Труды Математического института АН СССР
1985, том 172

УДК 517.518.232+517.986.7

А. П. ТЕРЕХИН

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ СМЕШАННОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ГЛАДКОСТИ

Пусть B — (действительное или комплексное) банахово пространство, P_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$,— действующие в нем операторы, порождающие сильно непрерывные полугруппы операторов $T_i(t_i)$, $0 \leqslant t_i < \infty$ (по поводу определений см., например, [1, с. 654, 659]).

Полугрупповые операторы предполагаем *коммутативными*:

$$T_i(t_i)\,T_k(t_k) = T_k(t_k)\,T_i(t_i) \qquad (\forall i, k \in \{1, \ldots, n\});$$

это равносильно допущению, что каждая полугруппа операторов T_i является частной по отношению к некоторой n-параметрической полугруппы операторов $T(t)$, $t \in [0, \infty)^n$: $T_i(t_i) = T(t_i)$; понятно, что $T(t) = \prod_i T_i(t_i)$.

Кроме того, потребуем *ограниченность* полугрупп операторов, т. е. существование таких постоянных C_i, что $\| T_i(t_i) \| \leqslant C_i$. Не нарушая общности, можно считать $C_i = 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Это достигается эквивалентной перенормировкой пространства:

$$\| f \|' = \sup_t \| T(t) f \|, \qquad \| f \| = \| T(0) f \| \leqslant \| f \|' \leqslant \Big(\prod_i C_i\Big) \| f \|;$$

тогда

$$\| T(s) f \|' = \sup_t \| T(t)\,T(s) f \| = \sup_t \| T(t+s) f \| \leqslant \| f \|'.$$

Для r, $k \in \boldsymbol{Z}_0^n$ положим

$$\Delta^k(t) = \prod_i [T_i(t_i) - I]^{k_i},$$

P^r — замыкание произведения $P_1^{r_1} \ldots P_n^{r_n}$ (о допустимости замыкания см. [2]).

З а д а ч а. *Модуль непрерывности* $\| P^r \Delta^k(t) f \|$ *мультипликативно оценить подходящими функционалами от модулей непрерывности* $\| P^s \Delta^m(t) f \|$ *заданной конечной совокупности.*

Задача равносильна (решение одной задачи дает решение другой) своему частному случаю — с $B = C(R^n)$, частным дифференцированием P_i с производными из $C(R^n)$ и частными сдвигами $T_i(t_i)$; в то же время задача охватывает пространства $L_p(R^n)$, $p \in [1, \infty]^n$, дифференциальные операторы P_i, которые производят полугруппы, и другие пространства и операторы.

Для пространств L_p известно принципиальное отличие в мультипликативных оценках для параметров $p \in (1, \infty)$ и $p = 1, \infty$. В первом случае соответствующую задачу можно считать решенной: имеются окончательные оценки норм смешанных производных (причем в разных смешанных метриках L_p),

кроме того, О. В. Бесов установил эквивалент этих оценок для смешанных модулей гладкости, см. [3, с. 463].

Приводимые здесь оценки имеют две особенности: общность пространства и особенность мультипликативного неравенства (A), на базе которого эти оценки получаются, в частности вхождение каждого модуля непрерывности $\| P^s\Delta^m(t) f \|$ со своим интегральным оператором, см. оценку (8) теоремы и оценки ее следствий. О мультипликативных оценках другого характера см. [3].

Автор благодарен О. В. Бесову за внимательное прочтение рукописи и ряд сделанных замечаний к ней.

Обозначения. В дальнейшем нас будет интересовать не принадлежность вектора множеству $D(P^r\Delta^k(t))$ с фиксированным мультипараметром t, а лишь принадлежность общей части множеств

$$D(P^r\Delta^k) = \bigcap_{t\in R^n_+} D(P^r\Delta^k(t)).$$

Далее, обозначаем:

J^t_e, $J^k_{t_e}$, J_e, $e \subset \{1, \ldots, n\}$ — интегральные операторы над вещественными функциями, действующие при $n = 1$ соответственно по формулам:

$$J^t[u(t)] = \int_0^t u(\xi)\frac{d\xi}{\xi} = \int_0^1 u(t\xi)\frac{d\xi}{\xi},$$

$$J^k_t[u(t)] = t^k\int_t^\infty \xi^{-k}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi} = \int_1^\infty \xi^{-k}u(t\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \qquad J[u(t)] = \int_0^\infty u(\xi)\frac{d\xi}{\xi};$$

при любом натуральном n вводимые операции определяются как прямые произведения соответственно операторов $J^{t_i}_i$, $J^{k_i}_{t_i}$, J_i по $i \in e$; $J^t_\varnothing = J^k_{t_\varnothing} = J_\varnothing = I$;

$t^\alpha = \prod_i t_i^{\alpha_i}$ $(t_i > 0, \alpha_i \in R)$;

$e_r = \{i \mid r_i \neq 0\}$;

$\delta(r) = (\chi_{e_r}(i))$, χ_{e_r} — характеристическая функция множества e_r;

$r^e = (r_i\chi_{e_r}(i)$;

$D(P^r\Delta_{e_k}) = D(P^r\Delta^{\delta(k)})$;

$\leqslant$ — символ, означающий неравенство с не зависящим от t и f коэффициентом.

Наконец, пишем

e_1e_2 вместо $e_1 \cap e_2$;

$e_1 + e_2$ вместо $e_1 \cup e_2$ в случае непересекающихся e_1 и e_2;

$r \leqslant k$, $r < k$, если соответственно $r_i \leqslant k_i$, $r_i < k_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$;

$r \leqslant k$, $r < k$, $r = k$ на e, если соответствующие соотношения выполнены для компонент с номерами $i \in e$;

$\{r < k\} = \{i \mid r_i < k_i\}$, аналогично с другими соотношениями.

Решение поставленной задачи будет основано на следующих двух неравенствах.

Теорема А [4]. *Пусть $a \in R^n$, конечные семейства (e_j, a^j) и (λ_j), $j \in J$, подмножеств $e_j \subset \{1, \ldots, n\}$, векторов $a^j \in R^n$ с $e_{a^j} \subset e_j$ и чисел $\lambda_j > 0$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\sum \lambda_j = 1$;

2) $\sum \lambda_j a^j = a$;

3) *для всякого* $j \in J$

$$\operatorname{rang} \| a_i^s \|_{i \in e_j}^{s \in J'} = | e_j' | \qquad (e' = \{1, \ldots, n\} \setminus e).$$

Тогда существует константа C *такая, что если* $(\forall j \in J)$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i$ *и* φ_j *не зависит от переменных* t_i *с* $i \notin e_j$, *то*

$$\int\limits_{R_+^n} \varphi(t) \prod_{i=1}^{n} t_i^{a_i - 1} dt_i \leqslant C \prod_{j \in J} \Big[\int\limits_{R_+^{e_i}} \varphi_j(t) \prod_{i \in e_j} t_i^{a_i^j - 1} dt_i \Big]^{\lambda_j}. \tag{A}$$

При этом

$$C = \prod_{j \in J} (\lambda_j | \Delta_i |)^{-\lambda_j},$$

где Δ_j — *наибольший базисный минор матрицы* $\| \lambda_s a_i^s \|_{i \in e_j'}^{s \in J}$ (*для* $e_j' = \varnothing$ *считаем* $\operatorname{rang} = 0$ *и* $\Delta_j = 1$); $R_+^e = \{x > 0 \mid e_x \subset e\}$.

Теорема B. *Полагая* $a = e_k \{r > s\}$, $b = e_k \{r + k < s + m\}$, *имеем*

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \ll \underset{e_m \setminus e_k}{J} \underset{a}{J^t} \underset{b}{J_t^k} [t^{s-r} \| P^s \Delta^m (t) f \|], \tag{B}$$

причем $f \in D(P^r \Delta_{e_k})$, *если* $f \in D(P^s \Delta^m)$ *и конечна правая часть оценки. Оценка содержательна* (*для достаточно гладких* f *правая часть конечна*), *если* $r \leqslant s + m - \delta(m)$, $r + k \geqslant s + \delta(m)$.

Замечание. Если последние неравенства не выполняются, то в общем случае оценка модуля непрерывности $\| P^r \Delta^k (t) f \|$ модулем непрерывности $\| P^s \Delta^m (t) f \|$ невозможна, что уже известно для $C(R)$ и операторов сдвига. Оценка (B) содержит в себе: очевидную оценку

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \ll t^{s-r} \| P^s \Delta^m (t) f \|, \qquad r \leqslant s, \qquad r + k \geqslant s + m;$$

оценку типа оценок Маршо

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \ll J_t^k [t^{s-r} \| P^s \Delta^m (t) f \|], \qquad r \leqslant s < r + k < s + m;$$

известную в однопараметрическом случае и распространенную Головкиным [5] на многопараметрические полугруппы оценку

$$\| P^r f \| \ll J [t^{s-r} \| P^s \Delta^m (t) f \|], \qquad s < r < s + m;$$

другую оценку типа оценок Маршо (см. [2])

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \ll J^t [t^{s-r} \| P^s \Delta^m (t) f \|], \qquad s < r < s + m \leqslant r + k.$$

Нетрудно убедиться в равносильности оценки (B) совокупности названных оценок. В дополнение к ним можно указать еще одну оценку с последним возможным условием для всех компонент мультипараметров:

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \ll J^t J_t^k [t^{s-r} \| P^s \Delta^m (t) f \|], \qquad s < r < r + k < s + m.$$

Здесь в правой части повторное интегрирование по каждой переменной можно заменить суммой двух однократных интегралов и прийти к функционалу

$$\sum_{e} \underset{e}{J^t} \underset{e'}{J_t^k} [t^{s-r} \| P^s \Delta^m (t) f \|].$$

Это относится и к функционалу по общим переменным с номерами из ab в оценке (B).

Переходим к формулировке условий искомой мультипликативой оценки.

Пусть $E = \{(s, m)\}$ — заданная совокупность пар мультипараметров s и m с целыми неотрицательными компонентами;

$$\lambda_{sm} > 0, \sum \lambda_{sm} = 1 \quad ((s, m) \in E);$$

$$d_r = \bigcup_E \{r > s + m - \delta(m)\} = \{r > \min(s + m - \delta(m))\},$$

$$d_{r,k} = \bigcup_E \{r + k < s + \delta(m)\} = \{r + k < \max(s + \delta(m))\},$$

max и min берутся покомпонентно по всем $(s, m) \in E$;

$$e_E = (\bigcup_E e_m)(d_r \cup d_{r,k}),$$

$$e'_E = (d_r \cup d_{r,k}) \setminus e_E;$$

$e(r) = e_r$ (новое обозначение применяем к векторам с индексами).

Множества d_r и $d_{r,k}$ по определению те, на которых для (r, k) и какой-нибудь пары (s, m) нарушены соответствующие условия теоремы B (наиболее содержательный случай искомой мультипликативной оценки).

Условиями мультипликативной оценки будут следующие:

$$r < \sum \lambda_{sm}(s + m) \quad \text{на} \quad \bigcup_E \{r \neq s\}, \tag{1}$$

$$r + k > \sum \lambda_{sm} s \quad \text{на} \quad \bigcup_E \{r + k \neq s\} \supset \bigcup_E e_m, \tag{2}$$

$$e_k \supset e_s e'_m (d_r \cup d_{r,0}) \quad (\forall (s, m) \in E). \tag{3}$$

Включение в (2) также является условием.

Условия (1) и (2) — аналоги соответствующих условий теоремы B. Условие (3) исключает мультипликативное неравенство для смешанных производных без разностей, которое в общем случае пространств при названных условиях не имеет места.

Здесь, как и вообще в подобных вопросах, известную роль играет выпуклая оболочка, в данном случае — множества пар:

$$M = \operatorname{conv}\{(s, m)\} = \{(\tilde{s}, \tilde{m}) \mid (\exists \mu_{sm} \geqslant 0, \sum \mu_{sm} = 1)(\tilde{s}, \tilde{m}) = \sum \mu_{sm}(s, m)\}.$$

Для нахождения по заданной совокупности $\{(s, m)\}$ множества допускающих мультипликативную оценку (8) пар (r, k) можно поступить следующим образом.

Выпуклую оболочку M расщепить по $F \subset \{(s, m)\}$ на подмножества M_F тех пар $(\tilde{s}, \tilde{m})$, которые имеют F носителем своих коэффициентов некоторой выпуклой комбинации. Тогда искомым множеством пар (r, k) будет объединение множеств R_F пар (r, k), удовлетворяющих с некоторой парой $(\tilde{s}, \tilde{m}) \in M_F$ и соответствующими парами (s, m) условиям (1)—(3).

При выбранной паре (r, k) условия (1)—(3) можно формулировать следующим эквивалентным образом: на $d_r \cup d_{r,k}$

$$r < \sum \lambda_{sm}(s + m), \tag{1'}$$

$$r + k > \sum \lambda_{sm} s, \tag{2'}$$

$$e_k \supset e_s e'_m \quad (\forall (s, m) \in E). \tag{3'}$$

Для доказательства эквивалентности проверим сначала следование (1′), (2′) из (1), (2).

Во-первых, убедимся, что $\bigcup_E \{r \neq s\} \supset d_r \cup d_{r,k}$, т. е. $\bigcap_E \{r = s\} \subset d'_r \cap \cap d'_{r,k}$ (тогда ввиду (1) получим (1′)). Включение в d_r', а также в $d'_{r,k}$ порций

из e_k, очевидны; в e'_k еще надо учесть, что на e'_k $(\bigcap_E \{r = s\})$, в силу включения (2), $m \equiv 0$ и снова пусто пересечение $\bigcap_E\{r = s\}$ с $e'_k d_{r,k}$.

Во-вторых, докажем, что $\bigcup_E \{r + k \neq s\} \supset d_r \bigcup d_{r,k}$, т. е. $\bigcap_E\{r + k = s\} \subset d'_r \bigcup d'_{r,k}$ (ввиду (2) получим (2′)). Включение в d'_r опять-таки очевидно, в случае же с $d'_{r,k}$ учтем тождество $m \equiv 0$ на $\bigcap_E\{r + k = s\}$, вытекающее из включения (2).

Проверим обратное: из (1′), (2′) следуют (1), (2).

На d'_r для всех $(s, m) \in E$ $r \leqslant s + m - \delta(m)$, откуда получаем (1′) на $\bigcup_E e_m$, на $(\bigcap_E e'_m)(\bigcup_E\{r \neq s\})$, и, во всяком случае, на $\bigcup_E\{r \neq s\}$; все множества рассматриваются в порции с d'_r. Таким образом, из выполнения неравенства (1′) только на d_r вытекает его выполнение на $\bigcup_E\{r \neq s\}$, т. е. (1).

Аналогично, на $d'_{r,k}$ для всех $(s, m) \in E$ $r + k \geqslant s + \delta(m)$, откуда получаем (2′) на $\bigcup_E\{r + k \neq s\}$. Осталось в (2) проверить включение $\bigcap_E\{r + k = s\} \subset \bigcup_E e'_m$. Но в силу (2′) тождество $s \equiv r + k$ возможно лишь в множестве $d'_r \bigcap d'_{r,k}$, а в $d'_{r,k}$ $r + k \geqslant s + \delta(m)$, откуда $\delta(m) \equiv 0$, что и требуется.

Наконец, эквивалентны (3′) и (3), поскольку их включения равносильны соответствующим равенствам $(d_r \bigcap d_{r,k})\, e'_k e_s e'_m = \phi$, $(d_r \bigcup d_{r,0})\, e'_k e_s e_m = \phi$, в которых $e'_k d_{r,k} = e'_k d_{r,0}$. Эквивалентность условий (1)—(3) и (1′)—(3′) доказана.

Условия в форме (1)—(3) используем в формулировке основной теоремы как более естественные для проверки (особенно с невыбранными r и k). Условия в форме (1′)—(3′) применяем в доказательстве теоремы, где рассуждения касаются, по существу, множества $d_r \bigcup d_{r,k}$ и соответствующие неравенства становятся выполненными всюду на множестве, что упрощает их использование. При доказательстве не делаем ссылок на эквивалентность названных условий.

Наконец, отметим, что сформулированные условия будут применяться раздельно на множествах e_E и e'_E, причем (3) — лишь на e_E (на e'_E оно является очевидным следствием (1) и (2)). Неравенство (1) на e'_E имеет вид

$$r < \sum \lambda_{sm} s.$$

Теорема 1. *В условиях* (1)—(3), *выполненных на* e_E, *для каждой пары* $(s, m) \in E$ *существует конечное семейство* (*сколь угодно мало отличающихся друг от друга*) *пар* (r^j, k^j) *мультипараметров* r^j *с неотрицательными* (*необязательно целочисленными*) *компонентами и мультипараметров* k^j *с произвольными компонентами, семейство чисел* $\lambda_j > 0$, $j \in \{j\}_{sm}$, *причем названные семейства таковы, что на* e_E *имеют место следующие соотношения*:

для всех $j \in \{j\}_{sm}$

$$r^j < s + m \text{ на } e(r^j) \equiv e(s + m)\, d, \qquad d = e_E(d_r \bigcup e'_k d_{r,k}), \tag{4}$$

$$r^j + r^{d'} + k^j > s \text{ на } e(s + m)\, c, \qquad c = e_E(d_{r,k} \bigcup e'_k d_r),$$

$$e(k^j) \subset b \equiv e_k c; \tag{5}$$

кроме того,

$$\lambda_{sm} = \sum_{\{j\}_{sm}} \lambda_j, \qquad r^d = \sum_{\{j\}} \lambda_j r^j, \qquad k^b = \sum_{\{j\}} \lambda_j k^j \tag{6}$$

($\{j\} = \bigcup_E \{j\}_{sm}$, *множества* $\{j\}_{sm}$ *подразумеваются попарно непересекающимися*); *наконец*,

$$\forall (e \subset bd,\ (s, m) \in E)\ \operatorname{rang} \| r^j + (k^j)^{b \setminus e} \|_{(b \cup d) e' (s+m)} = \\ = |(b \bigcup d)\, e'\, (s + m)|. \tag{7}$$

Если помимо (1)—(3)

$$(\forall\ (s, m) \in E)\, \mathrm{rang}\, \| s + m \|_{(b \cup d) e' s(+m)} = |\, (b \cup d)\, e'\, (s + m)\, |, \qquad (7')$$

то существуют одноэлементные семейства со свойствами (4)—(7).

2. *При выполнении на* e_E *соотношений* (4)—(7), *а на* e'_E — (1) *и* (2), *имеем*

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \ll \prod_E \prod_{\{j\}_{sm}} \{ \underset{e_m \setminus e_k}{J} \underset{a_{sm}}{J^t} \underset{b_{sm}}{J_t^{\bar{k}^j}} [t^{s-\bar{r}^j} \| P^s \Delta^m (t) f \|] \}^{\lambda_j}, \qquad (8)$$

где $a_{sm} = e_m e_k\, (d_r \cup \{r > s\})$, $b_{sm} = e_m e_k\, (d_{r,k} \cup \{r + k < s + m\},)$ $\bar{r}^j = r^j \oplus r^{d'}$, $\bar{k}^j = k^j \oplus (k + r^d)^{b'}$.

Доказательство. 1. Доказываем существование названных в теореме семейств. Сначала для каждой пары (s, m) укажем векторы r^{sm} и k^{sm}, удовлетворяющие условиям (4)—(6) с $\lambda_j = \lambda_{sm}$.

Максимальное множество номеров, которых, по существу, касаются условия (4)—(7),— это множество $b \cup d$. Ниже ограничиваемся только номерами из этого множества.

Заметим, что

$$b \cup d \subset \cup_E e(s + m), \qquad (9)$$

$$d \subset e_r. \qquad (10)$$

Включение (9) вытекает из (1′). Включение (10) очевидно на d_r, а в $d_{r,k}$ ввиду (2′), $e'_k e'_r = \phi$, т. е. $d_{r,k} e'_k \subset e_r$; тогда $d = d_r \cup d_{r,k} e'_k \subset e_r$.

Построение осуществляем сначала на множестве d. Векторы ищем в виде

$$r^{sm} = \alpha s + \beta m, \qquad k^{sm} = (\alpha s + \beta m)\, k : r \qquad (11)$$

с векторными коэффициентами, общими для всех $(s, m) \in E$ (ввиду (10) $r > 0$); $\alpha s = (\alpha_i s_i)$, $k : r = (k_i / r_i)$.

Удовлетворим равенству для r в (6):

$$r = \alpha \tilde{s} + \beta \tilde{m}, \qquad (12)$$

где

$$\tilde{s} = \sum \lambda_{sm} s, \qquad \tilde{m} = \sum \lambda_{sm} m.$$

Равенство для k в (6) выполнится автоматически за счет выбора коэффициента $k : r$ в (11).

Подбираем, далее, коэффициенты α, β в (11) так, чтобы удовлетворить неравенствам (4), (5).

На $e'\, (\tilde{s})$ согласно (12) $\beta = r : \tilde{m}$. Так как на d $r > 0$ (10), на $e'\, (\tilde{s})$ $r < \tilde{m}$ (1′), то $0 < \beta < 1$. Следовательно,

$$r^{sm} < m = s + m \text{ на } e\, (s + m),$$

$$r^{sm} + k^{sm} > 0 = s \text{ на } e\, (m) = e\, (s + m).$$

Требования (4), (5) на $e'\, (\tilde{s})$ удовлетворены.

Переходя к множеству $e\, (\tilde{s})\, e\, (\tilde{m})$, сначала обратимся к его порции в e'_k. Здесь положим $\alpha = 1$; тогда по формуле (12) найдем $\beta = (r - \tilde{s}) : \tilde{m}$. В силу (1′) и (2′) $\tilde{s} < r < \tilde{s} + \tilde{m}$; значит, $0 < \beta < 1$.

В таком случае

$$r^{sm} = s + \beta m < s + m \text{ на } e\, (m) = e\, (s + m),$$

$$r^{sm} + k^{sm} = r^{sm} > s \text{ на } e\, (m) = e\, (s + m).$$

Равенство для $e\, (m)$ объясняется включением $e_m \supset e_s$, верным на $d e'_k \subset e_E e'_k$ ввиду (3′). Таким образом, соотношения (4), (5) имеют место и на множестве $e\, (\tilde{s})\, e\, (\tilde{m})\, e'_k$.

На $e_k e(\tilde{s})\, e(\tilde{m})$ выберем α из условия

$$\max(r:(r+k),\ (r-\tilde{m}):\tilde{s}) < \alpha < \min(1,\ r:\tilde{s}).$$

Такое α существует: $r:(r+k)<1$, поскольку $k>0$; $(r-\tilde{m}):\tilde{s}<r:\tilde{s}$, так как $\tilde{m}>0$; $r:(r+k)<r:\tilde{s}$ ввиду (2′); наконец, $(r-\tilde{m}):\tilde{s}<1$ в силу (1′).

Согласно (12) $\beta\tilde{m} = r - \alpha\tilde{s}$, откуда $\beta>0$, поскольку $\alpha<r:\tilde{s}$, и $\beta<1$, так как $\alpha\tilde{s}>r-\tilde{m}$.

Но при таких коэффициентах (см. (11))

$$r^{sm} = \alpha s + \beta m < s + m \text{ на } e(s+m),$$

$$r^{sm} + k^{sm} = s\alpha(1+k:r) + m\beta(1+k:r) > s \text{ на } e(s+m).$$

Неравенства (4), (5) выполнены и на $e_k e(\tilde{s})\, e(\tilde{m})$. Теперь это означает их выполнение на $(e(\tilde{s}) \cup e(\tilde{m}))\, d$, а, значит, ввиду (9) на d. Построение на d векторов r^{sm}, k^{sm} со свойствами (4), (5) закончено.

На bd' вектор k^{sm} ищем в виде

$$k^{sm} = \alpha s + \beta m - r. \tag{13}$$

Для выполнения равенства (6) необходимо, чтобы

$$r + k = \alpha\tilde{s} + \beta\tilde{m}.$$

На $e(\tilde{s})\, e'(\tilde{m})$ имеем $\alpha = (r+k):\tilde{s}$, на $e(\tilde{m})\, e'(\tilde{s})$ $\beta = (r+k):\tilde{m}$. На $e(\tilde{s})\, e(\tilde{m})$ коэффициент α выберем из условия $1<\alpha<(r+k):\tilde{s}$ (выбор возможен ввиду (2′)); тогда $\beta = (r+k-\alpha\tilde{s}):\tilde{m}$. Во всех случаях $\alpha>1$ на $e(\tilde{s})$ и $\beta>0$ на $e(\tilde{m})$. С такими коэффициентами на bd'

$$r + k^{sm} = \alpha s + \beta m > s \text{ на } e(s+m).$$

Итак, требованиям (4), (5) векторы r^{sm} и k^{sm} полностью удовлетворяют. Требованию же представительности (7) они могут не удовлетворять.

Чтобы исправить положение, для вектора $\alpha s + \beta m - r^{d'}$, с определенными выше коэффициентами, найдем полное в подпространстве $R^c \equiv \{x \in R^n \mid e_x \subset c\}$, $c = e(s+m) \cup e_r d'$, семейство векторов p^j с $e(p^j) \supset e(s+m)$, достаточно близких к $\alpha s + \beta m - r^{d'}$ (условия близости определим чуть позже) и таких, что

$$\alpha s + \beta m - r^{d'} = \sum \mu_j p^j \tag{14}$$

с некоторыми $\mu_j>0$, $\Sigma\mu_j = 1$. Положим в соответствии с (11) и (13)

$$r^j = p^j \text{ и } k^j = p^j k : r \text{ на } d, \qquad k^j = p^j \text{ на } bd'. \tag{15}$$

Векторы p^j считаем настолько близкими к $\alpha s + \beta m - r^{d'}$, что для r^i и k^j останутся выполненными неравенства (4), (5) — неравенства строгие, поэтому нужные p^j существуют.

Согласно (11), (13), (15)

$$r^{sm} = \sum \mu_j r^j, \qquad k^{sm} = \sum \mu_j k^j. \tag{16}$$

Заменим векторы r^{sm} и k^{sm} семействами r^j и k^j, число λ_{sm} — числами $\lambda_j = \mu_j \lambda_{sm}$.

Равенства (6), очевидно, выполнены. Проверим полноту в R^c сумм $r^j + (k^i)^{b\setminus e}$.

Названные суммы имеют вид $p^j\gamma_e$ с вектор-коэффициентом $\gamma_e>0$: ввиду (15) на d $\gamma_e = 1 + (k:r)^{b\setminus e}$, на bd' $\gamma_e = 1$. Тогда

$$\operatorname{rang} \| p^j\gamma_e \| = \operatorname{rang} \| p^j \|,$$

и нужная полнота следует из полноты p^j. В частности, если суммы $s+m$ удовлетворяют требованию (7′), то ему будут удовлетворять и суммы $\alpha s +$

$+ \beta m - r^{d'}$ с варьированными, быть может, α и β. В этом случае вектор p^j можно брать в единственном числе.

В общем случае объединение всех семейств будет полным в $R^{b \cup d}$ ввиду (9). Этого более чем достаточно для выполнения свойства (7).

Из равенств (6) для r^{sm} и k^{sm} и равенств (16) следуют равенства (6) для r^j и k^j. Первая часть теоремы доказана.

2. Доказываем вторую часть теоремы — неравенство (8). Множества d и b считаем пока распространенными и на e'_E: $d = d_r \cup d_{r,k} e'_k$, $b = e_k d_{r,k}$.

Полагая $(s^j, m^j) = (s, m)$ для $j \in \{j\}_{sm}$, занумеруем единым образом все мультипараметры правой части (8).

Применим теорему B с $s = r^{d'}$ и $m = \max (s^j + m^j) - r^{d'}$ на $d_r e'_k \cup d_{r,k}$, $m = k + r^d$ на $(d_r e'_k \cup d_{r,k})'$. Имеем $e_m = d \cup e_k$. Действительно, с одной стороны, $e_m \subset d_r e'_k \cup d_{r,k} \cup e_k \cup d = (d_r \cup d_{r,k}) e'_k \cup e_k \cup d = e_k \cup d$ в силу того, что $(d_r \cup d_{r,k}) e'_k \subset d$. Покажем, что, с другой стороны, $m > 0$ на $d \cup e_k$.

На $d\,(d_r e'_k \cup d_{r,k})$ $m = \max (s^j + m^j) > 0$, так как $\bigcup_j e\,(s^j + m^j) \supset d$: на e_E в силу требования (7), использованного с $e = bd$, имеем $\bigcup_j (e\,(r^j) + b \setminus d) \supset (b \cup d)\, e'\,(s + m)$, откуда $\bigcup_j e\,(r^j) \supset de'\,(s + m)$ и ввиду (4) $\bigcup_j e\,(s^j + m^j) \supset d$; в e'_E последнее даст (9). Далее, на $d\,(d_r e'_k \cup d_{r,k})'$ $m = k + r > 0$, так как на $dr > 0$; ввиду (6), (4) и доказанного выше включения в e_E будем иметь $de_r = \bigcup_j e\,(r^j) = \bigcup_j e\,(s^j + m^j)\, d \supset d$, откуда $e_r \supset d$; в e'_E то же дает (10). Наконец, на $e_k d'\,(d_r e'_k \cup d_{r,k}) = e_k d' d_{r,k}$ $m \geqslant \max (s^j + \delta\,(m^j)) - r > k > 0$ по определению $d_{r,k}$ и e_k; на $e_k d'\,(d_r e'_k \cup d_{r,k})'$ $m = k > 0$.

По теореме B (с эквивалентной правой частью)

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \ll \sum_{\substack{e \subset ab \\ e' = ab \setminus e}} J_{e_m \setminus e_k} J^t_{a \setminus e'} J^k_{t\, b \setminus e} [t^{-r^d} \| P^{r^{d'}} \Delta^m (t) f \|], \tag{17}$$

где $a = e_k \{r > r^{d'}\}$, $b = e_k \{r + k < r^{d'} + m\}$. Ввиду того что $e_r \supset d$ (см. абзац выше), $a = e_k d$. Множество b совпадает с распространенным множеством b из условия теоремы:

$$e_k \{r + k < r^{d'} + m\} = (d_r e'_k \cup d_{r,k})\, e_k\, \{r + k < \max (s^j + m^j)\} = e_k d_{r,k}.$$

Здесь учли определение m и включение $d_{r,k} \subset \{r + k < \max (s^j + m^j)\}$.

Норму в правой части (17) оценим также по теореме B:

$$\| P^{r^{d'}} \Delta^m (t) f \| \ll J_{e(m^j) \setminus e_m} J^t_{a_j} J^m_{t\, b_j} [t^{s^j - r^{d'}} \| P^{s^j} \Delta^{m^j} (t) f \|], \tag{18}$$

$a_j = e_m \{r^{d'} > s^j\}$, $b_j = e_m \{r^{d'} + m < s^j + m^j\}$. Имеем

$$a_j = e_m d' \{r > s^j\} = e_k d' \{r > s^j\}. \tag{19}$$

В силу выбора m $b_j\,(d_r e'_k \cup d_{r,k}) = \varnothing$. Следовательно, на b_j $m = k + r^d$ и

$$b_j = e_k\,(d'_r \cup e_k)\, d'_{r,k}\, \{r + k < s^j + m^j\} = e_k d'_{r,k}\, \{r + k < s^j + m^j\}. \tag{20}$$

Учли также, что вне de'_k и, следовательно, вне $d_r e'_k \cup d_{r,k}$ $e_m = e_k$.

В каждом из интегралов в (17) выделим внешний интеграл по переменным с номерами из множества $\bigcap_j e'(m^j)$, а к внутреннему — по $\bigcup_j e\,(m^j)$ — применим мультипликативное неравенство (A) с оценками (18) подынтегральной функции, семействами мультипоказателей $-r^j - (k^j)^{b \setminus e}$ и множеств $e_j = e\,(s^j + m^j)$ (на самом деле играют роль их порции в $d \cup b$); мультипоказатель степени во внутреннем интеграле (17) равен $-r^d - k^{b \setminus e}$ $(J^k_t = t^k J^0_t\, [t^{-k} \cdot])$.

В $\bigcup_j e(m)$ множества b и d совпадают с соответствующими множествами из условия теоремы. Далее, до определенного момента ограничиваемся только номерами из $\bigcup_j e(m^j)$.

Мажоранты (18) не зависят от переменных с номерами $i \notin e_j$, поскольку это так для части e_j — множества $c_j \equiv e(m^j)\, e_m \bigcup \{r^{d'} \neq s^j\}$ (явно не учтенные в c_j множества a_j и b_j содержатся в c_j: $a_j \subset \{r^{d'} \neq s\}$ (см. (19)), $b_j \subset e(m^j)\, e_m$, потому что на $d'_{r,k}$ $r + k \geqslant s^j + m^j$, что вместе с неравенством $r + k < s^j + m^j$ возможно лишь при $m^j > 0$ (см. (20)).

Выполнение остальных условий мультипликативного неравенства непосредственно обеспечивают равенства в (4), (5), (6) и условие (7) доказываемой теоремы. ∎

Согласно мультипликативному неравенству для интеграла (17) по $\bigcup_j e(m^j)$ получим такую мажоранту:

$$\prod_j \{ \underset{e_j(e_m \setminus e_k}{J} \underset{a \setminus e'}{J^t} \underset{b \setminus e)}{J_t^{k^j}} t^{-r^j} \underset{e(m^j) \setminus e_m}{J} \underset{a_j}{J^t} \underset{b_j}{J_t^{k+r^d}} [t^{s^j - r^{d'}} \| P^{s^j} \Delta^{m^j}(t) f \|] \}^{\lambda_j}. \tag{21}$$

В функционалах правой части освободимся от переменных с номерами $i \notin e(m^j)$. В трех внутренних функционалах таких номеров нет: для b_j это уже отмечалось, а в a_j их нет из-за невозможности неравенства $r > s^j$ на $e_k d' e'(m^j)$ (на $e_k d'$ $r \leqslant s^j + m^j - \delta(m^j)$). Переменных из $e'(m^j)$ нет и в первом внешнем интеграле, так как

$$e_j(e_m \setminus e_k) = e(s^j + m^j)\, de'_k = e(m^j)\, de'_k. \tag{22}$$

В последнем равенстве учли, что на $e(s^j + m^j)\, de'_k$ $m^j > 0$, что следует из неравенств (5), (6), в силу которых $s^j < r^j < s^j + m^j$.

Имеем

$$e_j(a \setminus e') = e(s^j + m^j)\, e_k d \setminus e'. \tag{23}$$

Но в силу (5) $r^j < s^j$ на $e(s^i + m^j)\, e'(m^j)$. Поэтому

$$\underset{e_j a e'(m^j)}{J^t} [t^{s^j - r^j}] \leqslant t^{s^j - r^j},$$

т. е. освобождение от $e'(m^j)$ возможно.

Аналогично

$$e_j(b \setminus e) = e(s^j + m^j)\, e_k d_{r,k} \setminus e \tag{24}$$

(см. определение множества b в формулировке теоремы; еще следует учесть, что рассмотрение ведется на множестве $\bigcup_j e(m^j)$). По условию (6) $r^j + r^{d'} + k^j > s^j$ на $e(s^j + m^j)\, d_{r,k}$, следовательно,

$$\underset{e_j b e'(m^j)}{J^{k^j}} [t^{s^j - r^j - r^{d'}}] \leqslant t^{s^j - r^j - r^{d'}}.$$

И здесь освободились от переменных с номерами из $e'(m^j)$.

Таким образом, ввиду (22)—(24) мажоранта (21) будет иметь такие множества в своих трех внешних интегралах:

$$e(m^j)\, de'_k, \qquad e(m^j)\, e_k d \setminus e', \qquad e(m^j)\, e_k d_{r,k} \setminus e.$$

Это означает, что в (21) множество e_j можно заменить на $e(m^i)$.

Поскольку интегрирование в (21) не распространяется на множество $\bigcap_j e'(m^j)$, то соответствующий ему внешний интеграл (17) от мажоранты (21) проинтегрирует только степени

$$t_i^{r^d} \prod_j t_i^{(s^j - r^{d'})\lambda_j} = t_i^{\sum \lambda_j s^j - r} \qquad (i \in \bigcap_j e'(m^j)).$$

Интеграл (17) по $e_m \setminus e_k$ во внешнем интеграле отсутствует, так как $e_m e'_k (\bigcap_j e' (m^j)) = de'_k (\bigcap e' (m^j)) = \phi$: на $e'_k (\bigcap e' (m^j))$, в силу (1′), (2′), $s \equiv r$, что на d невозможно.

Условия (1), (2), примененные на множестве $(a \cup b)(\bigcap_j e' (m^j))$, позволяет освободиться от внешнего интеграла: применение (1), (2) правомерно, поскольку на $(a \cup b)(\bigcap_j e' (m^j))$ $s \not\equiv r$, $s \not\equiv r + k$.

Степени снова можно вернуть под функционал (21).

Оценим теперь интеграл в правой части (17) мажорантой (21), множества e и e' заменим пустыми (сумму тогда можно опустить). Наконец объединим множества у одинаковых функционалов. Получим (см. (19), (20)):

$$e (m^j)\, de'_k \cup e (m^j)\, e'_m = e (m^j)(de'_k \cup d' e'_k) = e (m^j)\, e'_k;$$

$$e (m^j)\, e_k d \cup a_j = e (m^j)(e_k d \cup e_k d' \{r > s^j\}) = e (m^j)\, e_k (d_r \cup \{r > s^j\});$$

$$e (m^j)\, e_k d_{r,k} \cup b_j = e (m^j)\, e_k (d_{r,k} \cup \{r + k < s^j + m^j\})$$

(здесь учли включение a_j и b_j в $e (m^j)$). Это множества доказываемой оценки (8). Осталось разбить произведение по всем j на подмножества $\{j\}_{sm}$ и вернуться к прежним обозначениям пар. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть для всех* $(s, m) \in E$

$$\text{на } e_m \quad r \leqslant s, \quad r + k \geqslant s + m; \tag{25}$$

на e'_E *выполнены общие условия* (1) *и* (2).

Тогда

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \leqslant t^{\sum \lambda_{sm} s - r} \prod_E \| P^s \Delta^m (t) f \|^{\lambda_{sm}}.$$

В частности, когда $m \equiv 0$ $(\forall\ (s, m) \in E)$, *полагая* $\lambda_s = \lambda_{sm}$, *в общих условиях* (1) *и* (2) *имеем*

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \leqslant t^{\sum \lambda_s s - r} \prod_E \| P^s f \|^{\lambda_s}.$$

Доказательство. Из неравенств (25) соответственно получаем на e_E: $r \leqslant s$, $r + k > s$, следовательно, $r \leqslant s + m - \delta (m)$ и $r + k \geqslant s + \delta (m)$. Отсюда, во-первых,

$$\text{в } e_E \quad d_r = \phi, \quad d_{r,k} = \phi; \tag{26}$$

во-вторых, на e_E имеем (1′) и (2′).

Последнее вместе с предположением следствия означает полное выполнение условий (1′) и (2′).

Условие (3′) ввиду (26) тривиально. Таким образом, все требования (1′)—(3′) удовлетворены, можем применять теорему.

Фигурирующие в оценке (8) множества пусты: $e_m \setminus e_k = \phi$, так как на e_m ввиду (25) $k > 0$; $a_{sm} = \phi$ и $b_{sm} = \phi$ в силу соответствующих равенств (26) и (25).

Тогда неравенство (8) примет вид:

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \leqslant \prod_E \prod_{\{j\}_{sm}} [t^{s - \bar{r}^j} \| P^s \Delta^m (t) f \|]^{\lambda_j},$$

$\bar{r}^j = r^j \oplus r^{d'}$. Но согласно (6)

$$\begin{gathered} \sum_{\{j\}} \lambda_j s = \sum_E s \sum_{\{j\}_{sm}} \lambda_j = \sum_E \lambda_{sm} s, \\ \sum_{\{j\}} \lambda_j \bar{r}^j = \sum_{\{j\}} \lambda_j r^j \oplus \sum_{\{j\}} \lambda_j r^{d'} = r^d + r^{d'} = r; \end{gathered} \tag{27}$$

наконец,

$$\prod_{\{j\}_{sm}} \| P^s\Delta^m(t) f \|^{\lambda_j} = \| P^s\Delta^m(t) f \|^{\lambda_{sm}}.$$

Искомое неравенство теперь очевидно.

Следствие 2. *Допустим, что для всех* $(s, m) \in E$

$$\text{на } e_m \quad r \leqslant s, \quad k > 0. \tag{28}$$

1. *В условии* (2), *выполненном на* e_E, *для каждой пары* $(s, m) \in E$ *найдутся семейства сколь угодно мало отличающихся друг от друга мультипараметров* k^j *и чисел* $\lambda_j > 0$, $j \in \{j\}_{sm}$, *такие, что*

$$\forall\, j \in \{j\}_{sm}\, r + k^j > s \text{ на } e\,(s+m)\, b, \quad b = e_E d_{r,k},\ e\,(k^j) \subset b, \tag{29}$$

$$\lambda_{sm} = \sum_{\{j\}_{sm}} \lambda_j, \quad k^b = \sum_{\{j\}} \lambda_j k^j \quad (\{j\} = \bigcup_E \{j\}_{sm}), \tag{30}$$

$$\forall\, (s, m) \in E \quad \operatorname{rang} \| k^j \|_{b \setminus e(s+m)} = | b \setminus e\,(s+m) |. \tag{31}$$

Если условию (31) *удовлетворяют (на месте* k^j*) суммы* $s + m$, $(s, m) \in E$, *то существуют одноэлементные семейства со свойствами* (29)—(31).

2. *При выполнении на* e_E *соотношений* (29)—(31) *и на* e'_E — (1), (2) *имеем*

$$\| P^r\Delta^k(t) f \| \ll \prod_E \prod_{\{j\}_{sm}} \{ J_t^{\bar{k}^j} [t^{s-r} \| P^s\Delta^m(t) f \|] \}^{\lambda_j},$$

где $b_{sm} = e_m\,(d_{r,k} \cup \{r + k < s + m\})$, $\bar{k}^j = k^j \oplus k^{b'}$.

Доказательство. Из первого неравенства (28), как и в следствии 1, выводим равенство $e_E d_r = \phi$ и наличие (1′) в e_E. Включение (3′) очевидно, поскольку на e_E $k > 0$ (28).

1. Таким образом, в условиях следствия 2 выполнены на e_E все соотношения (1)—(3). Тогда по теореме, ее первой части, существуют семейства (r^j, k^j, λ_j) со свойствами (4)—(7).

Учитывая, что $e_E d_r = \phi$ и $e_E e'_k = \phi$, находим: $d = \phi$, $r^j = 0$, $c = e_E d_{r,k} = b$. Но тогда соотношение (4) вырождено, а (5)—(7) означают (29)—(31); дополнению (7′) соответствует дополнение к (31).

2. Понятно теперь, что при допущении (28) условия второй части следствия совпадают с условиями второй части теоремы. Ее оценка даст искомую, поскольку $e_m \setminus e_k = \phi$ и $a_{sm} = \phi$ ($e_m d_r = \phi$ и $\{r > s\} = \phi$ согласно (28)); в множестве b_{sm} опускаем e_k ввиду включения $e_m \subset e_k$ (28).

Следствие 3. *Пусть* $k = 0$.

1. *Если на* $d \equiv d_r \cup d_{r,0}$

$$\sum \lambda_{sm} s < r < \sum \lambda_{sm} (s + m), \tag{32}$$

$$d e_s \subset e_m \quad (\forall\, (s, m) \in E), \tag{33}$$

то для каждой пары $(s, m) \in E$ *найдутся семейства как угодно мало отличающихся друг от друга мультипараметров* r^j *и чисел* $\lambda_j > 0$, $j \in \{j\}_{sm}$, *такие, что*:

$$\forall j \in \{j\}_{sm} \quad s < r^j < s + m \text{ на } e\,(r^j) \equiv e_m d, \tag{34}$$

$$\lambda_{sm} = \sum_{\{j\}_{sm}} \lambda_j, \quad r^d = \sum_{\{j\}} \lambda_j r^j \quad (\{j\} = \bigcup_E \{j\}_{sm}), \tag{35}$$

$$\forall\, (s, m) \in E \quad \operatorname{rang} \| r^j \|_{d \setminus e_m} = | d \setminus e_m |. \tag{36}$$

Если условию (36) *удовлетворяют суммы* $s + m$, $(s, m) \in E$, *то существуют одноэлементные семейства со свойствами* (34)—(36).

2. *При выполнении на множестве d соотношений* (34)—(36)

$$\| P^r f \| \leqslant \prod_{E} \prod_{\{j\}_{sm}} \{ J_{e_m} [t^{s-\bar{r}^j} \| P^s \Delta^m (t) f \|] \}^{\lambda_j},$$

где $\bar{r}^j = r^j \oplus r^{d'}$.

Доказательство. 1. При $k = 0$ условия (1′), (2′) совпадают с (32), (3′) — с (33). Искомыми будут семейства (r^j, λ_j) со свойствами (4)—(7), существующие по теореме, ее первой части. Действительно, во-первых, множества d из условий теоремы и доказываемого следствия совпадают, поскольку $e'_E (d_r \cup d_{r,0}) = \phi$ (неравенства (32) невозможны при $m \equiv 0$). Во-вторых, $b = \phi$ (так как $k = 0$) и, следовательно, $k^j = 0$. Тогда $e(s+m)\, d = e_m d$ ввиду (33), $e(s+m)\, c = e_m d$ $(c = d)$, $r^{d'} = 0$ на d. Соотношения (4)—(7) преобразуются в (34)—(36); дополнению (7′) соответствует дополнение к (36).

2. Совпадение (4)—(7) с (34)—(36) означает выполнение на e_E условия второй части теоремы. Условие на e'_E в данном случае вырождается, поскольку $e'_E (d_r \cup d_{r,0}) = \phi$ при соотношениях (34)—(36): на e'_E имели бы $r^j \equiv 0$, что несовместимо с (36) при непустом d.

Таким образом, выполнены условия второй части теоремы. Ее оценка (8) в данном случае даст искомую ($a_{sm} = b_{sm} = \phi$, так как $k = 0$).

Следствие 4. *Предположим, что для всех* $(s, m) \in E$

$$\text{на } e_m \quad r + k \geqslant s + m, \qquad k > 0. \tag{37}$$

1. *В условии* (1), *выполненном на* e_E, *для каждой пары* $(s, m) \in E$, *найдутся семейства сколь угодно мало отличающихся друг от друга мультипараметров* r^j *и чисел* $\lambda_j > 0$, $j \in \{j\}_{sm}$, *такие, что*:

$$\forall j \in \{j\}_{sm} \quad r^j < s + m \text{ на } e(r^j) = e(s+m)\, d, \qquad d = e_E d_r, \tag{38}$$

$$\lambda_{sm} = \sum_{\{j\}_{sm}} \lambda_j, \qquad r^d = \sum_{\{j\}} \lambda_j r^j \qquad (\{j\} = \bigcup_E \{j\}_{sm}), \tag{39}$$

$$\forall (s, m) \in E, \ \operatorname{rang} \| r^j \|_{d \setminus e(s+m)} = | d \setminus e(s+m) |. \tag{40}$$

Если условию (40) *удовлетворяют суммы* $s + m$, $(s, m) \in E$, *то существуют одноэлементные семейства со свойствами* (38)—(40).

2. *При выполнении на* e_E *соотношений* (38)—(40), *а на* e'_E — (1), (2) *имеем*

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \leqslant \prod_{E} \prod_{\{j\}_{sm}} \{ J^t_{a_{sm}} [t^{s-\bar{r}^j} \| P^s \Delta^m (t) f \|] \}^{\lambda_j},$$

где $a_{sm} = e_m (d_r \cup \{r > s\})$, $\bar{r}^j = r^j \oplus r^{d'}$.

Доказательство. Из первого неравенства (37), как в следствии 1, выводим равенство $e_E d_{r,k} = \phi$ и наличие (2) в e_E. Неравенство $k > 0$ (37) обеспечивает включение (3).

1. С учетом условия первой части следствия имеем в e'_E все соотношения (1)—(3) и можем воспользоваться первой частью теоремы. Здесь имеем $d = e_E d_r$ (так как $e_E e'_k = \phi$ ввиду (37)), $c = \phi$ и, следовательно, $b = \phi$ и $k^j = 0$. При этом соотношение (5) оказывается вырожденным, а (4), (6), (7) преобразуются в (38)—(40); дополнению (7′) соответствует дополнение к (40).

2. Условия второй части следствия, таким образом, это преобразованные условия второй части теоремы. Ее оценка (8) приведет к искомой ввиду того, что $e_m \setminus e_k = \phi$ (37), $b_{sm} = \phi$ (так как $e_E d_{r,k} = \phi$ и $e_m \{r + k < s + m\} = \phi$ в силу (37)). В множестве a_{sm} опущено e_k, поскольку $e_m \in e_k$ (37).

Следствие 5. *Пусть для всех* $(s, m) \in E$

$$\text{на } e_m \quad r + k > s, \qquad k > 0. \tag{41}$$

Тогда первая часть следствия 4 остается в силе полностью, а вторая — с оценкой

$$\| P^r \Delta^k (t) f \| \ll \prod_{E} \prod_{\{j\}_{sm}} \{ J^t_{a_{sm}} J^{k+r^d}_{b^t_{sm}} [t^{s-\bar{r}^j} \| P^s \Delta^m (t) f \|] \}^{\lambda_j},$$

где $b_{sm} = e_m \{r + k < s + m\}$.

Доказательство. Условия (41) достаточно для равенства $e_E d_{r,k} = \phi$ и наличия (2) в e_E. Это оставляет первую часть следствия 4.

Во второй части оценка (8) даст еще функционал $J^{\bar{k}^j}_{t\,b_{sm}}$ с $b_{sm} = e_m \{r + k < s + m\}$ (учли, что $e_E d_{r,k} = \phi$) и $\bar{k}^j = k^j + (k + r^d)^{b'}$, где $k^j = 0$ и $b = \phi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы (общая теория). М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Терехин А. П.* Полугруппы операторов и смешанные свойства элементов банахова пространства.— Мат. заметки, 1974, т. 16, № 1, с. 107—115.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
4. *Терехин А. П.* Оценка кратного интеграла интегралами меньшей кратности.— Мат. заметки, 1979, т. 25, № 3, с. 379—392.
5. *Головкин К. К.* Параметрически нормированные пространства и нормированные массивы.— Тр. МИАН СССР, 1969, т. 106, с. 1—132.