal{R}_G(g) \rangle$ ранга не выше r.

Требуется доказать, что индекс $|G : F_{4^{\alpha(A)}+4\alpha(A)+3}(G)|$ ограничен в терминах $|A|$ и r, где $\alpha(A)$ — композиционная длина группы A.

Зафиксируем простое число p, делящее $|G|$. Фактор-группа $\overline{G} = G/O_{p',p}(G)$ точно действует на фактор-группе V группы $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$ по подгруппе Фраттини, см. [42, теор. 6.3.4]. Пусть H — холлова p'-подгруппа из $C_G(A)$. Для $h \in H$ имеем $[V, h] \subseteq \langle \mathcal{E}_{V\langle h \rangle}(h) \rangle \cap \langle \mathcal{R}_{V\langle h \rangle}(h) \rangle$ по лемме 14. Так как подгруппы $\langle \mathcal{E}_{V\langle h \rangle}(h) \rangle$ и $\langle \mathcal{R}_{V\langle h \rangle}(h) \rangle$ являются образами подгрупп из $\langle \mathcal{E}_G(h) \rangle$ и $\langle \mathcal{R}_G(h) \rangle$ соответственно, следовательно при любом из вышеупомянутых условий (а) или (б) ранг подгруппы $[V, h]$ не выше r для любого $h \in H$. Значит, образ $\overline{H}$ подгруппы H в $\overline{G}$ имеет r-ограниченный ранг по лемме 11.

Теперь пусть t — любое простое число, делящее $|\overline{G}|$, для которого $t \neq p$. (Заметим, что если таких простых чисел t нет, то $G = O_{p',p}(G)$.) Группа $\overline{\overline{G}} = \overline{G}/O_{t',t}(\overline{G})$ точно действует на фактор-группе W группы

$O_{t',t}(\bar{G})/O_{t'}(\bar{G})$ по подгруппе Фраттини. Пусть K — холлова t'-подгруппа группы $C_G(A)$. Для $k \in K$ верно $[W,k] \subseteq \langle \mathcal{E}_{W\langle k\rangle}(k)\rangle \cap \langle \mathcal{R}_{W\langle k\rangle}(k)\rangle$ по лемме 14. Подгруппы $\langle \mathcal{E}_{W\langle k\rangle}(k)\rangle$ и $\langle \mathcal{R}_{W\langle k\rangle}(k)\rangle$ являются образами подгрупп из $\langle \mathcal{E}_G(k)\rangle$ и $\langle \mathcal{R}_G(k)\rangle$ соответственно, следовательно при любом вышеупомянутых условий (а) или (б) ранг подгруппы $[W,k]$ не выше r для любого $k \in K$. Значит, образ $\overline{\overline{K}}$ группы K в $\overline{\overline{G}}$ имеет r-ограниченный ранг по лемме 11.

Так как $p \neq t$, для любого простого числа q, делящего $|C_G(A)|$, имеется силовская q-подгруппа Q группы $C_G(A)$, которая содержится либо в холловой p'-подгруппе H группы $C_G(A)$, либо в холловой t'-подгруппе K группы $C_G(A)$. Следовательно, образ $\overline{\overline{Q}}$ группы Q в $\overline{\overline{G}}$ имеет r-ограниченный ранг, т. к. это было доказано выше для H и K. По лемме 9 образ группы $C_G(A)$ в $\overline{\overline{G}}$ также имеет r-ограниченный ранг. Используя лемму 7(а), получаем, что $C_{\overline{\overline{G}}}(A)$ имеет r-ограниченный ранг.

В силу следствия 21 Хухро–Мазурова порядок $|\overline{\overline{G}}/F_{4^{\alpha(A)}+2\alpha(A)-1}(\overline{\overline{G}})|$ ограничен в терминах $|A|$ и ранга централизатора $C_{\overline{\overline{G}}}(A)$, а значит в терминах $|A|$ и r в силу доказанного выше.

Фактор-группа
$$\overline{G}/\bigcap_{t\neq p} O_{t',t}(\overline{G}) \tag{3}$$
вкладывается в прямое произведение фактор-групп $\overline{G}/O_{t',t}(\overline{G})$ по простым числам $t \neq p$. Каждая из этих фактор-групп (обозначавшаяся выше через $\overline{\overline{G}}$ для заданного t) является расширением нормальной подгруппы высоты Фиттинга не выше $4^{\alpha(A)} + 2\alpha(A) - 1$ группой $(|A|, r)$-ограниченного порядка. Поэтому это прямое произведение, как и фактор-группа (3), является расширением нормальной подгруппы высоты Фиттинга не выше $4^{\alpha(A)} + 2\alpha(A) - 1$ группой $(|A|, r)$-ограниченного периода.

Так как $O_p(\bar{G}) = 1$, имеет место
$$\bigcap_{t\neq p} O_{t',t}(\overline{G}) = \bigcap_{q} O_{q',q}(\overline{G}) = F(\overline{G}).$$

Итак, фактор-группа (3) совпадает с $\overline{G}/F(\overline{G})$ и является расширением нормальной подгруппы высоты Фиттинга не выше $4^{\alpha(A)} + 2\alpha(A) - 1$ группой $(|A|, r)$-ограниченного периода. Другими словами, фактор-группа $\overline{G} = G/O_{p',p}(G)$ является расширением нормальной подгруппы высоты Фиттинга не выше $4^{\alpha(A)} + 2\alpha(A)$ группой $(|A|, r)$-ограниченного периода для любого простого числа p. Это же утверждение верно и в вырожденном случае, когда нет простых чисел $t \neq p$, делящих $|G/O_{p',p}(G)|$, т. к. тогда $G = O_{p',p}(G)$.

Поскольку $F(G) = \bigcap_p O_{p',p}(G)$, фактор-группа

$$G/F(G) = G/\bigcap_p O_{p',p}(G)$$

вкладывается в прямое произведение фактор-групп $G/O_{p',p}(G)$ и потому также является расширением нормальной подгруппы высоты Фиттинга не выше $4^{\alpha(A)} + 2\alpha(A)$ группой $(|A|, r)$-ограниченного периода. Таким образом, фактор-группа $\widetilde{G} = G/F_{4^{\alpha(A)}+2\alpha(A)+1}(G)$ имеет $(|A|, r)$-ограниченный период.

В группе $(|A|, r)$-ограниченного периода подгруппа ранга не выше r имеет $(|A|, r)$-ограниченный порядок по лемме 12. Поэтому при условии (a) или (б) левые или правые энгелевы стоки элементов из $C_{\widetilde{G}}(A)$ имеют $(|A|, r)$-ограниченные порядки. Применяя теорему 1 к группе $\widetilde{G}$ и её группе автоморфизмов, индуцированной группой A, получаем, что порядок $|\widetilde{G}/F_{2\alpha(A)+2}(\widetilde{G})|$ является $(|A|, r)$-ограниченным. В результате порядок $|G/F_{4^{\alpha(A)}+4\alpha(A)+3}(G)|$ также $(|A|, r)$-ограничен. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Thompson*, Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **45** (1959), 578—581.
2. *P. Rowley*, Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism group, J. Algebra, **174**, No. 2 (1995), 724—727.
3. *J. G. Thompson*, Automorphisms of solvable groups, J. Algebra, **1** (1964), 259—267.
4. *A. Turull*, Character theory and length problems, in: B. Hartley (ed.) et al., Finite and locally finite groups. Proc. NATO Adv. Study Inst. (Istanbul,

Turkey, 14-27 August 1994), (NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci., **471**), Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1995, 377—400.

5. *B. Hartley, I. M. Isaacs*, On characters and fixed points of coprime operator groups, J. Algebra, **131**, No. 1 (1990), 342—358.
6. *S. D. Bell, B. Hartley*, A note on fixed-point-free actions of finite groups, Q. J. Math., Oxf. II. Ser., **41**, No. 162 (1990), 127—130.
7. *E. C. Dade*, Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups, Ill. J. Math., **13** (1969), 449—514.
8. *E. I. Khukhro, V. D. Mazurov*, Finite groups with an automorphism of prime order whose centralizer has small rank, J. Algebra, **301**, No. 2 (2006), 474—492.
9. *E. I. Khukhro, V. D. Mazurov*, Automorphisms with centralizers of small rank, in: C. M. Campbell (ed.) et al., Groups St. Andrews 2005, Vol. II, Sel. papers conf. (St. Andrews, UK, July 30-August 6, 2005), (London Math. Soc. Lecture Note Ser., **340**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2007, 564—585.
10. *В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро*, Группы с автоморфизмом простого порядка, ранг централизатора которого ограничен, ДАН, **402**, № 6 (2005), 740—742.
11. *В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро*, О группах, допускающих группу автоморфизмов, ранг централизатора которой ограничен, Сиб. электрон. матем. изв., **3** (2006), 257—283; `http://semr.math.nsc.ru/v3/p257-283.pdf`
12. *D. J. S. Robinson*, A course in the theory of groups (Grad. Texts Math., **80**), New York, NY, Springer-Verlag, 1995.
13. *Y. M. Wang, Z. M. Chen*, Solubility of finite groups admitting a coprime order operator group, Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., A 7, No. 3 (1993), 325—331.
14. *A. Turull*, Fitting height of groups and of fixed points, J. Algebra, **86** (1984), 555—566.
15. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, On finite groups with an automorphism of prime order whose fixed points have bounded Engel sinks, Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.), **53**, No. 1 (2022), 33—47.
16. *C. Acciarri, E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, Profinite groups with an automorphism whose fixed points are right Engel, Proc. Am. Math. Soc., **147**, No. 9, 3691—3703 (2019).
17. *C. Acciarri, P. Shumyatsky, D. S. da Silveira*, On groups with automorphisms whose fixed points are Engel, Ann. Matem. Pura Appl. (4), **197**, No. 1 (2018),

307—316.

18. *C. Acciarri, P. Shumyatsky, D. Silveira*, Engel sinks of fixed points in finite groups, J. Pure Appl. Algebra, **223**, No. 11 (2019), 4592—4601.
19. *C. Acciarri, D. S. da Silveira*, Profinite groups and centralizers of coprime automorphisms whose elements are Engel, J. Group Theory, **21**, No. 3 (2018), 485—509.
20. *C. Acciarri, D. Silveira*, Engel-like conditions in fixed points of automorphisms of profinite groups, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **199**, No. 1 (2020), 187—197.
21. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, On profinite groups with automorphisms whose fixed points have countable Engel sinks, Israel J. Math., **247**, No. 1 (2022), 303—330.
22. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, Almost Engel finite and profinite groups, Int. J. Algebra Comput., **26**, No. 5 (2016), 973—983.
23. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, Almost Engel compact groups, J. Algebra, **500** (2018), 439—456.
24. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, Finite groups with Engel sinks of bounded rank, Glasg. Math. J., **60**, No. 3 (2018), 695—701.
25. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, Compact groups in which all elements are almost right Engel, Q. J. Math., **70**, No. 3 (2019), 879—893.
26. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, Compact groups with countable Engel sinks, Bull. Math. Sci., **11**, No. 3, Article ID 2050015, 28 p. (2021).
27. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky*, Compact groups in which all elements have countable right Engel sinks, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math., **151**, No. 6 (2021), 1790—1814.
28. *E. I. Khukhro, P. Shumyatsky, G. Traustason*, Right Engel-type subgroups and length parameters of finite groups, J. Aust. Math. Soc., **109**, No. 3 (2020), 340—350.
29. *J. S. Wilson, E. I. Zelmanov*, Identities for Lie algebras of pro-p groups, J. Pure Appl. Algebra, **81**, No. 1 (1992), 103—109.
30. *Е. С. Голод*, О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах, Изв. АН СССР. Сер. матем., **28**, № 2 (1964), 273—276.
31. *L. G. Kovács*, On finite soluble groups, Math. Z., **103** (1968), 37—39.
32. *R. M. Guralnick*, On the number of generators of a finite group, Arch. Math., **53**, No. 6 (1989), 521—523.

33. *A. Lucchini*, A bound on the number of generators of a finite group, Arch. Math., **53**, No. 4 (1989), 313—317.
34. *P. Longobardi, M. Maj*, On the number of generators of a finite group, Arch. Math., **50**, No. 2 (1988), 110—112.
35. *Ю. М. Горчаков*, О существовании абелевых подгрупп бесконечного ранга в локально разрешимых группах, Докл. АН СССР, **156**, № 1 (1964), 17—20.
36. *Ю. И. Мерзляков*, О локально разрешимых группах конечного ранга, Алгебра и логика, **3**, № 2 (1964), 5—16.
37. *J. E. Roseblade*, On groups in which every subgroup is subnormal, J. Algebra, **2** (1965), 402—412.
38. *H. Heineken*, Eine Bemerkung über engelsche Elemente, Arch. Math., **11** (1960), 321.
39. *B. Huppert*, Endliche Gruppen. I. (Grundlehren Math. Wiss., **134**), Berlin a.o., Springer-Verlag, 1967.
40. *R. M. Guralnick, G. Tracey*, On the generalized Fitting height and insoluble length of finite groups, Bull. Lond. Math. Soc., **52**, No. 5 (2020), 924—931.
41. *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson*, Atlas of finite groups, Oxford, Clarendon Press, 1985.
42. *D. Gorenstein*, Finite groups, 2nd ed., Chelsea Publ. Co., 1980.

Поступило 28 декабря 2022 г.

Окончательный вариант 30 октября 2023 г.

Адреса авторов:

ХУХРО Евгений Иванович,

Charlotte Scott Research Centre for Algebra, Univ. Lincoln, Lincoln, UK;

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, РОССИЯ.

e-mail: khukhro@yahoo.co.uk

ШУМЯЦКИЙ Павел, Dep. Math., Univ. Brasilia, Brasilia, BRAZIL. e-mail: pavel@unb.br