С. И. Морина, О расширении линейной задачи управления с фазовыми ограничениями,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 490–499

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 490–499

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977

О РАСШИРЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2005 г. С. И. Морина

1. Введение. Настоящая работа посвящена исследованию пучков траекторий линейной управляемой системы с интегральными ограничениями на выбор управлений. Задачи такого типа являются неустойчивыми, что приводит к необходимости использования процедуры расширения для описания результата, получаемого в пределе при исчезающе малых ослаблениях ограничений. Важную роль в конструкциях расширения традиционно играли меры. В задачах оптимального управления [1–3] и в дифференциальных играх [4, 5] использовались, как правило, счетно-аддитивные меры, что связано, в частности, с геометрическими ограничениями на выбор управления. В данной работе в качестве обобщенных элементов применяются конечно-аддитивные меры. Это объясняется спецификой задачи – интегральными ограничениями на выбор управления и разрывными коэффициентами в системе. Конструкции расширений в классе конечно-аддитивных мер для задач управления с интегральными ограничениями были предложены А.Г. Ченцовым [6, 7] и развиты им в дальнейшем для исследования более широкого класса задач о достижимости [8–12]. Использование конечно-аддитивных мер ограниченной вариации позволяет в замкнутой форме описать эффекты, создаваемые асимптотиками обычных управлений; сюда можно отнести, в частности, системы с импульсными воздействиями [13–16].

В данной работе для одного класса линейных систем с помощью обобщенной задачи управления удается установить асимптотическую эквивалентность двух различных способов возмущения фазовых ограничений: ослабление ограничений по всем координатам фазового вектора и ослабление ограничений только по части координат. Показано, что полученные утверждения справедливы также для областей достижимости, возникающих в результате некоторого непрерывного преобразования траекторий системы. Предельные траектории, отвечающие обобщенным управлениям, могут быть разрывными функциями; соответствующие пучки движений рассматриваются в топологии поточечной сходимости. Приводится пример, в котором предельная траектория реализуется посредством конечно-аддитивной меры, и доказывается, что это движение нельзя реализовать в соответствующем классе счетно-аддитивных мер.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{2.1}$$

функционирующую в n-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ на заданном конечном промежутке времени $[0,\vartheta]$, $\vartheta > 0$, и удовлетворяющую начальному условию $x(0) = x_0$. Компоненты $n\times n$-матрицанта $A(\cdot)$ полагаем для простоты непрерывными функциями на $[0,\vartheta]$ (хотя все рассуждения, приводимые ниже, справедливы и для случая ограниченных измеримых по Лебегу функций). Что касается компонент $n\times r$-матрицы $B(\cdot)$ и r-мерной вектор-функции $u(\cdot) = (u_1(\cdot),\ldots,u_r(\cdot))$, являющейся здесь управлением, то мы полагаем их измеримыми в следующем смысле. Интервал $I \triangleq [0,\vartheta[$ оснащаем некоторой полуалгеброй [17] множеств $\mathcal{L}$, удовлетворяющей оценкам

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{J}, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{I}$ – семейство всех промежутков $[a,b[$, $0\le a\le b\le\vartheta$, а $\mathcal{J}$ – σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств I, и считаем функции $b_{i,j}(\cdot)$, $i\in\overline{1,n}$, $j\in\overline{1,r}$, являющиеся компонентами матрицы $B(\cdot)$, и $u_i(\cdot)$, $i\in\overline{1,r}$, $\mathcal{L}$-ступенчатыми на I. (Здесь и далее отрезок натурального ряда $\{m,\ldots,l\}$ обозначим через $\overline{m,l}$, а все множество натуральных чисел – через $\mathcal{N}$.) Таким образом, если $\mathcal{L} = \mathcal{I}$, то имеем в качестве допустимых управлений $u(\cdot)$

кусочно-постоянные и непрерывные справа вектор-функции, определенные на I. (Мы ограничиваемся использованием ступенчатых управлений по соображениям их принципиальной реализуемости в задачах управления техническими системами. Теоретические результаты, приводимые ниже, справедливы и для более широкого класса управлений, а именно для функций, являющихся равномерными пределами ступенчатых функций.) Если $\mathcal{L} = \mathcal{J}$, то в качестве допустимых управлений получаем измеримые по Лебегу функции. Кроме того, полагаем, что на $\mathcal{L}$ задана мера λ, являющаяся сужением меры Лебега на полуалгебру $\mathcal{L}$. В случае $\mathcal{L} = \mathcal{I}$ мера λ является обычной функцией длины. Заметим, что при условии (2.2) $\mathcal{L}$-ступенчатые функции будут измеримы по Лебегу и, следовательно, правая часть системы (2.1) при наших предположениях будет функцией Каратеодори [1, с. 212]. Поэтому в дальнейшем решения системы (2.1) будут пониматься в смысле Каратеодори.

Следуя [7, 10], обозначим через $B_0(I,\mathcal{L})$ множество всех $\mathcal{L}$-ступенчатых функций, определенных на I, а через $B(I,\mathcal{L})$ замыкание $B_0(I,\mathcal{L})$ в пространстве $\mathbb{B}(I)$ всех ограниченных вещественнозначных (в/з) функций на I с традиционной $\sup$-нормой [18, с. 261]. Введем соответствующие пространства управляющих вектор-функций: $B_{0,r}(I,\mathcal{L}) \triangleq (B_0(I,\mathcal{L}))^r$, $B_r(I,\mathcal{L}) \triangleq (B(I,\mathcal{L}))^r$.

Поскольку решения системы (2.1) являются, в частности, непрерывными функциями, то компоненты фундаментальной матрицы Φ решений соответствующей однородной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ удовлетворяют соотношениям $\Phi_{i,j}(t,\cdot) \in B(I,\mathcal{L})$ $\forall (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}$, $\forall t \in [0,\vartheta]$ (здесь учитывается тот факт, что непрерывные функции являются элементами пространства $B(I,\mathcal{I})$, которое в силу (2.2) содержится в $B(I,\mathcal{L})$).

При заданной управляющей функции $u \in B_{0,r}(I,\mathcal{L})$ решение $x_u(\cdot) = (x_{1,u}(\cdot), \ldots, x_{n,u}(\cdot))$ в соответствии с формулой Коши имеет вид

$$x_u(t) = \Phi(t,0)x_0 + \int\limits_{[0,t[} \Phi(t,\xi)B(\xi)u(\xi)\,\lambda(d\xi), \quad t \in [0,\vartheta]. \tag{2.3}$$

Выделим отдельно строки фундаментальной матрицы, состоящие только из ступенчатых функций. Полагаем $\Gamma_0 \triangleq \{i \in \overline{1,n} \mid \Phi_{i,j}(t,\cdot) \in B_0(I,\mathcal{L}) \ \forall j \in \overline{1,n}, \ \forall t \in [0,\vartheta]\}$, $n_0 \triangleq |\Gamma_0|$, $\Gamma_1 \triangleq \overline{1,n} \setminus \Gamma_0$, $n_1 \triangleq |\Gamma_1| = n - n_0$. Например, для уравнения $\ddot{y}(t) = u(t)$, описывающего движение материальной точки $y \in \mathbb{R}^k$, $k \in \mathcal{N}$, и имеющего фундаментальную матрицу размерности $2k \times 2k$, справедливы равенства $\Gamma_0 = \overline{k+1,2k}$, $\Gamma_1 = \overline{1,k}$, $n_0 = n_1 = k$.

Пусть $\pi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_0}$ и $\pi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$ – операторы, преобразующие вектор $x \in \mathbb{R}^n$ в векторы $(x_i)_{i\in\Gamma_0}$ и $(x_j)_{j\in\Gamma_1}$ соответственно. Пусть на полуинтервале $]0,\vartheta]$ заданы многозначные отображения так, что любому $t \in]0,\vartheta]$ ставятся в соответствие замкнутые множества $N_t \subset \mathbb{R}^{n_0}$ и $E_t \subset \mathbb{R}^{n_1}$. Считаем, что управляющая программа $u \in B_{0,r}(I,\mathcal{L})$ должна обеспечить соблюдение фазовых ограничений

$$(\pi_0(x_u(t)), \pi_1(x_u(t))) \in N_t \times E_t \quad \forall t \in]0,\vartheta]. \tag{2.4}$$

Кроме того, можно рассматривать различные варианты ограничений ресурсного характера. Ограничение на управление может задаваться в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \int\limits_{[0,\vartheta[} u_i\,\lambda(dt) \le c, \quad c \ge 0, \tag{2.5}$$

что соответствует ограничению на обычный ресурс многоканальной схемы управления [7, с. 191]. В этом случае u_i есть количество топлива, подаваемого в i-й канал, $u_i \ge 0$, $i \in \overline{1,r}$. Однако для практических целей также представляют большой интерес задачи с ограничениями на евклидову норму управления

$$\int\limits_{[0,\vartheta[} \left(\sum_{i=1}^{r} (u_i(t))^2 \right)^{1/2} \lambda(dt) \le c.$$

Чтобы охватить постановки задач управления с ресурсными ограничениями различных видов, мы будем рассматривать управления (векторные функции из $B_{0,r}(I,\mathcal{L})$ и векторные меры) со значениями в пространстве $\mathbb{R}^r$ с произвольной нормой $\|\cdot\|_r$. Пусть

$$\mathbf{F}_c \triangleq \left\{u \in B_{0,r}(I,\mathcal{L}) \Big| \int\limits_{[0,\vartheta[} \|u(t)\|_r \, \lambda(dt) \le c\right\}. \tag{2.6}$$

Обозначим через $\mathbf{F}_\partial$ множество допустимых управлений $u \in \mathbf{F}_c$, удовлетворяющих ограничениям (2.4), и рассмотрим соответствующий пучок движений

$$\{x_u(\cdot) : u \in \mathbf{F}_\partial\}. \tag{2.7}$$

Поскольку незначительные ослабления фазовых ограничений (2.4) могут привести к скачкообразному изменению множества (2.7), будем исследовать влияние исчезающе малых ослаблений ограничений на получающееся предельное множество.

Введем следующие обозначения. Для любых $s \in \mathcal{N}$ и непустого подмножества A, $A \subset \mathbb{R}^s$, и произвольного $\varepsilon > 0$ через $A^{[\varepsilon]}$ обозначим замкнутую ε-окрестность множества A в топологии покоординатной сходимости пространства $\mathbb{R}^s$. Для любых топологического пространства (Y,θ) и подмножества $A \subset Y$ символом $\mathrm{cl}(A,\theta)$ обозначим замыкание множества A в (Y,θ). Через $\mathrm{Fin}(]0,\vartheta])$ обозначим семейство всех непустых конечных подмножеств $]0,\vartheta]$ и для краткости положим $\mathbb{S} = \mathrm{Fin}(]0,\vartheta]) \times]0,\infty[$.

Для любых $(K,\varepsilon) \in \mathbb{S}$ введем множества

$$\begin{gathered}
\mathbf{F}_0(K,\varepsilon) \triangleq \{u \in \mathbf{F}_c |\ (\pi_0(x_u(t)), \pi_1(x_u(t))) \in N_t \times E_t^{[\varepsilon]} \quad \forall t \in K\}, \\
\mathbf{F}_1(K,\varepsilon) \triangleq \{u \in \mathbf{F}_c |\ (\pi_0(x_u(t)), \pi_1(x_u(t))) \in N_t^{[\varepsilon]} \times E_t^{[\varepsilon]} \quad \forall t \in K\}.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Рассмотрим соответствующие множества притяжения в пространстве траекторий. Обозначим через $\mathbf{Z}$ пространство всех n-вектор-функций, определенных на интервале $[0,\vartheta]$, а через $\boldsymbol{\tau}$ соответствующую топологию поточечной сходимости. В топологическом пространстве $(\mathbf{Z},\boldsymbol{\tau})$ будем исследовать асимптотику пучков траекторий возмущенных задач (множества притяжения)

$$\mathbf{Att}_i \triangleq \bigcap_{(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}} \mathrm{cl}(\{x_u(\cdot) : \ u \in \mathbf{F}_i(K,\varepsilon)\}, \boldsymbol{\tau}), \quad i = 0,1. \tag{2.9}$$

Для этих целей используем общую схему расширения задач в классе конечно-аддитивных мер, предложенную в [6, 7] и развитую в работах [8–12]. Отметим, что при рассмотрении векторных управлений в монографиях [7, 10, 11], а также в работах [9, 19–21] исследовался только случай положительных управляющих вектор-функций с линейным ограничением вида (2.5). Более общая постановка для знакопеременных векторных управлений приведена в [22], где ресурсное ограничение на управление задано в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \int\limits_{[0,\vartheta[} |u_i| \, \lambda(dt) \le c.$$

Следует отметить, что в силу разложения Жордана данное ограничение также сводится к случаю положительного конуса в пространстве векторных мер. Свойство плотности множества $\mathbf{F}_c$ (2.6) в соответствующем множестве векторных конечно-аддитивных мер доказано в [23]. Опираясь на этот результат, а также на работы [24, 25], в которых исследовались пучки движений для случая знакопеременных скалярных управлений, получим описание множеств притяжения (2.9) в терминах обобщенной задачи управления и на основе этого покажем совпадение этих двух множеств.

3. Обобщенная задача управления. Будем следовать системе обозначений, принятой в [7, 10]. Рассмотрим пространство $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ всех в/з конечно-аддитивных мер ограниченной вариации на полуалгебре $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ – алгебра подмножеств I, то $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ есть множество всех ограниченных в/з конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$ [7, с. 63; 18, гл. III].

Рассмотрим множество $\mathbf{A}_\lambda[\mathcal{L}] \triangleq \{\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})| \ \ (\lambda(L)=0) \Rightarrow (\mu(L)=0) \ \ \forall L \in \mathcal{L}\}$, элементами которого являются слабо абсолютно непрерывные [26] относительно λ конечно-аддитивные меры ограниченной вариации и только они. Отметим, что при $\mathcal{L} = \mathcal{I}$ непременно $\mathbf{A}_\lambda[\mathcal{L}] = \mathbf{A}(\mathcal{L})$ (см. [7, с. 89]). Учитывая, что пространство, топологически сопряженное к $B(I,\mathcal{L})$, изометрически изоморфно пространству $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ с (сильной) нормой-вариацией, оснащаем множество $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ традиционной $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$, получая топологическое пространство $(\mathbf{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L}))$ (см. [7, с. 71]). Нам понадобится еще одна топология множества $\mathbf{A}(\mathcal{L})$. Через $\tau_0(\mathcal{L})$ обозначим топологию, которая является следом на множество $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ топологии тихоновского произведения экземпляров $(\mathbb{R},\tau_\partial)$ с индексным множеством $\mathcal{L}$, где τ_∂ – дискретная топология вещественной прямой (см. [7, с. 80]).

Поскольку пространство $(\mathbf{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L}))$ неметризуемо, для описания операции замыкания недостаточно последовательностей. Мы будем использовать направленности и, в частности, теорему Биркгофа [27, с. 89; 28, с. 97], утверждающую, что точка $x \in X$ принадлежит замыканию множества A в топологическом пространстве (X,τ) тогда и только тогда, когда существует направленность, состоящая из элементов A и сходящаяся к x. Следуя [7], для обозначения направленностей в произвольном пространстве X будем использовать триплет вида $(D,\preceq,h)$, где первый элемент обозначает некоторое множество, второй элемент – направление [28, с. 95], заданное на этом множестве, а третий элемент является отображением множества D в X. Для сходимости направленности к элементу x в топологическом пространстве (X,τ) используем выражение $(D,\preceq,h) \xrightarrow{\tau} x$. Тогда сходимость направленности мер $(D,\preceq,h)$ в топологическом пространстве $(\mathbf{A}(\mathcal{L}),\tau_0(\mathcal{L}))$ к некоторой мере $\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$ означает, что $\forall L \in \mathcal{L}$, начиная с некоторого момента, т.е. существует $d_0 \in D$ такое, что для всех $d \in D$ со свойством $d_0 \preceq d$ выполняется равенство $h(d)(L) = \mu(L)$. А сходимость направленности мер $(D,\preceq,h)$ в топологическом пространстве $(\mathbf{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L}))$ к некоторой мере $\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$ означает, что для любых функции $f \in B(I,\mathcal{L})$ и $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого момента, выполняется неравенство $|\int_I f(t)h(d)(dt) - \int_I f(t)\mu(dt)| < \varepsilon$.

Введем пространства векторных мер $\mathbf{A}_r(\mathcal{L}) \triangleq (\mathbf{A}(\mathcal{L}))^r$, $\mathbf{A}_{r,\lambda}[\mathcal{L}] \triangleq (\mathbf{A}_\lambda[\mathcal{L}])^r$, на которых будем рассматривать две топологии: $\tau_{r,*}(\mathcal{L}) \triangleq \otimes^r[\tau_*(\mathcal{L})]$, $\tau_{r,0}(\mathcal{L}) \triangleq \otimes^r[\tau_0(\mathcal{L})]$, являющиеся произведением r соответствующих экземпляров топологий множества $\mathbf{A}(\mathcal{L})$. Следуя [7, с. 70], при $f \in B(I,\mathcal{L})$ обозначим через $f*\lambda$ неопределенный интеграл f относительно λ, т.е. $f*\lambda$ является мерой, для которой $(f*\lambda)(L) = \int_L f(t)\,\lambda(dt) \ \ \ \forall L \in \mathcal{L}$. Пусть символ $\mathbb{I}$ обозначает оператор, ставящий в соответствие вектор-функции $u = (u_i)_{i\in\overline{1,r}} \in B_{0,r}(I,\mathcal{L})$ векторную меру $(u_i * \lambda)_{i\in\overline{1,r}}$, т.е. $\mathbb{I}(u) = (u_i*\lambda)_{i\in\overline{1,r}}$.

В пространстве $\mathbf{A}_r(\mathcal{L})$ определим норму-вариацию $V_\mu(I) \triangleq \sup\{\sum_{i=1}^m \|\mu(L_i)\|_r\}$, где супремум берется по всевозможным разбиениям множества I на конечное число попарно непересекающихся элементов $L_i \in \mathcal{L}$, $i \in \overline{1,m}$, и по всем $m \in \mathcal{N}$. Полагаем $\Xi_r[c] \triangleq \{\mu \in \mathbf{A}_{r,\lambda}[\mathcal{L}] : V_\mu(I) \le c\}$; множество $\Xi_r[c]$ является компактным подмножеством топологического пространства $(\mathbf{A}_r(\mathcal{L}),\tau_{r,*}(\mathcal{L}))$ (см. [23]). Если $\mu \in \mathbf{A}_r(\mathcal{L})$, то обобщенная траектория $\varphi_\mu(\cdot)$ имеет вид [7, с. 132]

$$\varphi_\mu(t) = \Phi(t,0)x_0 + \int\limits_{[0,t[} \Phi(t,\xi)B(\xi)\,\mu(d\xi), \quad t \in [0,\vartheta]. \tag{3.1}$$

Введем множество допустимых обобщенных программных управлений для системы (2.1)

$$\Xi_\partial \triangleq \{\mu \in \Xi_r[c]| \ (\pi_0(\varphi_\mu(t)),\pi_1(\varphi_\mu(t))) \in N_t \times E_t \ \forall t \in]0,\vartheta]\} \tag{3.2}$$

и рассмотрим соответствующий ему пучок обобщенных траекторий

$$\mathbf{G}_\partial \triangleq \{\varphi_\mu(\cdot) : \mu \in \Xi_\partial\}. \tag{3.3}$$

Из свойств неопределенного интеграла [7, с. 70] следует, что для $u \in B_{0,r}(I, \mathcal{L})$ имеет место равенство

$$x_u(\cdot) = \varphi_{\mathbb{I}(u)}(\cdot). \tag{3.4}$$

Обычные решения, таким образом, вкладываются в пространство обобщенных решений.

Нашей целью является доказательство совпадения множеств притяжения (2.9) со множеством обобщенных траекторий $\mathbf{G}_\partial$ (3.3).

4. Свойства плотности. Аналогично (2.9) введем множества притяжения в пространстве управлений

$$\Omega_i \triangleq \bigcap_{(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}} \mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u): \ u \in \mathbf{F}_i(K,\varepsilon)\}, \ \tau_{r,*}(\mathcal{L})), \quad i = 0, 1. \tag{4.1}$$

Предложение 1. *Справедливо равенство*

$$\Xi_\partial = \Omega_0 = \Omega_1. \tag{4.2}$$

Доказательство. Из определений (2.8) вытекает соотношение $\mathbf{F}_0(K,\varepsilon) \subset \mathbf{F}_1(K,\varepsilon)$ $\forall (K,\varepsilon) \in \mathbb{S}$. Поэтому

$$\mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u): \ u \in \mathbf{F}_0(K,\varepsilon)\}, \ \tau_{r,*}(\mathcal{L})) \subset \mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u): \ u \in \mathbf{F}_1(K,\varepsilon)\}, \ \tau_{r,*}(\mathcal{L})) \quad \forall (K,\varepsilon) \in \mathbb{S}$$

и, следовательно, $\Omega_0 \subset \Omega_1$. Покажем, что $\Xi_\partial \subset \Omega_0$. Пусть $\mu \in \Xi_\partial$. Согласно (3.2), это означает, что $\mu \in \Xi_r[c]$ и

$$(\pi_0(\varphi_\mu(t)), \pi_1(\varphi_\mu(t))) \in N_t \times E_t \quad \forall t \in]0, \vartheta]. \tag{4.3}$$

В работе [23] доказано, что для множества $\Xi_r[c]$ справедливо свойство плотности

$$\Xi_r[c] = \mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u): \ u \in \mathbf{F}_c\}, \ \tau_{r,*}(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u): \ u \in \mathbf{F}_c\}, \ \tau_{r,0}(\mathcal{L})). \tag{4.4}$$

Из этого соотношения и упомянутой выше теоремы Биркгофа следует, что для любого $\mu \in \Xi_r[c]$ существует направленность во множестве $\mathbf{F}_c$, для которой соответствующая направленность образов при действии оператора $\mathbb{I}$ сходится к элементу μ как в топологии $\tau_{r,*}(\mathcal{L})$, так и в топологии $\tau_{r,0}(\mathcal{L})$. В работе [7, § 4.3] подробно описан способ построения такой направленности для скалярного случая, который легко переносится на случай векторных мер (см., например, [7, § 9.5] для положительных векторных мер и [22, 23] для знакопеременных векторных мер). В качестве направленного множества берется множество $\mathcal{D}$ всевозможных конечных разбиений интервала I элементами полуалгебры $\mathcal{L}$ с направлением $\prec$, определяемым свойством вписанности одного разбиения в другое. А в качестве отображения $\mathcal{D} \to \mathbf{F}_c$ рассматриваются ступенчатые функционалы $\theta_\mu[\cdot]$, определяемые исходным разбиением $D \in \mathcal{D}$ и значением меры μ на элементах этого разбиения. Для любого разбиения $D \in \mathcal{D}$ функционал $\theta_\mu[D] \in B_{0,r}(I, \mathcal{L})$ связан с μ соотношением $\int_L \theta_\mu[D](\xi)\, \lambda(d\xi) = \mu(L)$ $\forall L \in D$. Таким образом, для любого $\mu \in \Xi_r[c]$ имеют место сходимости

$$(\mathcal{D}, \prec, \mathbb{I}(\theta_\mu[\cdot])) \overset{\tau_{r,*}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu, \tag{4.5}$$

$$(\mathcal{D}, \prec, \mathbb{I}(\theta_\mu[\cdot])) \overset{\tau_{0,r}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu. \tag{4.6}$$

Из условий задачи и определения множества Γ_0 следует, что компоненты вектора $\pi_0(x_f(\cdot))$ определяются посредством ступенчатых функций и, следовательно, сами являются элементами $B_0(I, \mathcal{L})$. Действительно, полагая для любых $i \in \overline{1,n}$

$$\Psi^i(t,\cdot) = (\Psi^i_k(t,\cdot))_{k\in\overline{1,r}} \triangleq \left(\sum_{j=1}^n \Phi_{i,j}(t,\cdot) B_{j,k}(\cdot) \right)_{k\in\overline{1,r}}, \quad t \in [0, \vartheta], \tag{4.7}$$

получаем свойство

$$\Psi^i(t,\cdot)\in B_{0,r}(I,\mathcal{L})\quad \forall i\in\Gamma_0,\quad \forall t\in[0,\vartheta]. \tag{4.8}$$

С учетом этих обозначений и формулы Коши компоненты траекторий, соответствующих управлениям $\theta_\mu[D]$ при $D\in\mathcal{D}$, имеют вид

$$x_{i,\theta_\mu[D]}(t)=\Phi^i(t,0)x_0+\int\limits_{[0,t[}\Psi^i(t,\xi)\theta_\mu[D](\xi)\lambda(d\xi),\quad t\in[0,\vartheta],\quad i\in\overline{1,n}; \tag{4.9}$$

здесь $\Phi^i(t,0)$ – i-я строка матрицы $\Phi(t,0)$.

Заметим, что сходимость (4.6) означает совпадение соответствующих интегралов от ступенчатых функций, начиная с некоторого момента (см. [7, лемма 9.5.1]). С учетом (4.8) получаем, что для любого $t\in I$ найдется разбиение $D_t\in\mathcal{D}$ такое, что при всех $D\in\mathcal{D}$, $D_t\prec D$, выполнены соотношения

$$\int\limits_{[0,t[}\Psi^i(t,\xi)\theta_\mu[D](\xi)\,\lambda(d\xi)=\int\limits_I\chi_{[0,t[}(\xi)\Psi^i(t,\xi)\theta_\mu[D](\xi)\,\lambda(d\xi)=\int\limits_I\chi_{[0,t[}(\xi)\Psi^i(t,\xi)\,\mathbb{I}(\theta_\mu[D])(d\xi)=$$

$$=\int\limits_I\chi_{[0,t[}(\xi)\Psi^i(t,\xi)\,\mu(d\xi)=\int\limits_{[0,t[}\Psi^i(t,\xi)\,\mu(d\xi),\quad i\in\Gamma_0; \tag{4.10}$$

здесь символ $\chi_{[0,t[}$ означает характеристическую функцию интервала $[0,t[$.

Аналогично из сходимости (4.5) следует, что для любых $t\in I$ и $\varepsilon\in]0,\infty[$, начиная с некоторого момента, т.е. при $D\in\mathcal{D}$ таких, что $D_t^\varepsilon\prec D$ для некоторого $D_t^\varepsilon\in\mathcal{D}$, выполнены соотношения

$$\left|\int\limits_{[0,t[}\Psi^k(t,\xi)\theta_\mu[D](\xi)\,\lambda(d\xi)-\int\limits_{[0,t[}\Psi^k(t,\xi)\,\mu(d\xi)\right|<\varepsilon,\quad k\in\overline{1,n}. \tag{4.11}$$

Комбинируя (2.3), (3.1), (4.7)–(4.11) и учитывая, что $\mathcal{D}$ – направленное множество, получаем, что для любых $t\in I$, $\varepsilon\in]0,\infty[$ найдется разбиение $D_t^*\in\mathcal{D}$ такое, что при всех $D\in\mathcal{D}$: $D_t^*\prec D$ справедливы соотношения

$$(x_{i,\theta_\mu[D]}(t)=\varphi_{i,\mu}(t)\quad \forall i\in\Gamma_0)\quad\text{и}\quad(|x_{j,\theta_\mu[D]}(t)-\varphi_{j,\mu}(t)|<\varepsilon\quad\forall j\in\Gamma_1). \tag{4.12}$$

Возьмем теперь произвольные $(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}$ и покажем, что, начиная с некоторого момента, направленность $(\mathcal{D},\prec,\theta_\mu[\cdot])$ лежит во множестве $\mathbf{F}_0(K,\varepsilon)$. Действительно, поскольку $\mathcal{D}$ – направленное множество, соотношение (4.12) будет справедливо для любого конечного множества точек $t\in I$. Поэтому с учетом (2.8) и (4.3) получаем, что, начиная с некоторого момента, т.е. при $D_K\prec D$, где $D_K\in\mathcal{D}$, $\pi_0(x_{\theta_\mu[D]}(t))\in N_t$, $\pi_1(x_{\theta_\mu[D]}(t))\in E_t^{[\varepsilon]}$. В силу определения (2.8) это означает, что, начиная с некоторого момента, направленность $(\mathcal{D},\prec,\theta_\mu[\cdot])$ лежит во множестве $\mathbf{F}_0(K,\varepsilon)$, а направленность $(\mathcal{D},\prec,\mathbb{I}(\theta_\mu[\cdot]))$ – во множестве $\{\mathbb{I}(u):\ u\in\mathbf{F}_0(K,\varepsilon)\}$. Отсюда с учетом сходимости (4.5) получаем $\mu\in\mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u):\ u\in\mathbf{F}_0(K,\varepsilon)\},\tau_{r,*}(\mathcal{L}))$. Поскольку $(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}$ выбиралось произвольно, справедливо включение $\mu\in\Omega_0$ (см. (4.1)). Отсюда в силу произвольности выбора $\mu\in\Xi_\partial$ имеем вложение $\Xi_\partial\subset\Omega_0$. Покажем теперь, что $\Omega_1\subset\Xi_\partial$, откуда с учетом вложений $\Omega_0\subset\Omega_1$ и $\Xi_\partial\subset\Omega_0$ будут вытекать равенства (4.2).

Итак, пусть $\mu\in\Omega_1$. Поскольку $\mathbf{F}_1(K,\varepsilon)\subset\mathbf{F}_c$ $\forall(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}$, то из (4.4) и определения множества Ω_1 следует, что $\mu\in\Xi_r[c]$. Покажем, что для μ справедливо соотношение (4.3). Возьмем произвольное $t^*\in]0,\vartheta]$. Поскольку $\forall\varepsilon\in]0,\infty[$

$$\bigcap_{K\in\mathrm{Fin}(]0,\vartheta])}\mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u):\ u\in\mathbf{F}_1(K,\varepsilon)\},\ \tau_{r,*}(\mathcal{L}))\subset\mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u):\ u\in\mathbf{F}_1(\{t^*\},\varepsilon)\},\ \tau_{r,*}(\mathcal{L})),$$

справедливо включение

$$\mu \in \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u) : \ u \in \mathbf{F}_1(\{t^*\},\varepsilon)\}, \ \tau_{r,*}(\mathcal{L})). \tag{4.13}$$

Возьмем любое $\alpha > 0$. Из (4.13) и определения топологии $\tau_{r,*}(\mathcal{L})$ следует, что найдется элемент $f_\alpha \in \mathbf{F}_1(\{t^*\},\alpha/2)$ такой, что

$$\left| \int\limits_{[0,t^*[} \Psi^i(t^*,\xi) f_\alpha(\xi)\,\lambda(d\xi) - \int\limits_{[0,t^*[} \Psi^i(t^*,\xi)\,\mu(d\xi) \right| < \alpha/2 \quad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{4.14}$$

Поскольку $f_\alpha \in \mathbf{F}_1(\{t^*\},\alpha/2)$, то из (2.3), (2.8), (3.1), (4.7) и (4.14) следует, что

$$(\pi_0(\varphi_\mu(t^*)), \pi_1(\varphi_\mu(t^*))) \in N_t^{[\alpha]} \times E_t^{[\alpha]}.$$

В силу произвольности выбора α получаем

$$(\pi_0(\varphi_\mu(t^*)), \pi_1(\varphi_\mu(t^*))) \in \bigcap_{\alpha>0} (N_{t^*}^{[\alpha]} \times E_{t^*}^{[\alpha]}),$$

но N_{t^*} и E_{t^*} – замкнутые множества, поэтому $\bigcap_{\alpha>0}(N_{t^*}^{[\alpha]} \times E_{t^*}^{[\alpha]}) = N_{t^*} \times E_{t^*}$ и, следовательно, $(\pi_0(\varphi_\mu(t^*)), \pi_1(\varphi_\mu(t^*))) \in N_{t^*} \times E_{t^*}$. В силу произвольности выбора $t^* \in]0,\vartheta]$ и определения множества Ξ_∂ получаем, что $\mu \in \Xi_\partial$. А поскольку $\mu \in \Omega_1$ выбиралось произвольно, справедливо включение $\Omega_1 \subset \Xi_\partial$, чем и завершается доказательство утверждения.

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{G}_\partial = \mathbf{Att}_0 = \mathbf{Att}_1. \tag{4.15}$$

Доказательство. Обозначим через s оператор $u \mapsto x_u(\cdot) : \ \mathbf{F}_c \to \mathbf{Z}$, а через g оператор $\mu \mapsto \varphi_\mu(\cdot) : \ \Xi_r[c] \to \mathbf{Z}$. Из определения оператора g и (3.3) следует, что

$$\mathbf{G}_\partial = g^1(\Xi_\partial) \triangleq \{g(\mu) : \ \mu \in \Xi_\partial\}. \tag{4.16}$$

Учитывая определение оператора $\mathbb{I}$ и равенство (3.4), получаем соотношение $s = g \circ \mathbb{I}$. Воспользовавшись предложением 1, получим представление

$$g^1(\Xi_\partial) = g^1\left(\bigcap_{(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}} \mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u) : \ u \in \mathbf{F}_0(K,\varepsilon)\}, \ \tau_{r,*}(\mathcal{L})) \right) =$$

$$= g^1\left(\bigcap_{(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}} \mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u) : \ u \in \mathbf{F}_1(K,\varepsilon)\}, \ \tau_{r,*}(\mathcal{L})) \right). \tag{4.17}$$

Далее применим теорему 2.5.2 из [7]. Заметим, что поскольку $\Xi_r[c]$ является компактным множеством в топологическом пространстве $(\mathbf{A}_r(\mathcal{L}), \tau_{r,*}(\mathcal{L}))$, то в виде $(\Xi_r[c], \tau^*_{\Xi_r[c]}(\mathcal{L}))$, где $\tau^*_{\Xi_r[c]}(\mathcal{L})$ – топология, индуцированная из указанного выше пространства, получаем компактное пространство. Топологическое пространство $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\tau})$ является хаусдорфовым, поскольку таковым является пространство $\mathbb{R}^n$ (см. [27, теорема 2.6.4]), а оператор g – непрерывным. В качестве $\mathcal{X}$ следует взять семейства, состоящие из множеств $\mathbf{F}_0(K,\varepsilon)$ и $\mathbf{F}_1(K,\varepsilon)$ при переборе $(K,\varepsilon) \in \mathbb{S}$. Тогда из теоремы 2.5.2 из [7] получаем равенства

$$g^1\left(\bigcap_{(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}} \mathrm{cl}(\{\mathbb{I}(u) : \ u \in \mathbf{F}_i(K,\varepsilon)\}, \ \tau_{r,*}(\mathcal{L})) \right) =$$

$$= \bigcap_{(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}} \mathrm{cl}(\{s(u):\ u\in \mathbf{F}_i(K,\varepsilon)\},\ \boldsymbol{\tau}),\quad i=0,1. \tag{4.18}$$

Учитывая определения множеств $\mathbf{Att}_0$, $\mathbf{Att}_1$ и равенство $s(u)=x_u(\cdot)$, из (4.16)–(4.18) получаем требуемое равенство (4.15).

Следствие 1. *Пусть W – непрерывное отображение пространства $(\mathbf{Z},\boldsymbol{\tau})$ в топологическое хаусдорфово пространство $(\mathbb{X},\tau_X)$. Тогда*

$$(W\circ g)^1(\Xi_\partial) = \bigcap_{(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}} \mathrm{cl}(\{(W\circ s)(u):\ u\in \mathbf{F}_0(K,\varepsilon)\},\ \tau_X) =$$

$$= \bigcap_{(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}} \mathrm{cl}(\{(W\circ s)(u):\ u\in \mathbf{F}_1(K,\varepsilon)\},\ \tau_X).$$

Для доказательства следует полностью повторить рассуждения предыдущего предложения с заменой оператора s на $W\circ s$, а оператора g на $W\circ g$. Отметим, что отображение W может ставить в соответствие произвольной функции $x(\cdot)$ из $\mathbf{Z}$ вектор, составленный из части координат вектора $x(\vartheta)$, либо весь вектор $x(\vartheta)$. В этом случае из следствия получаем утверждение об областях достижимости системы в конечный момент времени.

Следствие 2. *Справедливо равенство*

$$\{\varphi_\mu(\cdot):\ \mu\in\Xi_r[c]\} = \mathrm{cl}(\{x_u(\cdot):\ u\in\mathbf{F}_c\},\ \boldsymbol{\tau}). \tag{4.19}$$

Доказательство. Рассмотрим исходную задачу при отсутствии фазовых ограничений, т.е. положим $N_t=\mathbb{R}^{n_0}$ и $E_t=\mathbb{R}^{n_1}$ $\forall t\in\,]0,\vartheta]$. Тогда $\mathbf{F}_0(K,\varepsilon)=\mathbf{F}_1(K,\varepsilon)=\mathbf{F}_c$ $\forall(K,\varepsilon)\in\mathbb{S}$ и, следовательно,

$$\mathbf{Att}_1 = \mathbf{Att}_0 = \mathrm{cl}(\{x_u(\cdot):\ u\in\mathbf{F}_c\},\ \boldsymbol{\tau}). \tag{4.20}$$

С другой стороны, в этом случае $\Xi_\partial=\Xi_r[c]$ и, как следствие,

$$\mathbf{G}_\partial = \{\varphi_\mu(\cdot):\ \mu\in\Xi_r[c]\}. \tag{4.21}$$

Из (4.20), (4.21) и предложения 2 следует равенство (4.19).

Заметим, что в случае скалярных управлений аналогичное свойство плотности для пучка траекторий приведено в работах [24, 25].

5. Пример. Следует отметить, что именно наличие фазовых ограничений порождает неустойчивость, т.е. возможны постановки, в которых в отличие от соотношения (4.19) $\{\varphi_\mu(\cdot):\ \mu\in\Xi_\partial\}\neq\mathrm{cl}(\{x_f(\cdot):\ f\in\mathbf{F}_\partial\},\ \boldsymbol{\tau})$.

Рассмотрим следующий простейший пример:

$$\dot x_1(t)=x_2(t),\quad \dot x_2(t)=b(t)f(t),\quad 0\le t\le 1,\quad x_1(0)=x_2(0)=0. \tag{5.1}$$

В качестве $\mathcal{L}$ возьмем борелевскую σ-алгебру подмножеств интервала $[0,\vartheta[$, а функцию $b(\cdot)$ определим в виде

$$b(t)\triangleq 1,\quad t\in\,]0,1[\,,\quad b(0)\triangleq 1/2. \tag{5.2}$$

Согласно второму закону Ньютона, коэффициент b в (5.1) является величиной, обратной массе. Поэтому (5.2) можно трактовать как сброс половины массы в момент $t=0$. Пусть $c=1$, а фазовые ограничения определяются множествами $N_t=\mathbb{R}$, $E_t=\{t\}$, $t\in\,]0,1]$, т.е. необходимо обеспечить условие $x_1(t)=t$ $\forall t\in\,]0,1]$.

Очевидно, что в этом случае $\mathbf{F}_\partial=\emptyset$. Действительно, предположим, что $\mathbf{F}_\partial\neq\emptyset$. Пусть $\hat f\in\mathbf{F}_\partial$, т.е. $\hat f$ – интегрально ограниченная борелевская функция, для которой справедливо соотношение

$$x_{1,\hat f}(t) = \int\limits_{]0,t[} \hat f(\tau)(t-\tau)\lambda(d\tau) = t,\quad t\in\,]0,1]. \tag{5.3}$$

Из (5.3) получаем оценки

$$t = \left| \int\limits_{]0,t[} \hat{f}(\tau)(t-\tau)\lambda(d\tau) \right| \leq t \int\limits_{]0,t[} |\hat{f}(\tau)|\lambda(d\tau) \leq \|\hat{f}\| t^2,$$

которые приводят к неравенству $\|\hat{f}\| \geq 1/t \quad \forall t \in]0,1[$. Последнее невозможно, так как $\hat{f}$ – ограниченная функция [6, § 9]. Таким образом, $F_\partial = \emptyset$ и, следовательно, $\mathrm{cl}(\{x_f(\cdot) : f \in F_\partial\}, \boldsymbol{\tau}) = \emptyset$ как замыкание пустого множества.

Рассмотрим функцию $\mathbf{x}(\cdot)$, компоненты которой определяются соотношениями

$$\mathbf{x}_1(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \mathbf{x}_2(t) = 1, \quad 0 < t \leq 1, \quad \mathbf{x}_2(0) = 0.$$

Покажем, что $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbf{Att}_0$. Определим последовательность функций $(f_n)_{n\in\mathcal{N}}$ соотношениями

$$f_n(t) \triangleq \begin{cases} n, & t \in [0, 1/n[\,, \\ 0, & t \in [1/n, 1[\,, \end{cases} \quad n \in \mathcal{N}.$$

Очевидно, $f_n \in B_0(I, \mathcal{L})$ и $\int_{[0,1[} |f_n(\tau)|\lambda(d\tau) = 1$, т.е. $f_n \in \mathbf{F}_c \quad \forall n \in \mathcal{N}$. Покажем, что соответствующая последовательность траекторий $(x_{f_n})_{n\in\mathcal{N}}$ сходится к $\mathbf{x}(\cdot)$ в пространстве $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\tau})$. Поскольку в силу начальных условий $x_{1,f_n}(0) = 0$ и $x_{2,f_n}(0) = 0$, то достаточно проверить поточечную сходимость при $t \in]0, \vartheta]$. Возьмем любое $t' \in]0, \vartheta]$. Тогда для любого $n > 1/t'$ имеем

$$x_{2,f_n}(t') = \int\limits_{]0,t'[} f_n(\tau)\lambda(d\tau) = \int\limits_{]0,1/n[} n\lambda(d\tau) = 1,$$

так как $]0, 1/n[\subset]0, t'[$ при $n > 1/t'$,

$$x_{1,f_n}(t') = \int\limits_{]0,t'[} (t'-\tau) f_n(\tau)\lambda(d\tau) = t' \int\limits_{]0,t'[} f_n\lambda(d\tau) - \int\limits_{]0,t'[} \tau f_n(\tau)\lambda(d\tau) =$$

$$= t' - \int\limits_{]0,1/n[} \tau n\lambda(d\tau) = t' - 1/(2n). \tag{5.4}$$

Таким образом, $(x_{1,f_n}(t'))_{n\in\mathcal{N}} \to t'$ и $(x_{2,f_n}(t'))_{n\in\mathcal{N}} \to 1$. Поскольку t' выбиралось произвольно, получаем сходимость $(x_{f_n})_{n\in\mathcal{N}}$ к $\mathbf{x}(\cdot)$ в топологическом пространстве $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\tau})$. Кроме того, для любых $(K, \varepsilon) \in \mathbb{S}$ элементы f_n, начиная с некоторого момента, попадают во множество $\mathbf{F}_0(K, \varepsilon)$.

Действительно, зафиксируем произвольные $(K', \varepsilon') \in \mathbb{S}$. Возьмем $r \in \mathcal{N}$ такое, что $r > \max\{1/\inf(K'), 1/(2\varepsilon')\}$. Тогда для любого $t \in K'$ имеем $r > 1/t$ и аналогично (5.4) получаем, что $|x_{1,f_n}(t) - t| \leq 1/(2n) \leq 1/(2r) < \varepsilon' \quad \forall n > r$. Это означает, что при $n > r$ справедливо включение $x_{1,f_n}(t) \in E_t^{[\varepsilon']} \quad \forall t \in K'$. Учитывая определение множества $\mathbf{F}_0(K', \varepsilon')$ (см. (2.8)), заключаем, что $f_n \in \mathbf{F}_0(K', \varepsilon') \quad \forall n > r$.

Таким образом, согласно [7, с. 42], предельный элемент $\mathbf{x}(\cdot)$ последовательности $(x_{f_n})_{n\in\mathcal{N}}$ лежит во множестве $\mathbf{Att}_0$ или с учетом предложения 2 $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbf{G}_\partial$.

Замечание. Пример конечно-аддитивной меры, реализующей траекторию $\mathbf{x}(\cdot)$, рассмотрен в работе [29]. Стоит отметить, что в нашем случае не существует счетно-аддитивной меры из множества $\Xi_r[c]$ (на самом деле даже из более широкого множества $\tilde{\Xi} \triangleq \{\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L}) | V_\mu(I) \leq c\}$), реализующей данную траекторию. Действительно, пусть $\nu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$ такова, что $V_\nu([0,1[) \leq 1$, $\varphi_{2,\nu}(0) = 0$, $\varphi_{2,\nu}(t) = 1$ при $t \in]0,1]$ и ν является счетно-аддитивной мерой. Из выражения (3.1) с учетом аддитивности ν и определения функции $b(\cdot)$ имеем

$$\varphi_{2,\nu}(t) = \frac{1}{2}\nu(\{0\}) + \int\limits_{]0,t[} d\nu = \frac{1}{2}\nu(\{0\}) + \nu(]0,t[) = 1 \quad \forall t \in]0,1].$$

Поскольку $\nu(\{0\}) \leq V_\nu([0,1[) \leq 1$, то получаем свойство

$$\nu(]0,t[) = 1 - \nu(\{0\})/2 = \mathrm{const} \geq 1/2 \quad \forall t \in]0,1]. \tag{5.5}$$

Отсюда и из аддитивности ν следует, что $\nu([t_1,t_2[) = 0$ при любых $t_1 \in]0,1]$ и $t_2 \in [t_1,1]$, поскольку $\nu(]0,t_2[) = \nu(]0,t_1[) + \nu([t_1,t_2[)$. С учетом (5.5) и счетной аддитивности ν имеем

$$\frac{1}{2} \leq \mathrm{const} = \nu(]0,1[) = \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\nu\left(\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[\right) = 0.$$

Полученное противоречие показывает невозможность существования счетно-аддитивной меры из единичного шара пространства $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ (с сильной нормой), реализующей предельный элемент $\mathbf{x}(\cdot)$ множества $\mathbf{G}_\partial$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 03-01-00415).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
2. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси, 1977.
3. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., 1970.
4. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
5. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М., 1981.
6. *Ченцов А.Г.* Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск, 1985.
7. *Ченцов А.Г.* Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург, 1993.
8. *Ченцов А.Г.* // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50. Вып. 5 (305). С. 223–242.
9. *Ченцов А.Г.* // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63. С. 185–223.
10. *Chentsov A.G.* Asymptotic Attainability. Dordrecht, 1997.
11. *Chentsov A.G., Morina S.I.* Extensions and Relaxations. Dordrecht, 2002.
12. *Chentsov A.G.* // Atti Sem. Fis. Univ. Modena. IL. 2001. P. 531–545.
13. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
14. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М., 1971.
15. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.
16. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М., 1991.
17. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М., 1969.
18. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
19. *Ченцов А.Г.* // Изв. вузов. Математика. 1993. № 5. С. 112–123.
20. *Морина С.И., Ченцов А.Г.* // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 995–1002.
21. *Морина С.И., Ченцов А.Г.* // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 207–216.
22. *Серов В.П., Ченцов А.Г.* Конечно-аддитивное расширение линейных задач оптимального управления с интегральными ограничениями. Свердловск, 1989. Деп. в ВИНИТИ. № 6644-В89.
23. *Морина С.И.* // Век радио: Перспективные пути развития антенных систем космической связи, теории управления и распознавания образов / Сб. науч. тр. Екатеринбург, 1996. С. 191–201.
24. *Серов В.П., Ченцов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 607–617.
25. *Ченцов А.Г., Каширцева Т.Ю.* // Вестн. Челяб. ун-та. 1999. № 2. С. 137–146.
26. *Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M.* Theory of charges. A study of finitely additive measures. New York, 1983.
27. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М., 1986.
28. *Келли Дж.Л.* Общая топология. М., 1968.
29. *Морина С.И., Ченцов А.Г.* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 1. С. 39–48.

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию
22.04.2003 г.