О. О. Белова, Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2008, том 14, выпуск 2, 29–67

Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей

О. О. БЕЛОВА
Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград
e-mail: olesya@epc.albertina.ru

УДК 514.7

Ключевые слова: проективное пространство, многообразие Грассмана, пространство центрированных плоскостей, главное расслоение, оснащения, связности, кривизна и кручение, параллельные перенесения, центральное проектирование.

Аннотация

Предметом настоящей работы являются связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей. Работа относится к исследованиям в области дифференциальной геометрии, осуществляется методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева, обобщающим метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана и опирающимся на исчисление внешних дифференциальных форм. В статье разработаны основы нового метода исследования многообразий Грассмана и его обобщений — теория индуцированных связностей пространств плоскостей и центрированных плоскостей в n-мерном проективном пространстве.

Abstract

O. O. Belova, Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 2, pp. 29—67.

In the present paper we study connections in the fiberings associated with the Grassmann manifold and the space of the centered planes. The work is related to the studies in differential geometry. In the paper, we use the method of continuations and scopes of G. F. Laptev which generalizes the moving frame method and the exterior forms method of Cartan; the method depends on calculation of exterior differential forms. In the paper, we develop a new method of research in Grassman manifolds and some generalization of the method which includes the theory of the induced connections of the spaces of planes and centered planes in the n-dimensional projective space.

Введение

Предметом настоящей работы являются связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей. Работа относится к исследованиям в области дифференциальной геометрии, осуществляется методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [20],

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 2, с. 29—67.

обобщающим метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана и опирающимся на исчисление внешних дифференциальных форм.

В статье разработаны основы нового метода исследования многообразий Грассмана и его обобщений — теория индуцированных связностей пространств плоскостей и центрированных плоскостей в n-мерном проективном пространстве. Многообразия плоскостей уже изучались в этом направлении (см. [16, 21, 33]). Для семейств плоскостей успешно применялся метод ассоциированных главных расслоений [28]. В настоящей работе завершается создание аналогичного метода для пространств плоскостей и пространств центрированных плоскостей. В этом направлении имеется лишь результат Нордена [25] о нормализации проективного пространства, которое является многообразием Грассмана 0-мерных плоскостей. Хотя обширная теория оснащённых грассмановых подмногообразий была развита школой прибалтийских геометров, в основном работами Ю. Г. Лумисте [22], В. И. Близникаса [15], И. В. Близникене [16] и др., нами получены принципиально новые результаты, а подходы к исследованиям отличаются от ранее применяемых. При дифференциально-геометрических исследованиях многообразия Грассмана в проективном пространстве обычно использовались деривационные формулы подвижного репера, содержащие формы, удовлетворяющие структурным уравнениям линейной группы и условиям (экви)проективности [32, с. 62]. В данной работе применён неклассический аналитический аппарат, который обладает преимуществом при выделении подгрупп и фактор-групп проективной группы. Многими геометрами многообразие Грассмана рассматривалось как множество плоскостей одной размерности в евклидовом пространстве, проходящих через фиксированную точку [17]. Часто исследования проводились другими методами [23, 24].

1. Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана

В данном разделе рассматривается многообразие Грассмана m-мерных плоскостей в n-мерном проективном пространстве. Над ним возникает главное расслоение, типовым слоем которого является подгруппа стационарности m-мерной плоскости. В этом расслоении задаётся фундаментально-групповая связность по Г. Ф. Лаптеву. Доказывается, что оснащение Бортолотти многообразия Грассмана индуцирует связность в ассоциированном расслоении (строится первый охват объекта групповой связности компонентами оснащающего квазитензора). Вводятся объекты кривизны и кручения групповой связности. Доказывается, что данные объекты являются тензорами. Находятся ковариантный дифференциал и ковариантные производные оснащающего квазитензора относительно групповой связности. Доказывается, что ковариантные производные образуют тензор. При внешнем дифференцировании ковариантного дифференциала вводится тензор неабсолютных перенесений. При помощи ковариантных производных и пфаффовых производных компонент оснащающего квазитензора строятся второй и третий охваты объекта групповой связности. Находятся условия совпадения всех охватов и их связь. Даётся геометрическая интерпретация связностей трёх типов при помощи параллельных перенесений и отображений. Доказывается, что оснащение Бортолотти индуцирует в ассоциированном расслоении пучок связностей 1-го типа. Вводится понятие тензора подвижности параллелизма, обращение которого в нуль характеризует связанно вырожденные параллельные перенесения оснащающих плоскостей, и находится его связь с тензором деформации. Рассматривается специальное многообразие Грассмана.

1.1. Многообразие Грассмана в проективном пространстве

Отнесём n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, J, K, \ldots = \overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A. \tag{1.1.1}$$

Формы Пфаффа ω^I, ω_J^I, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $\mathrm{GP}(n)$, действующей в проективном пространстве P_n:

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J. \end{gathered} \tag{1.1.2}$$

В пространстве P_n рассмотрим многообразие Грассмана $V = \mathrm{Gr}(m, n)$ m-мерных плоскостей L_m, т. е. пространство всех m-плоскостей пространства P_n. Произведём специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершины A, A_a на плоскость L_m. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $a, b, c, \ldots = \overline{1,m}$, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = \overline{m+1,n}$.

Из формул (1.1.1) следует, что уравнения $\omega^\alpha = 0$, $\omega_a^\alpha = 0$ служат условиями стационарности плоскости L_m, т. е. формы ω^α, ω_a^α являются главными, а для многообразия Грассмана — базисными. Тогда размерность многообразия равна числу базисных форм, т. е.

$$\dim V = (n - m)(m + 1).$$

1.2. Главное расслоение, ассоциированное с многообразием Грассмана

С многообразием Грассмана V ассоциируем главное расслоение $G(V)$,

$$\dim G = n(n + 1) - m(n - m - 1).$$

С учётом разбиения индексов и выделения базисных и слоевых форм распишем структурные уравнения Картана (1.1.2). Структурные уравнения базисных форм имеют вид

$$D\omega^\alpha = \omega^a \wedge \omega_a^\alpha - \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad D\omega_a^\alpha = \omega_a^b \wedge \omega_b^\alpha - \omega_\beta^\alpha \wedge \omega_a^\beta + \omega_a \wedge \omega^\alpha, \tag{1.2.1}$$

а уравнения слоевых форм имеют вид

$$
\begin{gathered}
D\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b - \omega^a_\alpha \wedge \omega^\alpha, \quad D\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b - \omega_\alpha \wedge \omega^\alpha_a, \\
D\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + (\delta^a_c \omega_b + \delta^a_b \omega_c) \wedge \omega^c + \delta^a_b \omega_\alpha \wedge \omega^\alpha - \omega^a_\alpha \wedge \omega^\alpha_b;
\end{gathered} \tag{1.2.2}
$$

$$
D\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \delta^\alpha_\beta \omega_a \wedge \omega^a + (\delta^\alpha_\gamma \omega_\beta + \delta^\alpha_\beta \omega_\gamma) \wedge \omega^\gamma + \omega^a_\beta \wedge \omega^\alpha_a; \tag{1.2.3}
$$

$$
D\omega^a_\alpha = \omega^b_\alpha \wedge \omega^a_b + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^a_\beta + \omega_\alpha \wedge \omega^a, \quad D\omega_\alpha = \omega^a_\alpha \wedge \omega_a + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta. \tag{1.2.4}
$$

Специализация подвижного репера для многообразия Грассмана V приводит к главному расслоению $G(V)$ со структурными уравнениями (1.2.1)—(1.2.4), типовым слоем которого является подгруппа стационарности G плоскости L_m, а базой — многообразие Грассмана V. Пространством расслоения $G(V)$ является проективная группа $\mathrm{GP}(n)$, а проекция $\pi\colon \mathrm{GP}(n) \to V$ ставит в соответствие произвольному элементу группы $\mathrm{GP}(n)$ ту плоскость L_m многообразия V, которая инвариантна под действием этого элемента.

Расслоение $G(V)$ содержит главное фактор-расслоение $P(V)$ со структурными уравнениями (1.2.1), (1.2.2) и типовым слоем — фактор-группой $P = \mathrm{GP}(m)$ группы $\mathrm{GP}(n)$, действующей на плоскости L_m. Другое фактор-расслоение $H(V)$ имеет структурные уравнения (1.2.1)—(1.2.3). Типовым слоем фактор-расслоения $H(V)$ является фактор-группа H группы G, действующая на плоскости L_m и в двойственной плоскости.

1.3. Фундаментально-групповая связность в ассоциированном расслоении

В главном расслоении $G(V)$ зададим фундаментально-групповую связность по Г. Ф. Лаптеву [19]. Рассмотрим преобразование вторичных форм с помощью базисных форм многообразия V:

$$
\begin{gathered}
\tilde\omega^a = \omega^a - L^a_\alpha \omega^\alpha - \Gamma^{ab}_\alpha \omega^\alpha_b, \quad \tilde\omega_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha}\omega^\alpha - \Pi^b_{a\alpha}\omega^\alpha_b, \\
\tilde\omega^a_b = \omega^a_b - L^a_{b\alpha}\omega^\alpha - \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c, \quad \tilde\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - L^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a, \\
\tilde\omega^a_\alpha = \omega^a_\alpha - \Gamma^a_{\alpha\beta}\omega^\beta - \Pi^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b, \quad \tilde\omega_\alpha = \omega_\alpha - L_{\alpha\beta}\omega^\beta - G^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a.
\end{gathered} \tag{1.3.1}
$$

Формы $\tilde\omega$ (1.3.1) являются формами связности главного расслоения.

Найдём структурные уравнения форм связности. Для этого продифференцируем формы (1.3.1) внешним образом, используя структурные уравнения (1.2.2)—(1.2.4). Выразим формы Пфаффа ω из (1.3.1) и подставим в полученные уравнения. Раскроем скобки, делая обратную замену по формулам (1.3.1) в тех слагаемых, где формы $\tilde\omega$ внешним образом умножаются на базисные. Получим

$$
\begin{aligned}
D\tilde\omega^a = {} & \tilde\omega^b \wedge \tilde\omega^a_b - (\Delta L^a_\alpha - L^a_{b\alpha}\omega^b + \Gamma^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha) \wedge \omega^\alpha - \\
& - (\Delta\Gamma^{ab}_\alpha - \Gamma^{ab}_{e\alpha}\omega^e + L^a_\alpha \omega^b) \wedge \omega^\alpha_b + L^a_{b\alpha} L^b_\beta \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \\
& + (\Gamma^{cb}_\beta L^a_{c\alpha} - \Gamma^{ab}_{d\beta} L^d_\alpha \omega^\alpha) \wedge \omega^\beta_b + \Gamma^{ab}_{e\alpha}\Gamma^{ec}_\beta \omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D\tilde{\omega}_b^a &= \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + \tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}^a + \delta_b^a \tilde{\omega}_c \wedge \tilde{\omega}^c - \\
&- (\Delta L_{b\alpha}^a - L_\alpha^a \omega_b + \Gamma_{b\alpha}\omega^a - \delta_b^a L_\alpha^c \omega_c + \delta_b^a \Gamma_{c\alpha}\omega^c - \delta_b^a \omega_\alpha + \Gamma_{b\alpha}^{ac}\omega_c) \wedge \omega^\alpha - \\
&- (\Delta\Gamma_{b\alpha}^{ac} - \Gamma_\alpha^{ac}\omega_b + \Pi_{b\alpha}^c \omega^a - \delta_b^a \Gamma_\alpha^{ec}\omega_e + \delta_b^a \Pi_{e\alpha}^c \omega^e + L_{b\alpha}^a \omega^c + \delta_b^c \omega_\alpha^a) \wedge \omega_c^\alpha + \\
&+ (L_\alpha^a \Gamma_{b\beta} + L_{c\alpha}^a L_{b\beta}^c + \delta_b^a L_\alpha^c \Gamma_{c\beta})\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \\
&+ (\Pi_{b\beta}^c L_\alpha^a + \Gamma_{b\beta}^{ec} L_{e\alpha}^a - L_{b\alpha}^d \Gamma_{d\beta}^{ac} - \Gamma_\beta^{ac}\Gamma_{b\alpha} - \delta_b^a \Gamma_{e\alpha}\Gamma_\beta^{ec} + \delta_b^a L_\alpha^d \Pi_{d\beta}^c)\omega^\alpha \wedge \omega_c^\beta + \\
&+ (\Gamma_\alpha^{ac}\Pi_{b\beta}^d + \Gamma_{e\alpha}^{ac}\Gamma_{b\beta}^{ed} + \delta_b^a \Gamma_\alpha^{ec}\Pi_{e\beta}^d)\omega_c^\alpha \wedge \omega_d^\beta, \\
D\tilde{\omega}_a &= \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b - (\Delta\Gamma_{a\alpha} + \Pi_{a\alpha}^b \omega_b + L_{a\alpha}^b \omega_b) \wedge \omega^\alpha - \\
&- (\Delta\Pi_{a\alpha}^b + \Gamma_{a\alpha}\omega^b + \delta_a^b \omega_\alpha + \Gamma_{a\alpha}^{db}\omega_d) \wedge \omega_b^\alpha + \\
&+ \Gamma_{b\alpha} L_{a\beta}^b \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + (\Gamma_{c\alpha}\Gamma_{a\beta}^{cb} - \Pi_{c\beta}^b L_{a\alpha}^c)\omega^\alpha \wedge \omega_b^\beta + \Pi_{d\alpha}^b \Gamma_{a\beta}^{dc}\omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta, \\
D\tilde{\omega}_\alpha^a &= \tilde{\omega}_\alpha^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^a + \tilde{\omega}_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a - \\
&- (\Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a + \Pi_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b - L_{b\beta}^a \omega_\alpha^b + L_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma^a - L_\beta^a \omega_\alpha + L_{\alpha\beta}\omega^a) \wedge \omega^\beta - \\
&- (\Delta\Pi_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^b - \Gamma_{d\beta}^{ab}\omega_\alpha^d + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b}\omega_\gamma^a - \Gamma_\beta^{ab}\omega_\alpha + G_{\alpha\beta}^b \omega^a) \wedge \omega_b^\beta + \\
&+ (L_{b\beta}^a \Gamma_{\alpha\gamma}^b + L_\beta^a L_{\alpha\gamma} - L_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^a)\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \\
&+ (G_{\alpha\gamma}^b L_\beta^a - \Gamma_{d\gamma}^{ab}\Gamma_{\alpha\beta}^d + \Pi_{\alpha\gamma}^{cb} L_{c\beta}^a - \Gamma_\gamma^{ab} L_{\alpha\beta} - \Pi_{\eta\gamma}^{ab} L_{\alpha\beta}^\eta + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu b}\Gamma_{\mu\beta}^a)\omega^\beta \wedge \omega_b^\gamma + \\
&+ (\Gamma_\beta^{ab} G_{\alpha\gamma}^c + \Pi_{\mu\beta}^{ab}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu c} + \Gamma_{d\beta}^{ab}\Pi_{\alpha\gamma}^{dc})\omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma, \\
D\tilde{\omega}_\beta^\alpha &= \tilde{\omega}_\beta^\gamma \wedge \tilde{\omega}_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \tilde{\omega}_a \wedge \tilde{\omega}^a - \\
&- (\Delta L_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a - \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\beta^\alpha \Gamma_{a\gamma}\omega^a - \delta_\beta^\alpha L_\gamma^a \omega_a - \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta) \wedge \omega^\gamma - \\
&- (\Delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + L_{\beta\gamma}^\alpha \omega^a - \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a - \delta_\beta^\alpha \Gamma_\gamma^{ca}\omega_c + \delta_\beta^\alpha \Pi_{b\gamma}^a \omega^b) \wedge \omega_a^\gamma + \\
&+ (\delta_\beta^\alpha L_\gamma^a \Gamma_{a\mu} - L_{\beta\gamma}^\eta L_{\eta\mu}^\alpha)\omega^\gamma \wedge \omega^\mu + \\
&+ (L_{\eta\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^{\eta a} - \Gamma_{\eta\mu}^{\alpha a} L_{\beta\gamma}^\eta - \delta_\beta^\alpha \Gamma_\mu^{ca}\Gamma_{c\gamma} + \delta_\beta^\alpha \Pi_{b\mu}^a L_\gamma^b)\omega^\gamma \wedge \omega_a^\mu + \\
&+ (\Gamma_{\eta\gamma}^{\alpha a}\Gamma_{\beta\mu}^{\eta b} + \delta_\beta^\alpha \Gamma_\gamma^{ca}\Pi_{c\mu}^b)\omega_a^\gamma \wedge \omega_b^\mu, \\
D\tilde{\omega}_\alpha &= \tilde{\omega}_\alpha^a \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta - \\
&- (\Delta L_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}^a \omega_a + \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega_a - \Gamma_{a\beta}\omega_\alpha^a + L_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma) \wedge \omega^\beta - \\
&- (\Delta G_{\alpha\beta}^a + L_{\alpha\beta}\omega^a + \Pi_{\alpha\beta}^{ba}\omega_b - \Pi_{c\beta}^a \omega_\alpha^c + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma) \wedge \omega_a^\beta + \\
&+ (\Gamma_{a\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^a - L_{\alpha\beta}^\mu L_{\mu\gamma})\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \\
&+ (\Gamma_{b\beta}\Pi_{\alpha\gamma}^{ba} - \Pi_{b\gamma}^a \Gamma_{\alpha\beta}^b - G_{\mu\gamma}^a L_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu a} L_{\mu\beta})\omega^\beta \wedge \omega_a^\gamma + \\
&+ (\Pi_{c\beta}^a \Pi_{\alpha\gamma}^{cb} + G_{\mu\beta}^a \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu\beta})\omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma,
\end{aligned} \tag{1.3.2}
$$

где оператор Δ действует обычным образом:

$$\Delta\Pi_{\alpha\beta}^{ab} = d\Pi_{\alpha\beta}^{ab} + \Pi_{\alpha\beta}^{cb}\omega_c^a + \Pi_{\alpha\beta}^{ac}\omega_c^b - \Pi_{\gamma\beta}^{ab}\omega_\alpha^\gamma - \Pi_{\alpha\gamma}^{ab}\omega_\beta^\gamma.$$

Для задания групповой связности в соответствии с теоремой Картана—Лаптева [19] необходимо и достаточно, чтобы в уравнениях (1.3.2) присутствовали лишь внешние произведения форм связности и базисных форм. Поэтому связность в главном расслоении будет задаваться с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = \{L^a_\alpha,\, \Gamma^{ab}_\alpha,\, L^a_{b\alpha},\, \Gamma^{ac}_{b\alpha},\, \Gamma_{a\alpha},\, \Pi^b_{a\alpha},\, \Gamma^a_{\alpha\beta},\, \Pi^{ab}_{\alpha\beta},\, L^\alpha_{\beta\gamma},\, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma},\, L_{\alpha\beta},\, G^a_{\alpha\beta}\}$$

на базе V, компоненты которого должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}
&\Delta L^a_\alpha - L^a_{b\alpha}\omega^b + \Gamma^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha = L^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + L^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b,\\
&\Delta\Gamma^{ab}_\alpha - \Gamma^{ab}_{c\alpha}\omega^c + L^a_\alpha\omega^b = \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Gamma^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c,\\
&\Delta L^a_{b\alpha} - L^a_\alpha\omega_b + \Gamma_{b\alpha}\omega^a - \delta^a_b L^c_\alpha\omega_c + \delta^a_b\Gamma_{c\alpha}\omega^c + \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega_c - \delta^a_b\omega_\alpha =\\
&\quad = L^a_{b\alpha\beta}\omega^\beta + L^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\beta_c,\\
&\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha} - \Gamma^{ac}_\alpha\omega_b + \Pi^c_{b\alpha}\omega^a - \delta^a_b\Gamma^{ec}_\alpha\omega_e + \delta^a_b\Pi^c_{e\alpha}\omega^e + L^a_{b\alpha}\omega^c + \delta^c_b\omega^a_\alpha =\\
&\quad = \Gamma^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\beta + \Gamma^{ace}_{b\alpha\beta}\omega^\beta_e,\\
&\Delta\Gamma_{a\alpha} + \Pi^b_{a\alpha}\omega_b + L^b_{a\alpha}\omega_b = \Gamma_{a\alpha\beta}\omega^\beta + \Gamma^b_{a\alpha\beta}\omega^\beta_b,\\
&\Delta\Pi^b_{a\alpha} + \Gamma_{a\alpha}\omega^b + \Gamma^{db}_{a\alpha}\omega_d + \delta^b_a\omega_\alpha = \Pi^b_{a\alpha\beta}\omega^\beta + \Pi^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\beta_c,\\
&\Delta\Gamma^a_{\alpha\beta} + \Pi^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b - L^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + L^\gamma_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma - L^a_\beta\omega_\alpha + L_{\alpha\beta}\omega^a = \Gamma^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + \Gamma^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_b,\\
&\Delta\Pi^{ab}_{\alpha\beta} + \Gamma^a_{\alpha\beta}\omega^b - \Gamma^{ab}_{d\beta}\omega^d_\alpha + \Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma - \Gamma^{ab}_\beta\omega_\alpha + G^b_{\alpha\beta}\omega^a = \Pi^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + \Pi^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_c,\\
&\Delta L^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a + \delta^\alpha_\beta\Gamma_{a\gamma}\omega^a - \delta^\alpha_\beta L^a_\gamma\omega_a - \delta^\alpha_\gamma\omega_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega_\gamma = L^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + L^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_a,\\
&\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} + L^\alpha_{\beta\gamma}\omega^a - \delta^\alpha_\beta\Gamma^{ca}_\gamma\omega_c + \delta^\alpha_\beta\Pi^a_{b\gamma}\omega^b - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + \Gamma^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_b,\\
&\Delta L_{\alpha\beta} + G^a_{\alpha\beta}\omega_a + \Gamma^a_{\alpha\beta}\omega_a - \Gamma_{a\beta}\omega^a_\alpha + L^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma = L_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + L^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_a,\\
&\Delta G^a_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}\omega^a + \Pi^{ba}_{\alpha\beta}\omega_b - \Pi^a_{c\beta}\omega^c_\alpha + \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma = G^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + G^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_b.
\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

Дифференциальные уравнения (1.3.3) компонент объекта связности Γ приводят к следующей теореме.

Теорема 1.3.1. *Объект групповой связности Γ содержит единственные простейший и простой* [32] *геометрические подобъекты*

$$\Gamma_1 = \{L^a_\alpha,\, \Gamma^{ab}_\alpha,\, L^a_{b\alpha},\, \Gamma^{ac}_{b\alpha},\, \Gamma_{a\alpha},\, \Pi^b_{a\alpha}\}, \quad \Gamma_2 = \{\Gamma_1,\, L^\alpha_{\beta\gamma},\, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\},$$

задающие связности в фактор-расслоениях $P(V)$ и $H(V)$.

Определение 1.3.1. Подобъект $\Gamma_3 = \{L^\alpha_{\beta\gamma},\, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$ объекта связности Γ, дополняющий простейший подобъект Γ_1 до простого подобъекта Γ_2 и не являющийся геометрическим объектом, назовём объектом псевдосвязности.

Замечание 1.3.1. Объект псевдосвязности будет охарактеризован с помощью центрального проектирования в разделе 1.11.

1.4. Объект кривизны

Ассоциированное расслоение с заданной групповой связностью есть пространство групповой связности, в структурные уравнения которого входят компоненты объекта кривизны.

Найдём выражения компонент объекта кривизны и дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют. Для этого рассмотрим внешние дифференциалы (1.3.2) от форм связности (1.3.1). Подставим в них дифференциальные уравнения (1.3.3) компонент объекта связности Γ, получим структурные уравнения форм связности

$$
\begin{aligned}
&D\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^a_b + R^a_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + R^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_b + R^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c,\\
&D\tilde{\omega}^a_b = \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c + \tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}^a + \delta^a_b \tilde{\omega}_c \wedge \tilde{\omega}^c +\\
&\quad + R^a_{b\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + R^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_c + R^{acd}_{b\alpha\beta}\omega^\alpha_c \wedge \omega^\beta_d,\\
&D\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}^b_a \wedge \tilde{\omega}_b + R_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + K^b_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_b + K^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c,\\
&D\tilde{\omega}^a_\alpha = \tilde{\omega}^b_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a_b + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a_\beta + \tilde{\omega}_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a +\\
&\quad + R^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + R^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_b + R^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,\\
&D\tilde{\omega}^\alpha_\beta = \tilde{\omega}^\gamma_\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\gamma + \delta^\alpha_\beta \tilde{\omega}_a \wedge \tilde{\omega}^a + R^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu + R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu_a + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma_a \wedge \omega^\mu_b,\\
&D\tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}^a_\alpha \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}_\beta + R_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + K^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a + K^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b,
\end{aligned}
$$

где компоненты объекта кривизны

$$
\begin{aligned}
R = \{&R^a_{\alpha\beta}, R^{ab}_{\alpha\beta}, R^{abc}_{\alpha\beta}, R^a_{b\alpha\beta}, R^{ac}_{b\alpha\beta}, R^{acd}_{b\alpha\beta}, R_{a\alpha\beta}, K^b_{a\alpha\beta}, K^{bc}_{a\alpha\beta}, R^a_{\alpha\beta\gamma}, R^{ab}_{\alpha\beta\gamma},\\
&R^{abc}_{\alpha\beta\gamma}, R^\alpha_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}, R_{\alpha\beta\gamma}, K^a_{\alpha\beta\gamma}, K^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\}
\end{aligned}
$$

групповой связности Γ выражаются по формулам, в которые входят компоненты объекта групповой связности и его пфаффовы производные.

Продолжаем уравнения (1.3.3) компонент объекта связности Γ. Затем, учитывая формулы, по которым выражаются компоненты объекта кривизны R, находим дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны R. Из этих сравнений вытекает следующая теорема.

Теорема 1.4.1. *Объект кривизны R — тензор, содержащий два подтензора, которые являются тензорами кривизны подсвязностей Γ_1 и Γ_2.*

1.5. Объект кручения

Подставляя в структурные уравнения (1.2.1) базисных форм многообразия Грассмана формы связности (1.3.1), приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&D\omega^\alpha = \tilde{\omega}^a \wedge \omega^\alpha_a - \tilde{\omega}^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a + S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b,\\
&D\omega^\alpha_a = \tilde{\omega}^b_a \wedge \omega^\alpha_b - \tilde{\omega}^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_a + \tilde{\omega}_a \wedge \omega^\alpha + S^\alpha_{a\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_b +\\
&\quad + S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,
\end{aligned}
$$

где компоненты объекта S выражаются по формулам

$$
\begin{gathered}
S^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{[\beta\gamma]}, \quad S^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \delta^\alpha_\gamma L^a_\beta, \quad S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_{\lfloor\beta}\Gamma^{\lceil ab}{}_{\gamma\rfloor\rceil}, \quad S^\alpha_{a\beta\gamma} = -\delta^\alpha_{[\beta}\Gamma_{a\gamma]},\\
S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\beta \Pi^b_{a\gamma} + \delta^\alpha_\gamma L^b_{a\beta} - \delta^b_a L^\alpha_{\gamma\beta}, \quad S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = -\delta^\alpha_{\lfloor\beta}\Gamma^{\lceil bc\rceil}_{a\gamma\rfloor} + \delta^{\lceil b}_a \Gamma^{\alpha c\rceil}_{\lfloor\beta\gamma\rfloor}.
\end{gathered}
$$

Квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам, например

$$\delta^{\alpha}_{[\beta}\Gamma^{[ab}{}_{\gamma]} = \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma^{ab}_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\Gamma^{ba}_{\beta}).$$

В правых частях данных равенств содержатся лишь компоненты подобъекта Γ_1, поэтому будем называть объект S объектом кручения подсвязности Γ_1.

Учитывая дифференциальные сравнения компонент подобъекта Γ_1, приходим к сравнениям по модулю базисных форм, из которых следует теорема 1.5.1.

Теорема 1.5.1. *Объект кручения S подсвязности Γ_1 фундаментально-групповой связности Γ на многообразии Грассмана V m-мерных плоскостей является тензором.*

1.6. Оснащение Бортолотти, связность первого типа

Произведём оснащение Бортолотти [36] многообразия Грассмана, которое состоит в присоединении к каждой m-мерной плоскости L_m $(n-m-1)$-мерной плоскости P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L_m.

Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$. Найдём уравнения относительной инвариантности плоскости P_{n-m-1}. Для этого рассмотрим дифференциалы точек B_α. Подставляя в дифференциалы базисных точек оснащающей плоскости формулы (1.1.1) инфинитезимальных перемещений подвижного репера, учитывая выражения точек B_α и $A_\beta = B_\beta - \lambda^a_\beta A_a - \lambda_\beta A$ и сворачивая данное выражение при помощи оператора Δ, получим

$$\begin{aligned} dB_\alpha = {} & (\delta^\beta_\alpha\theta + \omega^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega^\beta_a + \lambda_\alpha\omega^\beta)B_\beta + \\ & + (\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha - \lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\omega^\beta_b - \lambda^a_\beta\lambda_\alpha\omega^\beta)A_a + \\ & + (\Delta\lambda_\alpha + \omega_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a - \lambda_\beta\lambda^a_\alpha\omega^\beta_a - \lambda_\alpha\lambda_\beta\omega^\beta)A. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Условия стационарности плоскости P_{n-m-1} имеют вид

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha \equiv 0, \quad \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0, \tag{1.6.2}$$

или в более подробной записи

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b, \quad \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a. \tag{1.6.3}$$

Теорема 1.6.1. *Оснащение Бортолотти, задаваемое полем квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$ на многообразии V, индуцирует связность (первого типа)*

$$\overset{01}{\Gamma} = \Big\{\overset{0}{L}{}^a_\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_\alpha, \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}, \overset{0}{\Pi}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{L}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{c\alpha}, \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}, \overset{01}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta}, \overset{01}{L}_{\alpha\beta}, \overset{01}{G}{}^a_{\alpha\beta}\Big\}$$

в расслоении $G(V)$.

Доказательство заключается в построении охватов. Учитывая дифференциальные уравнения (1.3.3) компонент объекта групповой связности Γ и дифференциальные сравнения (1.6.2) компонент оснащающего квазитензора, можно построить охват объекта групповой связности Γ компонентами оснащающего квазитензора λ:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha}=0,\quad \overset{0}{L}{}^{a}_{b\alpha}=-\delta^{a}_{b}\lambda_{\alpha},\quad \overset{0}{L}{}^{a}_{\alpha}=\lambda^{a}_{\alpha},\quad \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{c\alpha}=\delta^{b}_{c}\lambda^{a}_{\alpha},\quad \overset{0}{\Gamma}{}_{a\alpha}=0,$$
$$\overset{0}{\Pi}{}^{b}_{a\alpha}=\delta^{b}_{a}\lambda_{\alpha},\quad \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}=-\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda^{a}_{\beta},\quad \overset{0}{L}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}=-\delta^{\alpha}_{\beta}\lambda_{\gamma}-\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda_{\beta}; \tag{1.6.4}$$

$$\overset{01}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta}=-\lambda^{a}_{\beta}\lambda^{b}_{\alpha},\quad \overset{01}{L}{}_{\alpha\beta}=-\lambda_{\alpha}\lambda_{\beta},\quad \overset{01}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta}=-\lambda_{\alpha}\lambda^{a}_{\beta},\quad \overset{01}{G}{}^{a}_{\alpha\beta}=-\lambda^{a}_{\alpha}\lambda_{\beta}. \tag{1.6.5}$$

1.7. Ковариантный дифференциал оснащающего квазитензора Бортолотти

С помощью способа Лаптева задания групповой связности вводится понятие ковариантного дифференциала и ковариантных производных геометрического объекта относительно этой связности.

Задавая на многообразии Грассмана V поле геометрического объекта λ, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (1.6.3), мы тем самым задавали дифференциально-геометрическую структуру первого порядка на главном расслоении $G(V)$.

Запишем условия (1.6.3) в развёрнутом виде:

$$\begin{gathered} d\lambda^{a}_{\alpha}+\lambda^{b}_{\alpha}\omega^{a}_{b}+\lambda_{\alpha}\omega^{a}-\lambda^{a}_{\beta}\omega^{\beta}_{\alpha}+\omega^{a}_{\alpha}=\lambda^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}+\lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b},\\ d\lambda_{\alpha}+\lambda^{a}_{\alpha}\omega_{a}-\lambda_{\beta}\omega^{\beta}_{\alpha}+\omega_{\alpha}=\lambda_{\alpha\beta}\omega^{\beta}+\Lambda^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{a}. \end{gathered} \tag{1.7.1}$$

Внесём в уравнения (1.7.1) формы связности $\tilde{\omega}$ (1.3.1), получим ковариантные дифференциалы компонент объекта λ

$$\begin{gathered} \nabla\lambda^{a}_{\alpha}=d\lambda^{a}_{\alpha}+\lambda^{b}_{\alpha}\tilde{\omega}^{a}_{b}-\lambda^{a}_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}+\lambda_{\alpha}\tilde{\omega}^{a}+\tilde{\omega}^{a}_{\alpha},\\ \nabla\lambda_{\alpha}=d\lambda_{\alpha}+\lambda^{a}_{\alpha}\tilde{\omega}_{a}-\lambda_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}+\tilde{\omega}_{\alpha} \end{gathered} \tag{1.7.2}$$

и ковариантные производные

$$\begin{gathered} \nabla_{\beta}\lambda^{a}_{\alpha}=\lambda^{a}_{\alpha\beta}-\lambda^{b}_{\alpha}L^{a}_{b\beta}+\lambda^{a}_{\gamma}L^{\gamma}_{\alpha\beta}-\lambda_{\alpha}L^{a}_{\beta}-\Gamma^{a}_{\alpha\beta},\\ \nabla^{b}_{\beta}\lambda^{a}_{\alpha}=\lambda^{ab}_{\alpha\beta}-\lambda^{c}_{\alpha}\Gamma^{ab}_{c\beta}+\lambda^{a}_{\gamma}\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta}-\lambda_{\alpha}\Gamma^{ab}_{\beta}-\Pi^{ab}_{\alpha\beta},\\ \nabla_{\beta}\lambda_{\alpha}=\lambda_{\alpha\beta}-\lambda^{a}_{\alpha}\Gamma_{a\beta}+\lambda_{\gamma}L^{\gamma}_{\alpha\beta}-L_{\alpha\beta},\\ \nabla^{a}_{\beta}\lambda_{\alpha}=\Lambda^{a}_{\alpha\beta}-\lambda^{b}_{\alpha}\Pi^{a}_{b\beta}+\lambda_{\gamma}\Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}-G^{a}_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{1.7.3}$$

Итак, ковариантные дифференциалы компонент объекта λ выражаются через ковариантные производные

$$\nabla\lambda^{a}_{\alpha}=\nabla_{\beta}\lambda^{a}_{\alpha}\omega^{\beta}+\nabla^{b}_{\beta}\lambda^{a}_{\alpha}\omega^{\beta}_{b},\quad \nabla\lambda_{\alpha}=\nabla_{\beta}\lambda_{\alpha}\omega^{\beta}+\nabla^{a}_{\beta}\lambda_{\alpha}\omega^{\beta}_{a}.$$

Теорема 1.7.1. *Ковариантные производные* (1.7.3) *оснащающего квазитензора λ в групповой связности Γ образуют тензор.*

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из дифференциальных сравнений для ковариантных производных

$$\Delta\nabla_\beta\lambda^a_\alpha + \nabla_\beta\lambda_\alpha\omega^a + \nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha\omega_b \equiv 0, \quad \Delta\nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha + \nabla^b_\beta\lambda_\alpha\omega^a + \nabla_\beta\lambda^a_\alpha\omega^b \equiv 0,$$
$$\Delta\nabla_\beta\lambda_\alpha + (\nabla_\beta\lambda^a_\alpha + \nabla^a_\beta\lambda_\alpha)\omega_a \equiv 0, \quad \Delta\nabla^a_\beta\lambda_\alpha + \nabla_\beta\lambda_\alpha\omega^a + \nabla^a_\beta\lambda^b_\alpha\omega_b \equiv 0. \quad \square$$

С помощью структурных уравнений найдём внешние дифференциалы от ковариантных дифференциалов (1.7.2) компонент оснащающего квазитензора λ:

$$D\nabla\lambda^a_\alpha = \nabla\lambda^b_\alpha \wedge \tilde\omega^a_b + \nabla\lambda_\alpha \wedge \tilde\omega^a - \nabla\lambda^a_\beta \wedge \tilde\omega^\beta_\alpha + T^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma +$$
$$+ T^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_b + T^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,$$
$$D\nabla\lambda_\alpha = \nabla\lambda^a_\alpha \wedge \tilde\omega_a - \nabla\lambda_\beta \wedge \tilde\omega^\beta_\alpha + T_{\alpha\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu + S^a_{\alpha\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu_a +$$
$$+ S^{ab}_{\alpha\gamma\mu}\omega^\gamma_a \wedge \omega^\mu_b,$$

где

$$T^a_{\alpha\beta\gamma} = R^a_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^b_\alpha R^a_{b\beta\gamma} - \lambda^a_\mu R^\mu_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_\alpha R^a_{\beta\gamma},$$
$$T^{ab}_{\alpha\beta\gamma} = R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^c_\alpha R^{ab}_{c\beta\gamma} - \lambda^a_\mu R^{\mu b}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_\alpha R^{ab}_{\beta\gamma},$$
$$T^{abc}_{\alpha\beta\gamma} = R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^e_\alpha R^{abc}_{e\beta\gamma} - \lambda^a_\mu R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_\alpha R^{abc}_{\beta\gamma},$$
$$T_{\alpha\beta\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^a_\alpha R_{a\beta\gamma} - \lambda_\mu R^\mu_{\alpha\beta\gamma},$$
$$S^a_{\alpha\beta\gamma} = K^a_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^b_\alpha K^a_{b\beta\gamma} - \lambda_\mu R^{\mu a}_{\alpha\beta\gamma},$$
$$S^{ab}_{\alpha\beta\gamma} = K^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^c_\alpha K^{ab}_{c\beta\gamma} - \lambda_\mu R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Таким образом, при внешнем дифференцировании ковариантного дифференциала появляется объект, компоненты которого являются комбинациями компонент тензора кривизны групповой связности с коэффициентами — компонентами оснащающего квазитензора.

Определение 1.7.1. Объект

$$T = \{T^a_{\alpha\beta\gamma},\ T^{ab}_{\alpha\beta\gamma},\ T^{abc}_{\alpha\beta\gamma},\ T_{\alpha\beta\gamma},\ S^a_{\alpha\beta\gamma},\ S^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\}$$

называется объектом неабсолютных перенесений [32].

Теорема 1.7.2. *Объект неабсолютных перенесений T образует тензор.*

1.8. Связность второго типа в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана

При помощи ковариантных производных построим второй охват компонент объекта связности Γ.

Из теоремы 1.7.1 вытекает инвариантность обращения в нуль ковариантных производных (1.7.3) компонент оснащающего квазитензора λ. Приравнивая их нулю, найдём выражения компонент $\Gamma^a_{\alpha\beta}$, $\Pi^{ab}_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta}$, $G^a_{\alpha\beta}$ объекта связности Γ

через компоненты простого подобъекта Γ_2. Получаем пучок связностей второго типа:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha L^a_{b\beta} + \lambda^a_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha L^a_\beta, \quad \overset{2}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^c_\alpha \Gamma^{ab}_{c\beta} + \lambda^a_\gamma \Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha \Gamma^{ab}_\beta,$$
$$\overset{2}{L}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} - \lambda^a_\alpha \Gamma_{a\beta}, \quad \overset{2}{G}{}^a_{\alpha\beta} = \Lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_\gamma \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha \Pi^a_{b\beta}.$$

Учитывая охват подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_2$ (1.6.4), имеем

$$\begin{aligned} \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} &= \lambda^a_{\alpha\beta} - 2\lambda_\alpha\lambda^a_\beta, & \overset{02}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta} &= \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - 2\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha, \\ \overset{02}{L}_{\alpha\beta} &= \lambda_{\alpha\beta} - 2\lambda_\alpha\lambda_\beta, & \overset{02}{G}{}^a_{\alpha\beta} &= \Lambda^a_{\alpha\beta} - 2\lambda^a_\alpha\lambda_\beta. \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

Теорема 1.8.1. *Оснащение Бортолотти многообразия Грассмана V индуцирует пучок связностей второго типа в ассоциированном расслоении $G(V)$, из которого выделяется связность второго типа*

$$\overset{02}{\Gamma} = \Big\{ \overset{0}{L}{}^a_\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_\alpha, \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}, \overset{0}{\Pi}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{L}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{c\alpha}, \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}, \overset{02}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta}, \overset{02}{L}_{\alpha\beta}, \overset{02}{G}{}^a_{\alpha\beta} \Big\}.$$

1.9. Связность третьего типа в расслоении над многообразием Грассмана

Построим третий охват компонент объекта связности Γ. Учтём продолженные дифференциальные сравнения компонент оснащающего объекта λ, дифференциальные уравнения (1.3.3), которым удовлетворяют компоненты объекта связности Γ, и охват простого подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_2$ (1.6.4). С учётом дифференциальных сравнений компонент λ^a_α оснащающего квазитензора λ получим, что

$$\overset{03}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda^a_{\alpha\beta}, \quad \overset{03}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^{ab}_{\alpha\beta}, \quad \overset{03}{L}_{\alpha\beta} = -\lambda_{\alpha\beta}, \quad \overset{03}{G}{}^a_{\alpha\beta} = -\Lambda^a_{\alpha\beta}. \tag{1.9.1}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.9.1. *Оснащение Бортолотти индуцирует связность третьего типа*

$$\overset{03}{\Gamma} = \Big\{ \overset{0}{L}{}^a_\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_\alpha, \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}, \overset{0}{\Pi}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{L}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{c\alpha}, \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \overset{03}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}, \overset{03}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta}, \overset{03}{L}_{\alpha\beta}, \overset{03}{G}{}^a_{\alpha\beta} \Big\}.$$

1.10. Условия совпадения и связь объектов групповых связностей трёх типов

Найдём условия, при которых совпадают построенные охваты трёх типов. Для этого приравняем соответствующие компоненты объекта связности Γ по парам и учтём формулы, по которым выражаются компоненты подобъекта $\Gamma\backslash\Gamma_2$, охваченные тремя разными способами.

Теорема 1.10.1. *Связности любых двух типов совпадают тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\lambda^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta, \quad \lambda^a_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda^a_\beta, \quad \Lambda^a_{\alpha\beta} = \lambda^a_\alpha \lambda_\beta. \tag{1.10.1}$$

Условия (1.10.1) являются необходимыми и достаточными условиями совпадения связностей всех типов, поэтому можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.10.2. *Связности всех трёх типов совпадают тогда и только тогда, когда выполнены условия* (1.10.1).

Теорема 1.10.3. *Связность первого типа является средней* [25, с. 129] *по отношению к связностям второго и третьего типов, т. е.*

$$\overset{01}{\Gamma} = \frac{1}{2}\Big(\overset{02}{\Gamma} + \overset{03}{\Gamma}\Big).$$

Доказательство. Сравнивая формулы (1.6.5), (1.8.1), (1.9.1), по которым выражаются компоненты объекта связности в построенных охватах, убеждаемся в справедливости теоремы. □

Теорема 1.10.4. *Совпадение групповых связностей трёх типов эквивалентно неподвижности оснащающей плоскости Бортолотти P_{n-m-1}.*

Доказательство. Дифференциалы точек B_α (1.6.1) с учётом дифференциальных уравнений (1.6.3) компонент оснащающего квазитензора λ можно привести к виду

$$dB_\alpha = (\ldots)^\beta_\alpha B_\beta + [(\lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha)\omega^\beta_b + (\lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda^a_\beta \lambda_\alpha)\omega^\beta]A_a + \\ + [(\Lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda_\beta \lambda^a_\alpha)\omega^\beta_a + (\lambda_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha \lambda_\beta)\omega^\beta]A.$$

Из этих формул, а также из формул (1.10.1) следует справедливость теоремы. □

1.11. Геометрическая характеристика индуцированных связностей с помощью отображений

Дадим геометрическую характеристику полученным простейшему и простому подобъектам с помощью отображений имеющихся плоскостей.

Теорема 1.11.1. *Простейший подобъект $\overset{0}{\Gamma}_1$ характеризуется центральным проектированием плоскости $L_m + dL_m$, смежной с образующей плоскостью L_m, на исходную плоскость из центра — плоскости Бортолотти P_{n-m-1}:*

$$\overset{0}{\Gamma}_1 \colon L_m + dL_m \xrightarrow{P_{n-m-1}} L_m. \tag{1.11.1}$$

Доказательство. Учитывая в выражениях дифференциалов точек образующей плоскости L_m инфинитезимальные перемещения подвижного репера (1.1.1), выражения базисных точек B_α оснащающей плоскости Бортолотти, выражения форм $\tilde{\omega}$ групповой связности (1.3.1) и охват $\overset{0}{\Gamma}_1$, имеем, что

$$dA = (\theta - \lambda_\alpha \omega^\alpha) A + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^a A_a + \omega^\alpha B_\alpha,$$

$$dA_a = (\theta - \lambda_\alpha \omega^\alpha) A_a + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^b_a A_b + \overset{0}{\tilde{\omega}}_a A + \omega^\alpha_a B_\alpha.$$

Интересующая нас проекция определяется формами проективной связности $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^a$, $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^b_a$, $\overset{0}{\tilde{\omega}}_a$, которые выражаются с помощью подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_1$. □

Теорема 1.11.2. *Объект псевдосвязности $\overset{0}{\Gamma}_3$ характеризуется центральным проектированием плоскости $P_{n-m-1} + dP_{n-m-1}$, смежной с оснащающей плоскостью P_{n-m-1}, на исходную плоскость из центра — образующей плоскости L_m:*

$$\overset{0}{\Gamma}_3 \colon P_{n-m-1} + dP_{n-m-1} \xrightarrow{L_m} P_{n-m-1}. \qquad (1.11.2)$$

Доказательство. Вводя формы связности $\tilde{\omega}$ (1.3.1) в выражения дифференциалов точек B_α (1.6.1), получим, что

$$dB_\alpha = (\theta - \lambda_\gamma \omega^\gamma) B_\alpha + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha B_\beta + (\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha \omega^a + \omega^a_\alpha - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha \omega^\beta_b - \lambda^a_\beta \lambda_\alpha \omega^\beta) A_a + \\ + (\Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha \omega_a + \omega_\alpha - \lambda_\beta \lambda^a_\alpha \omega^\beta_a - \lambda_\alpha \lambda_\beta \omega^\beta) A. \qquad (1.11.3)$$

Рассматриваемая проекция из центра — плоскости $L_m = [A, A_a]$ определяется формами $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha$ псевдосвязности $\overset{0}{\Gamma}_3$. □

Следствие 1.11.1. *Простой подобъект $\overset{0}{\Gamma}_2$ характеризуется парой отображений* (1.11.1), (1.11.2).

1.12. Пучок связностей первого типа

Оснащение Бортолотти индуцирует пучок связностей первого типа [27], в котором выделяется подсвязность.

Вводя формы связности $\tilde{\omega}$ (1.3.1) и выражения ковариантных дифференциалов (1.7.2) в выражения дифференциалов точек B_α (1.11.3), получим, что

$$dB_\alpha = (\ldots)^\beta_\alpha B_\beta + (\nabla\lambda^a_\alpha + l^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + l^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b) A_a + (\nabla\lambda_\alpha + l_{\alpha\beta}\omega^\beta + m^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a) A, \quad (1.12.1)$$

где

$$\begin{aligned} l^a_{\alpha\beta} &= \Gamma^a_{\alpha\beta} + \lambda^b_\alpha L^a_{b\beta} - \lambda^a_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha L^a_\beta - \lambda^a_\beta \lambda_\alpha, \\ l^{ab}_{\alpha\beta} &= \Pi^{ab}_{\alpha\beta} + \lambda^c_\alpha \Gamma^{ab}_{c\beta} - \lambda^a_\gamma \Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \Gamma^{ab}_\beta - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha, \\ l_{\alpha\beta} &= L_{\alpha\beta} - \lambda_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} + \lambda^a_\alpha \Gamma_{a\beta} - \lambda_\beta \lambda_\alpha, \\ m^a_{\alpha\beta} &= G^a_{\alpha\beta} - \lambda_\gamma \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta} + \lambda^b_\alpha \Pi^a_{b\beta} - \lambda_\beta \lambda^a_\alpha. \end{aligned} \qquad (1.12.2)$$

Дифференцируя величины (1.12.2), получим сравнения

$$\begin{aligned} &\Delta l^a_{\alpha\beta} + l^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b + l_{\alpha\beta}\omega^a \equiv 0, \quad \Delta l^{ab}_{\alpha\beta} + l^a_{\alpha\beta}\omega^b + m^b_{\alpha\beta}\omega^a \equiv 0, \\ &\Delta l_{\alpha\beta} + (m^a_{\alpha\beta} + l^a_{\alpha\beta})\omega_a \equiv 0, \quad \Delta m^a_{\alpha\beta} + l_{\alpha\beta}\omega^a + l^{ba}_{\alpha\beta}\omega_b \equiv 0, \end{aligned} \tag{1.12.3}$$

из которых следует, что объект $l = \{l^a_{\alpha\beta},\, l^{ab}_{\alpha\beta},\, l_{\alpha\beta}, m^a_{\alpha\beta}\}$ является тензором.

Определение 1.12.1. Будем говорить, что групповая связность Γ принадлежит пучку первого типа [27], если тензор l равен нулю.

Приравняем компоненты объекта l к нулю и обозначим соответствующий объект связности через $\overset{1}{\Gamma}$. Получим следующие формулы для его компонент:

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda^b_\alpha L^a_{b\beta} + \lambda^a_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha L^a_\beta + \lambda^a_\beta\lambda_\alpha, \\ &\overset{1}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^c_\alpha \Gamma^{ab}_{c\beta} + \lambda^a_\gamma \Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha \Gamma^{ab}_\beta + \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha, \\ &\overset{1}{L}_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} - \lambda^a_\alpha \Gamma_{a\beta} + \lambda_\beta\lambda_\alpha, \\ &\overset{1}{G}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha \Pi^a_{b\beta} + \lambda_\beta \lambda^a_\alpha, \end{aligned} \tag{1.12.4}$$

т. е. групповая связность Γ может быть сведена к подсвязности

$$\Gamma_2 = \{L^a_\alpha,\, \Gamma^{ab}_\alpha,\, L^a_{b\alpha},\, \Gamma^{ac}_{b\alpha},\, \Gamma_{a\alpha},\, \Pi^b_{a\alpha},\, L^\alpha_{\beta\gamma},\, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}.$$

Так возникает пучок групповых связностей первого типа, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 1.12.1. *Оснащение Бортолотти многообразия Грассмана V индуцирует пучок групповых связностей первого типа в расслоении $G(V)$.*

Для выделения в пучке групповых связностей первого типа одной связности подставим в (1.12.4) выражения компонент объекта $\overset{0}{\Gamma}_2$ (1.6.4) и получим формулы (1.6.5) для компонент связности первого типа $\overset{01}{\Gamma}$.

1.13. Вырожденные параллельные перенесения в индуцированных связностях многообразия Грассмана

В этом разделе нами рассматриваются всевозможные параллельные перенесения оснащающей плоскости, при помощи их даётся геометрическая интерпретация связностей трёх типов, индуцированных оснащением Бортолотти многообразия Грассмана. Рассматриваются условия обращения в нуль ковариантных дифференциалов компонент оснащающего квазитензора.

Определение 1.13.1. Будем говорить, что геометрический образ, задаваемый геометрическим объектом, переносится параллельно в некоторой связности, если ковариантный дифференциал геометрического объекта обращается в нуль [32].

Для многообразия Грассмана параллельные перенесения оснащающей плоскости вырожденны.

1. При обращении в нуль ковариантных производных оснащающего квазитензора специальных смещений оснащающей плоскости Бортолотти P_{n-m-1}, вообще говоря, не выделяется. Иначе говоря, параллельное перенесение плоскости P_{n-m-1} в произвольной связности Γ является свободно вырожденным [31].
2. В групповой связности первого типа параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} будет связанно вырожденным, т. е. плоскость Бортолотти P_{n-m-1} неподвижна при параллельном перенесении в этой связности.
3. В групповой связности второго и третьего типов параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} будет свободно вырожденным.

Тензор σ, при обращении которого в нуль связности совпадают, будем называть тензором деформации [25, с. 128; 26].

Замечание 1.13.1. Деформация связности второго типа по отношению к связности первого типа равна σ, т. е. $\overset{02}{\Gamma} - \overset{01}{\Gamma} = \sigma$. Деформация связности третьего типа по отношению к связностям первого и второго типов пропорциональна σ с коэффициентами -1 и -2, т. е. $\overset{03}{\Gamma} - \overset{01}{\Gamma} = -\sigma$, $\overset{03}{\Gamma} - \overset{02}{\Gamma} = -2\sigma$.

В разделе 1.12 была получена формула (1.12.1), по которой дифференциалы базисных точек плоскости Бортолотти выражались через ковариантные дифференциалы оснащающего квазитензора λ и компоненты тензора l (1.12.2).

Определение 1.13.2. Тензор l, компоненты которого служат коэффициентами при базисных формах в выражениях дифференциалов базисных точек оснащающей плоскости при введении в них ковариантных дифференциалов и обращение которого в нуль характеризует связанно вырожденные параллельные перенесения оснащающих плоскостей, назовём тензором подвижности параллелизма.

Компоненты тензора подвижности параллелизма l удовлетворяют сравнениям (1.12.3).

Замечание 1.13.2. Компоненты тензоров деформации σ и подвижности параллелизма l многообразия Грассмана удовлетворяют одинаковым дифференциальным сравнениям.

Групповая связность Γ принадлежит пучку первого типа, если тензор l равен нулю. Учитывая выражения компонент объекта l, формулы охватов (1.6.4), (1.6.5), (1.8.1), (1.9.1) компонент объекта связности Γ и равенства, по которым выражаются компоненты объекта σ, получим следующую теорему.

Теорема 1.13.1. *Тензор подвижности параллелизма l в связности первого типа обращается в нуль ($l = 0$), в связности второго типа совпадает с тензором деформации ($l = \sigma$), а в связности третьего типа противоположен тензору деформации ($l = -\sigma$).*

1.14. Связность над областью проективного пространства

В качестве примера будет рассмотрен частный случай многообразия Грассмана $V = \mathrm{Gr}(m, n)$ m-мерных плоскостей L_m, когда $m = 0$.

В проективном пространстве P_n исследована область V_0, описанная точкой A, т. е. специальное многообразие Грассмана точек $V_0 = \mathrm{Gr}(0, n)$ [32]. Все полученные результаты для многообразия Грассмана, т. е. для общего случая, подтвердились и для этого частного случая, рассматривавшегося Норденом.

2. Связность в расслоении, ассоциированном с пространством центрированных плоскостей

В разделе 1 мы изучили многообразие Грассмана m-мерных плоскостей. В данном разделе исследуется пространство центрированных плоскостей, т. е. пространство m-мерных плоскостей с фиксированным центром. Строится ассоциированное расслоение (главное расслоение), базой которого является пространство центрированных плоскостей, а типовым слоем — подгруппа стационарности центрированной плоскости. В главном расслоении выделяются все фактор-расслоения. Вводится фундаментально-групповая связность с помощью поля объекта связности и доказывается, что сильное аффинное оснащение пространства центрированных плоскостей позволяет задать связности в главном расслоении. Доказывается, что объект кручения групповой связности является квазитензором. Выясняются геометрические характеристики подобъектов с помощью центральных проектирований и параллельных перенесений оснащающих плоскостей. Определяются ковариантные дифференциалы и ковариантные производные оснащающего квазитензора, причём, в отличие от многообразия Грассмана, только часть ковариантных производных образует тензор, что усложняет нахождение второго охвата компонент объекта групповой связности компонентами оснащающего квазитензора. Находятся условия совпадения охватов трёх типов и выражения, их связывающие. Вводится тензор деформации и объект, который является линейной комбинацией компонент тензора деформации и оснащающего квазитензора. Выделяется пучок связностей первого типа, индуцированный аналогом нормализации Нордена пространства центрированных плоскостей.

2.1. Пространство центрированных плоскостей в проективном пространстве

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим пространство Π всех центрированных плоскостей размерности m.

Произведём специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$: вершину A поместим в центр m-мерной плоскости L_m, а вершины A_a на плоскость L_m. Центрированную плоскость будем обозначать L^*_m.

Из деривационных формул (1.1.1) следует, что уравнения

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^a = 0, \quad \omega_a^\alpha = 0$$

являются условиями стационарности центрированной плоскости L_m^*, т. е. формы ω^α, ω^a, ω_a^α главные. Для пространства центрированных плоскостей эти формы базисные, тогда

$$\dim \Pi = \dim V + m = n + m(n-m).$$

2.2. Главное расслоение, ассоциированное с пространством центрированных плоскостей

Выделим главное расслоение и укажем все его фактор-расслоения.

С пространством Π центрированных плоскостей L_m^* ассоциируется главное расслоение $G(\Pi)$, причём $\dim G = n(n+1) - m(n-m)$.

Базисные формы ω^α, ω^a, ω_a^α удовлетворяют структурным уравнениям Картана (1.1.2):

$$\begin{gathered} D\omega^\alpha = \omega^a \wedge \omega_a^\alpha - \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a - \omega_\alpha^a \wedge \omega^\alpha, \\ D\omega_a^\alpha = (\delta_\beta^\alpha \omega_a^b - \delta_a^b \omega_\beta^\alpha) \wedge \omega_b^\beta + \omega_a \wedge \omega^\alpha. \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

Внешние дифференциалы от вторичных форм имеют вид

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega_\alpha \wedge \omega_a^\alpha, \tag{2.2.2}$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + (\delta_c^a \omega_b + \delta_b^a \omega_c) \wedge \omega^c + \delta_b^a \omega_\alpha \wedge \omega^\alpha - \omega_\alpha^a \wedge \omega_b^\alpha, \tag{2.2.3}$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \omega_a \wedge \omega^a + (\delta_\gamma^\alpha \omega_\beta + \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma) \wedge \omega^\gamma + \omega_\beta^a \wedge \omega_a^\alpha, \tag{2.2.4}$$

$$D\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \omega_\alpha \wedge \omega^a, \tag{2.2.5}$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta. \tag{2.2.6}$$

Таким образом, над пространством Π мы построили главное расслоение $G(\Pi)$ со структурными уравнениями (2.2.1)—(2.2.6), типовым слоем которого является подгруппа стационарности G центрированной плоскости L_m^*, а базой — пространство Π.

Выделим из главного расслоения $G(\Pi)$ следующие фактор-расслоения:

1) фактор-расслоение линейных реперов, принадлежащих плоскости L_m^*, типовым слоем которого является линейная фактор-группа $\mathrm{GL}(m)$, действующая в пучке прямых, принадлежащих плоскости L_m^*, со структурными уравнениями (2.2.1), (2.2.3);
2) фактор-расслоение нормальных линейных реперов, двойственное подрасслоению, рассмотренному в пункте 1), со структурными уравнениями (2.2.1), (2.2.4);
3) фактор-расслоение плоскостных коаффинных реперов, принадлежащих плоскости L_m^*, типовым слоем которого является коаффинная фактор-группа $\mathrm{GA}^*(m)$, действующая в плоскости L_m^*, причём $\mathrm{GL}(m) \subset \mathrm{GA}^*(m) \subset G$, со структурными уравнениями (2.2.1)—(2.2.3);

4) аффинное фактор-расслоение, типовым слоем которого является фактор-группа, действующая в пучке прямых с центром в точке A, со структурными уравнениями (2.2.1), (2.2.3)—(2.2.5);
5) максимальное фактор-расслоение со структурными уравнениями (2.2.1)—(2.2.5), составленное из фактор-расслоения плоскостных коаффинных реперов и аффинного фактор-расслоения.

2.3. Фундаментально-групповая связность

В главном расслоении $G(\Pi)$ зададим фундаментально-групповую связность по Г. Ф. Лаптеву [19]. Для этого введём новые слоевые формы:

$$\begin{gathered}
\tilde\omega_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha}\omega^\alpha - \Gamma_{ab}\omega^b - \Pi^b_{a\alpha}\omega^\alpha_b, \quad \tilde\omega^a_b = \omega^a_b - L^a_{b\alpha}\omega^\alpha - L^a_{bc}\omega^c - \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c,\\
\tilde\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - L^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma - L^\alpha_{\beta a}\omega^a - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a, \qquad (2.3.1)\\
\tilde\omega^a_\alpha = \omega^a_\alpha - L^a_{\alpha\beta}\omega^\beta - L^a_{\alpha b}\omega^b - \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b, \quad \tilde\omega_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}\omega^\beta - \Gamma_{\alpha a}\omega^a - \Pi^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a.
\end{gathered}$$

Структурные уравнения форм связности (2.3.1) главного расслоения находим по аналогии с разделом 1.3. Связность в главном расслоении задаётся с помощью поля объекта связности Γ на базе Π, компоненты которого должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}
\Delta L^a_{b\alpha} - L^a_{bc}\omega^c_\alpha + \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega_c - \delta^a_b\omega_\alpha = L^a_{b\alpha\beta}\omega^\beta + L^a_{b\alpha c}\omega^c + L^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\beta_c,\\
\Delta L^a_{bc} - \delta^a_c\omega_b - \delta^a_b\omega_c = L^a_{bc\alpha}\omega^\alpha + L^a_{bce}\omega^e + L^{ae}_{bc\alpha}\omega^\alpha_e,\\
\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha} + \delta^c_b\omega^a_\alpha = \Gamma^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\beta + \Gamma^{ac}_{b\alpha e}\omega^e + \Gamma^{ace}_{b\alpha\beta}\omega^\beta_e,\\
\Delta\Gamma_{a\alpha} - \Gamma_{ab}\omega^b_\alpha + (\Pi^b_{a\alpha} + L^b_{a\alpha})\omega_b = \Gamma_{a\alpha\beta}\omega^\beta + \Gamma_{a\alpha b}\omega^b + \Gamma^b_{a\alpha\beta}\omega^\beta_b,\\
\Delta\Gamma_{ab} + L^c_{ab}\omega_c = \Gamma_{ab\alpha}\omega^\alpha + \Gamma_{abc}\omega^c + \Gamma^c_{ab\alpha}\omega^\alpha_c,\\
\Delta\Pi^b_{a\alpha} + \Gamma^{db}_{a\alpha}\omega_d + \delta^b_a\omega_\alpha = \Pi^b_{a\alpha\beta}\omega^\beta + \Pi^b_{a\alpha c}\omega^c + \Pi^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\beta_c,\\
\Delta L^a_{\alpha\beta} + \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b - L^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + L^\gamma_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma - L^a_{\alpha b}\omega^b_\beta = L^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + L^a_{\alpha\beta b}\omega^b + L^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_b,\\
\Delta L^a_{\alpha b} - L^a_{cb}\omega^c_\alpha + L^\beta_{\alpha b}\omega^a_\beta - \delta^a_b\omega_\alpha = L^a_{\alpha b\beta}\omega^\beta + L^a_{\alpha bc}\omega^c + L^{ac}_{\alpha b\beta}\omega^\beta_c, \qquad (2.3.2)\\
\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha\beta} - \Gamma^{ab}_{d\beta}\omega^d_\alpha + \Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma = \Gamma^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + \Gamma^{ab}_{\alpha\beta c}\omega^c + \Gamma^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_c,\\
\Delta L^\alpha_{\beta\gamma} - L^\alpha_{\beta a}\omega^a_\gamma + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a - \delta^\alpha_\beta\omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\omega_\beta = L^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + L^\alpha_{\beta\gamma a}\omega^a + L^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_a,\\
\Delta L^\alpha_{\beta a} - \delta^\alpha_\beta\omega_a = L^\alpha_{\beta a\gamma}\omega^\gamma + L^\alpha_{\beta ab}\omega^b + L^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^\gamma_b,\\
\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma b}\omega^b + \Gamma^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_b,\\
\Delta\Gamma_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha a}\omega^a_\beta + (\Pi^a_{\alpha\beta} + L^a_{\alpha\beta})\omega_a - \Gamma_{a\beta}\omega^a_\alpha + L^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta a}\omega^a + \Gamma^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_a,\\
\Delta\Gamma_{\alpha a} - \Gamma_{ba}\omega^b_\alpha + L^b_{\alpha a}\omega_b + L^\beta_{\alpha a}\omega_\beta = \Gamma_{\alpha a\beta}\omega^\beta + \Gamma_{\alpha ab}\omega^b + \Gamma^b_{\alpha a\beta}\omega^\beta_b,\\
\Delta\Pi^a_{\alpha\beta} + \Gamma^{ba}_{\alpha\beta}\omega_b - \Pi^a_{c\beta}\omega^c_\alpha + \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma = \Pi^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + \Pi^a_{\alpha\beta b}\omega^b + \Pi^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_b.
\end{gathered}$$

Теорема 2.3.1. *Объект групповой связности* Γ *содержит пять простых* [32] *геометрических подобъектов*

$$\Gamma_1 = \{L^a_{bc},\, \Gamma^{ac}_{b\alpha},\, L^a_{b\alpha}\}, \quad \Gamma_2 = \{L^\alpha_{\beta a},\, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma},\, L^\alpha_{\beta\gamma}\},$$

$$\Gamma_3 = \{\Gamma_1,\, \Gamma_{a\alpha},\, \Gamma_{ab},\, \Pi^b_{a\alpha}\}, \quad \Gamma_4 = \{\Gamma_1,\, \Gamma_2,\, L^a_{\alpha b},\, \Gamma^{ab}_{\alpha\beta},\, L^a_{\alpha\beta}\}, \quad \Gamma_5 = \{\Gamma_3 \setminus \Gamma_1,\, \Gamma_4\},$$

задающих связности в соответствующих фактор-расслоениях.

Доказательство. Утверждение следует из уравнений (2.3.2). □

2.4. Объект кривизны

Найдём выражения компонент объекта кривизны и дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют. Для этого рассмотрим внешние дифференциалы от форм связности (2.3.1). Подставим в них дифференциальные уравнения (2.3.2) компонент объекта связности Γ, получим структурные уравнения форм связности

$$\begin{aligned}
&D\tilde\omega^a_b = \tilde\omega^c_b \wedge \tilde\omega^a_c + R^a_{b\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + R^a_{bce}\omega^c \wedge \omega^e + R^a_{b\alpha c}\omega^\alpha \wedge \omega^c + \\
&\quad + R^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_c + R^{ad}_{bc\alpha}\omega^c \wedge \omega^\alpha_d + R^{acd}_{b\alpha\beta}\omega^\alpha_c \wedge \omega^\beta_d, \\
&D\tilde\omega_a = \tilde\omega^b_a \wedge \tilde\omega_b + R_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + R_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + R_{a\alpha b}\omega^\alpha \wedge \omega^b + \\
&\quad + K^b_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_b + R^c_{ab\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha_c + K^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c, \\
&D\tilde\omega^a_\alpha = \tilde\omega^b_\alpha \wedge \tilde\omega^a_b + \tilde\omega^\beta_\alpha \wedge \tilde\omega^a_\beta + R^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + R^a_{\alpha bc}\omega^b \wedge \omega^c + \\
&\quad + R^a_{\alpha\beta b}\omega^\beta \wedge \omega^b + R^{ac}_{\alpha b\beta}\omega^b \wedge \omega^\beta_c + R^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_b + R^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c, \\
&D\tilde\omega^\alpha_\beta = \tilde\omega^\gamma_\beta \wedge \tilde\omega^\alpha_\gamma + R^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu + R^\alpha_{\beta ab}\omega^a \wedge \omega^b + R^\alpha_{\beta\gamma a}\omega^\gamma \wedge \omega^a + \\
&\quad + R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu_a + R^{ab}_{\beta a\gamma}\omega^a \wedge \omega^\gamma_b + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma_a \wedge \omega^\mu_b, \\
&D\tilde\omega_\alpha = \tilde\omega^a_\alpha \wedge \tilde\omega_a + \tilde\omega^\beta_\alpha \wedge \tilde\omega_\beta + R_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + R_{\alpha ab}\omega^a \wedge \omega^b + R_{\alpha\beta a}\omega^\beta \wedge \omega^a + \\
&\quad + K^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a + R^b_{\alpha a\beta}\omega^a \wedge \omega^\beta_b + K^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b.
\end{aligned}$$

Теорема 2.4.1. *Объект кривизны* R *является тензором.*

Доказательство следует непосредственно из дифференциальных сравнений компонент объекта кривизны R. Например,

$$\Delta R^a_{b\alpha c} - R^{ae}_{bc\alpha}\omega_e - 2R^a_{bec}\omega^e_\alpha \equiv 0.$$ □

2.5. Квазитензор кручения групповой подсвязности в пространстве центрированных плоскостей

Подставляя в структурные уравнения базисных форм (2.2.1) пространства Π формы связности (2.3.1), приходим к уравнениям

$$D\omega^\alpha = \omega^a \wedge \omega^\alpha_a - \tilde\omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^\alpha_{\beta a}\omega^\beta \wedge \omega^a + S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a,$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \tilde\omega^a_b + \omega^\alpha \wedge \tilde\omega^a_\alpha + S^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + S^a_{b\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha + S^a_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \\ + S^{ac}_{b\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha_c + S^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_b,$$
$$D\omega^\alpha_a = \tilde\omega^b_a \wedge \omega^\alpha_b - \tilde\omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_a + \tilde\omega_a \wedge \omega^\alpha + S^\alpha_{a\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^\alpha_{ab\beta}\omega^b \wedge \omega^\beta + \\ + S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_b + S^{\alpha b}_{a\beta c}\omega^c \wedge \omega^\beta_b + S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,$$

где компоненты объекта S выражаются по формулам

$$\begin{gathered} S^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{[\beta\gamma]}, \quad S^\alpha_{\beta a} = L^\alpha_{\beta a}, \quad S^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \\ S^a_{bc} = L^a_{[bc]}, \quad S^a_{b\alpha} = L^a_{b\alpha} - L^a_{\alpha b}, \quad S^a_{\alpha\beta} = L^a_{[\alpha\beta]}, \\ S^{ac}_{b\alpha} = \Gamma^{ac}_{b\alpha}, \quad S^{ab}_{\alpha\beta} = \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}, \\ S^\alpha_{a\beta\gamma} = \delta^\alpha_{[\gamma}\Gamma_{a\beta]}, \quad S^\alpha_{ab\gamma} = \delta^\alpha_\gamma\Gamma_{ab}, \quad S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma L^b_{a\beta} - \delta^b_a L^\alpha_{\gamma\beta} - \delta^\alpha_\beta \Pi^b_{a\gamma}, \\ S^{\alpha b}_{a\beta c} = \delta^\alpha_\beta L^b_{ac} - \delta^b_a L^\alpha_{\beta c}, \quad S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = -\delta^\alpha_{\lfloor\beta}\Gamma^{\lceil bc\rceil}_{a\gamma\rfloor} + \delta^{\lceil b}_a \Gamma^{\alpha c\rceil}_{\lfloor\beta\gamma\rfloor}. \end{gathered} \tag{2.5.1}$$

Квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам. В правых частях равенств (2.5.1) содержатся лишь компоненты подобъекта Γ_1, поэтому будем называть объект S объектом кручения подсвязности Γ_1 групповой связности Γ в пространстве Π центрированных плоскостей L^*_m.

Учитывая дифференциальные сравнения компонент подобъекта Γ_1, соответствующие уравнениям (2.3.2), приходим к их сравнениям по модулю базисных форм:

$$\begin{gathered} \Delta S^\alpha_{\beta\gamma} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_a - S^\alpha_{[\beta a}\omega^a_{\gamma]} \equiv 0, \quad \Delta S^\alpha_{\beta a} - \delta^\alpha_\beta\omega_a \equiv 0, \\ \Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta \equiv 0, \quad \Delta S^a_{bc} \equiv 0, \quad \Delta S^a_{b\alpha} - 2S^a_{bc}\omega^c_\alpha + S^{ac}_{b\alpha}\omega_c - S^\beta_{\alpha b}\omega^a_\beta \equiv 0, \\ \Delta S^a_{\alpha\beta} + S^a_{b[\alpha}\omega^b_{\beta]} + S^\gamma_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma + S^{ab}_{[\alpha\beta]}\omega_b \equiv 0, \quad \Delta S^{ac}_{b\alpha} + \delta^c_b\omega^a_\alpha \equiv 0, \\ \Delta S^{ab}_{\alpha\beta} - S^{ab}_{c\beta}\omega^c_\alpha + S^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma \equiv 0, \\ \Delta S^\alpha_{a\beta\gamma} + S^\alpha_{ab[\beta}\omega^b_{\gamma]} + S^{\alpha b}_{a[\beta\gamma]}\omega_b - S^\alpha_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0, \\ \Delta S^\alpha_{ab\beta} + S^{\alpha c}_{a\beta b}\omega_c + S^\alpha_{\beta b}\omega_a \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha b}_{a\beta c} - \delta^b_c\delta^\alpha_\beta\omega_a \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0, \\ \Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha b}_{a\gamma c}\omega^c_\beta - 2\delta^\alpha_{\lfloor\beta}S^{\lceil cb\rceil}_{a\gamma\rfloor}\omega_c - \delta^b_a S^{\alpha c}_{\gamma\beta}\omega_c \equiv 0. \end{gathered} \tag{2.5.2}$$

Теорема 2.5.1. *Объект кручения S подсвязности Γ_1 является квазитензором, содержащим простейшие* [32] *тензоры*

$$S^a_{bc}, \quad S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma},$$

простейшие квазитензоры

$$S^\alpha_{\beta a}, \quad S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \quad S^{ac}_{b\alpha}, \quad S^{\alpha a}_{b\beta c}$$

и простые квазитензоры

$$\{S^\alpha_{\beta a}, S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^\alpha_{\beta\gamma}\}, \quad \{S^a_{bc}, S^{ac}_{b\alpha}, S^\beta_{\alpha b}, S^a_{b\alpha}\},$$
$$\{S^{ab}_{c\beta}, S^{\gamma b}_{\alpha\beta}, S^{ab}_{\alpha\beta}\}, \quad \{S^{\alpha c}_{a\beta b}, S^\alpha_{\beta b}, S^\alpha_{ab\beta}\}, \quad \{S^{\alpha b}_{a\gamma c}, S^{cb}_{a\gamma}, S^{\alpha c}_{\gamma\beta}, S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\}.$$

Замечание 2.5.1. Поскольку объект кручения S связности Γ_1 является квазитензором, связность Γ_1 всегда с кручением.

Проследим динамику квазитензора кручения S при последовательных канонизациях: 1) при размещении вершин A_α в нормали первого рода; 2) при размещении вершин A_a в нормали второго рода; 3) при одновременном размещении данных вершин в соответствующих нормалях.

1. Поместим вершины A_α в нормаль первого рода, при этом

$$\omega_\alpha^a \equiv 0. \tag{2.5.3}$$

Запишем дифференциальные сравнения (2.5.2) компонент объекта кручения S с учётом (2.5.3):

$$\begin{gathered}
\Delta S_{\beta\gamma}^{\alpha a} \equiv 0, \quad \Delta S_{bc}^{a} \equiv 0, \quad \Delta S_{b\alpha}^{a} + S_{b\alpha}^{ac}\omega_c \equiv 0, \quad \Delta S_{\alpha\beta}^{a} + S_{[\alpha\beta]}^{ab}\omega_b \equiv 0,\\
\Delta S_{b\alpha}^{ac} \equiv 0, \quad \Delta S_{\alpha\beta}^{ab} \equiv 0, \quad \Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha} + S_{a[\beta\gamma]}^{\alpha b}\omega_b - S_{\beta\gamma}^{\alpha}\omega_a \equiv 0,\\
\Delta S_{a\beta c}^{\alpha b} - \delta_c^b\delta_\beta^\alpha\omega_a \equiv 0, \quad \Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} \equiv 0, \quad \Delta S_{\beta\gamma}^{\alpha} + S_{[\beta\gamma]}^{\alpha a}\omega_a \equiv 0,\\
\Delta S_{\beta a}^{\alpha} - \delta_\beta^\alpha\omega_a \equiv 0, \quad \Delta S_{ab\beta}^{\alpha} + S_{a\beta b}^{\alpha c}\omega_c + S_{\beta b}^{\alpha}\omega_a \equiv 0,\\
\Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha b} - 2\delta_{[\beta}^{\alpha}S_{a\gamma]}^{[cb]}\omega_c - \delta_a^b S_{\gamma\beta}^{\alpha c}\omega_c \equiv 0.
\end{gathered} \tag{2.5.4}$$

Теорема 2.5.2. *При адаптации подвижного репера к полю нормалей первого рода P_{n-m} квазитензор кручения S остаётся квазитензором, содержащим пять простейших тензоров*

$$S_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \quad S_{bc}^{a}, \quad S_{b\alpha}^{ac}, \quad S_{\alpha\beta}^{ab}, \quad S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc},$$

четыре простых тензора

$$\{S_{\beta\gamma}^{\alpha a}, S_{\beta\gamma}^{\alpha}\}, \quad \{S_{\alpha\beta}^{ab}, S_{\alpha\beta}^{a}\}, \quad \{S_{b\alpha}^{ac}, S_{b\alpha}^{a}\}, \quad \{S_{a\gamma}^{cb}, S_{\gamma\beta}^{\alpha c}, S_{a\beta\gamma}^{\alpha b}\},$$

два простейших квазитензора

$$S_{\beta a}^{\alpha}, \quad S_{a\beta c}^{\alpha b}$$

и один простой квазитензор

$$\{S_{a\gamma b}^{\alpha c}, S_{\gamma b}^{\alpha}, S_{ab\gamma}^{\alpha}\}.$$

Доказательство следует из дифференциальных сравнений (2.5.4). □

2. Если отказаться от предыдущей канонизации, а поместить вершины A_a в нормаль второго рода P_{m-1}, то

$$\omega_a \equiv 0. \tag{2.5.5}$$

Дифференциальные сравнения (2.5.2) компонент объекта кручения S с учётом (2.5.5) принимают вид

$$
\begin{gathered}
\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma} - S^{\alpha}_{[\beta a}\omega^{a}_{\gamma]} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha}_{\beta a} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta} \equiv 0,\\
\Delta S^{a}_{bc} \equiv 0, \quad \Delta S^{a}_{b\alpha} - 2S^{a}_{bc}\omega^{c}_{\alpha} - S^{\beta}_{\alpha b}\omega^{a}_{\beta} \equiv 0, \quad \Delta S^{ac}_{b\alpha} + \delta^{c}_{b}\omega^{a}_{\alpha} \equiv 0,\\
\Delta S^{a}_{\alpha\beta} + S^{a}_{b[\alpha}\omega^{b}_{\beta]} + S^{\gamma}_{\alpha\beta}\omega^{a}_{\gamma} \equiv 0, \quad \Delta S^{ab}_{\alpha\beta} - S^{ab}_{c\beta}\omega^{c}_{\alpha} + S^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^{a}_{\gamma} \equiv 0, \qquad (2.5.6)\\
\Delta S^{\alpha}_{a\beta\gamma} + S^{\alpha}_{ab[\beta}\omega^{b}_{\gamma]} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha}_{ab\beta} \equiv 0,\\
\Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha b}_{a\gamma c}\omega^{c}_{\beta} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha b}_{a\beta c} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0.
\end{gathered}
$$

Из (2.5.6) вытекает следующая теорема.

Теорема 2.5.3. *При адаптации подвижного репера к полю нормалей второго рода P_{m-1} квазитензор кручения S остаётся квазитензором. Он содержит пять простейших тензоров*

$$S^{\alpha}_{\beta a}, \quad S^{a}_{bc}, \quad S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, \quad S^{\alpha b}_{a\beta c}, \quad S^{\alpha}_{ab\gamma},$$

четыре простых тензора

$$\{S^{\alpha}_{\beta a}, S^{\alpha}_{\beta\gamma}\}, \quad \{S^{a}_{bc}, S^{\beta}_{\alpha b}, S^{a}_{b\alpha}\}, \quad \{S^{\alpha b}_{a\gamma c}, S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\}, \quad \{S^{\alpha}_{ab\beta}, S^{\alpha}_{a\beta\gamma}\},$$

два простейших квазитензора

$$S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \quad S^{ac}_{b\alpha}$$

и один простой квазитензор

$$\{S^{ab}_{c\beta}, S^{\gamma b}_{\alpha\beta}, S^{ab}_{\alpha\beta}\}.$$

3. Произведём одновременно канонизации, рассмотренные в пунктах 1 и 2, т. е. $A_\alpha \in P_{n-m}$, $A_a \in P_{m-1}$. При этом будут справедливы условия (2.5.3), (2.5.5). Тогда дифференциальные сравнения (2.5.2) примут следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha}_{\beta a} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} \equiv 0, \quad \Delta S^{a}_{bc} \equiv 0, \quad \Delta S^{a}_{b\alpha} \equiv 0,\\
\Delta S^{ac}_{b\alpha} \equiv 0, \quad \Delta S^{a}_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \Delta S^{ab}_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha}_{a\beta\gamma} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha}_{ab\beta} \equiv 0,\\
\Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha b}_{a\beta c} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0.
\end{gathered}
$$

Теорема 2.5.4. *При адаптации подвижного репера нормализации пространства Π квазитензор кручения S становится тензором, у которого все компоненты — простейшие тензоры.*

2.6. Аналог сильной нормализации Нордена, связность первого типа

Осуществим сильное аффинное оснащение Лумисте [22] (аналог сильной нормализации Нордена [25, с. 197, 206] пространства Π) полями следующих геометрических образов: $(n-m-1)$-мерной плоскостью P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m, и $(m-1)$-мерной плоскостью P_{m-1}, принадлежащей плоскости L^*_m и не проходящей через её центр A.

Замечание 2.6.1. В отличие от плоскости Бортолотти, которая дополняет образующий элемент — m-плоскость — до проективного пространства и которая являлась оснащающей в разделе 1, данная плоскость P_{n-m-1} является аналогом плоскости Картана (центрированная плоскость L_m^* — аналог касательной плоскости к поверхности в точке A).

Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость P_{m-1} — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$.

Рассмотрим дифференциалы точек B_α, B_a, учтём в них деривационные формулы и выражения базисных точек плоскостей P_{n-m-1}, P_{m-1}, свернём часть слагаемых при помощи оператора Δ. Тогда

$$\begin{aligned} dB_\alpha = \theta B_\alpha &+ (\omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a \omega_a^\beta + \lambda_\alpha \omega^\beta) B_\beta + \\ &+ (\Delta\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha \omega^a + \omega_\alpha^a - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^b \omega_b^\beta - \lambda_\alpha \lambda_\beta^a \omega^\beta) B_a + \\ &+ [\Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a \omega_a + \omega_\alpha - \lambda_a(\Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a) - \mu_\beta \lambda_\alpha^a \omega_a^\beta - \mu_\beta \lambda_\alpha \omega^\beta - \lambda_a \lambda_\alpha \omega^a] A, \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{aligned} dB_a = \theta B_a &+ (\omega_a^b + \lambda_a \omega^b - \lambda_\alpha^b \omega_a^\alpha - \lambda_a \lambda_\alpha^b \omega^\alpha) B_b + (\omega_a^\alpha + \lambda_a \omega^\alpha) B_\alpha + \\ &+ (\Delta\lambda_a + \omega_a - \lambda_a \lambda_b \omega^b - \mu_\alpha \omega_a^\alpha - \mu_\alpha \lambda_a \omega^\alpha) A, \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

где введено обозначение $\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^a \lambda_a$.

Требуя относительной инвариантности оснащающих плоскостей, из (2.6.1), (2.6.2) получим дифференциальные уравнения для компонент оснащающего геометрического объекта $\lambda = \{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha, \lambda_a\}$:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a &= \lambda_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + \lambda_{\alpha b}^a \omega^b + \lambda_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a \omega_a + \omega_\alpha &= \lambda_{\alpha\beta} \omega^\beta + \lambda_{\alpha a} \omega^a + \Lambda_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta, \\ \Delta\lambda_a + \omega_a &= \lambda_{ab} \omega^b + \lambda_{a\alpha} \omega^\alpha + \lambda_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha. \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Дифференциальные уравнения (2.6.3) можно записать в виде сравнений по модулю базисных форм ω^α, ω^a, ω_a^α:

$$\Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a \equiv 0, \quad \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a \omega_a + \omega_\alpha \equiv 0, \quad \Delta\lambda_a + \omega_a \equiv 0. \tag{2.6.4}$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2.6.1. *Оснащающий геометрический объект λ является квазитензором.*

Теорема 2.6.2. *Оснащение пространства* Π *центрированных плоскостей L_m^* полями плоскостей P_{n-m-1} и P_{m-1} позволяет задать связность* (*первого типа*) *в ассоциированном расслоении.*

Доказательство. Учитывая дифференциальные уравнения (2.3.2) компонент объекта связности Γ и сравнения (2.6.4) компонент оснащающего квазитензора λ, получим, что оснащающий квазитензор λ позволяет охватить компоненты объекта групповой связности следующим образом:

$$\begin{gathered}
\overset{0}{L}{}^a_{b\alpha} = \lambda_b\lambda^a_\alpha - \delta^a_b\mu_\alpha, \quad \overset{0}{L}{}^a_{bc} = -\delta^a_c\lambda_b - \delta^a_b\lambda_c, \quad \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{c\alpha} = \delta^b_c\lambda^a_\alpha, \\
\overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\beta\mu_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta, \quad \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta a} = -\delta^\alpha_\beta\lambda_a, \quad \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma\lambda^a_\beta;
\end{gathered} \tag{2.6.5}$$

$$\begin{gathered}
\overset{01}{\Gamma}{}_{a\alpha} = \lambda_a\lambda_b\lambda^b_\alpha, \quad \overset{01}{\Gamma}{}_{ab} = -\lambda_a\lambda_b, \quad \overset{01}{\Pi}{}^b_{a\alpha} = \delta^b_a\lambda_\alpha, \quad \overset{01}{L}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda_b\lambda^b_\alpha\lambda^a_\beta, \\
\overset{01}{L}{}^a_{\alpha b} = -\delta^a_b\mu_\alpha, \quad \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha, \quad \overset{01}{\Gamma}{}_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha\lambda_\beta + \lambda_a\lambda^a_\beta\mu_\alpha, \\
\overset{01}{\Gamma}{}_{\alpha a} = -\lambda_a\mu_\alpha, \quad \overset{01}{\Pi}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda^a_\alpha\lambda_\beta.
\end{gathered} \tag{2.6.6}$$

Обозначим первый охват через

$$\begin{aligned}
\overset{01}{\Gamma} = \Big\{ &\overset{0}{L}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{L}{}^a_{bc}, \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{c\alpha}, \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta a}, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \\
&\overset{01}{\Gamma}{}_{a\alpha}, \overset{01}{\Gamma}{}_{ab}, \overset{01}{\Pi}{}^b_{a\alpha}, \overset{01}{L}{}^a_{\alpha\beta}, \overset{01}{L}{}^a_{\alpha b}, \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta}, \overset{01}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}, \overset{01}{\Gamma}{}_{\alpha a}, \overset{01}{\Pi}{}^a_{\alpha\beta} \Big\}. \quad \square
\end{aligned}$$

2.7. Ковариантный дифференциал и ковариантные производные оснащающего квазитензора

С помощью способа Лаптева задания групповой связности, аналогично разделу 1, мы вводим понятие ковариантного дифференциала и ковариантных производных геометрического объекта относительно этой связности.

Запишем дифференциальные уравнения (2.6.3) оснащающего квазитензора в развёрнутом виде и внесём в эти уравнения формы связности $\tilde{\omega}$ (2.3.1). Тогда левые части вновь полученных равенств будут ковариантными дифференциалами оснащающего квазитензора λ, они имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\nabla\lambda^a_\alpha = d\lambda^a_\alpha + \lambda^b_\alpha\tilde{\omega}^a_b - \lambda^a_\beta\tilde{\omega}^\beta_\alpha + \tilde{\omega}^a_\alpha, \\
\nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\tilde{\omega}^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha\tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}_\alpha, \quad \nabla\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\tilde{\omega}^b_\alpha + \tilde{\omega}_a.
\end{gathered} \tag{2.7.1}$$

Правые части равенств являются линейными комбинациями, в которых ковариантные производные, т. е. коэффициенты при базисных формах Пфаффа, выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}
\nabla_\beta\lambda^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha L^a_{b\beta} + \lambda^a_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} - L^a_{\alpha\beta}, \quad \nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^c_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta} + \lambda^a_\gamma\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}, \\
\nabla_\beta\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} - \lambda^a_\alpha\Gamma_{a\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}, \\
\nabla^a_\beta\lambda_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_\gamma\Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha\Pi^a_{b\beta} - \Pi^a_{\alpha\beta}, \\
\nabla_b\lambda^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha b} - \lambda^c_\alpha L^a_{cb} + \lambda^a_\beta L^\beta_{\alpha b} - L^a_{\alpha b}, \quad \nabla^b_\alpha\lambda_a = \lambda^b_{a\alpha} + \lambda_c\Gamma^{cb}_{a\alpha} - \Pi^b_{a\alpha}, \\
\nabla_\alpha\lambda_a = \lambda_{a\alpha} + \lambda_b L^b_{a\alpha} - \Gamma_{a\alpha}, \quad \nabla_a\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha a} + \lambda_\beta L^\beta_{\alpha a} - \lambda^b_\alpha\Gamma_{b\alpha} - \Gamma_{\alpha a}, \\
\nabla_b\lambda_a = \lambda_{ab} + \lambda_c L^c_{ab} - \Gamma_{ab}.
\end{gathered} \tag{2.7.2}$$

Обозначим совокупность ковариантных производных компонент максимального оснащающего подквазитензора $\lambda_0 = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_a\}$ следующим образом:

$$\nabla_i\lambda_0 = \{\nabla_\beta\lambda^a_\alpha,\ \nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha,\ \nabla_b\lambda^a_\alpha,\ \nabla^b_\alpha\lambda_a,\ \nabla_\alpha\lambda_a,\ \nabla_b\lambda_a\},$$

тогда все ковариантные производные можно записать в виде

$$\nabla_i \lambda = \{\nabla_i \lambda_0,\ \nabla_\beta \lambda_\alpha,\ \nabla^a_\beta \lambda_\alpha,\ \nabla_a \lambda_\alpha\},$$

где $i = \overline{1, \dim \Pi}$.

Продолжая дифференциальные уравнения компонент оснащающего квазитензора λ с помощью структурных уравнений (1.1.2) и используя дифференциальные уравнения (2.3.2) компонент объекта связности Γ, находим дифференциальные сравнения для ковариантных производных (2.7.2):

$$\begin{gathered}
\Delta\nabla_\beta \lambda^a_\alpha - \nabla_b \lambda^a_\alpha \omega^b_\beta + \nabla^b_\beta \lambda^a_\alpha \omega_b \equiv 0, \quad \Delta\nabla^b_\beta \lambda^a_\alpha \equiv 0, \quad \Delta\nabla_b \lambda^a_\alpha \equiv 0,\\
\Delta\nabla_\beta \lambda_\alpha + (\nabla_\beta \lambda^a_\alpha + \nabla^a_\beta \lambda_\alpha)\omega_a - \nabla_a \lambda_\alpha \omega^a_\beta - \lambda^a_{\alpha\beta}\omega_a \equiv 0,\\
\Delta\nabla^a_\beta \lambda_\alpha + \nabla^a_\beta \lambda^b_\alpha \omega_b - \lambda^{ba}_{\alpha\beta}\omega_b \equiv 0, \quad \Delta\nabla_a \lambda_\alpha + \nabla_a \lambda^b_\alpha \omega_b - \lambda^b_{\alpha a}\omega_b \equiv 0,\\
\Delta\nabla_\alpha \lambda_a + \nabla^b_\alpha \lambda_a \omega_b - \nabla_b \lambda_a \omega^b_\alpha \equiv 0, \quad \Delta\nabla^b_\alpha \lambda_a \equiv 0, \quad \Delta\nabla_b \lambda_a \equiv 0.
\end{gathered} \tag{2.7.3}$$

Из сравнений (2.7.3) следуют две теоремы.

Теорема 2.7.1. *Совокупность ковариантных производных $\nabla_i \lambda_0$ компонент максимального подквазитензора λ_0 образует тензор.*

Теорема 2.7.2. *Совокупность функций $\{\nabla_i \lambda,\ \lambda^a_{\alpha\beta},\ \lambda^b_{\alpha a},\ \lambda^{ba}_{\alpha\beta},\ \lambda^a_\alpha\}$ образует квазитензор, причём совокупность ковариантных производных $\nabla_i \lambda$ оснащающего квазитензора λ не образует тензора.*

2.8. Связность второго типа в расслоении над пространством центрированных плоскостей

При помощи ковариантных производных построим второй охват компонент объекта связности Γ.

Когда мы рассматривали в разделе 1 многообразие Грассмана, все компоненты ковариантных производных оснащающего квазитензора составляли тензор. При рассмотрении пространства Π центрированных плоскостей мы столкнулись с тем фактом, что лишь часть компонент ковариантных производных оснащающего квазитензора является тензором. Таким образом, для построения второго охвата компонент объекта групповой связности Γ компонентами оснащающего квазитензора λ мы можем приравнять нулю лишь совокупность ковариантных производных $\nabla_i \lambda_0$, а именно те, которые согласно теореме 2.7.1 образуют тензор. Проделав это, получим

$$\begin{gathered}
\overset{2}{L}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha L^a_{b\beta} + \lambda^a_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta}, \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^c_\alpha \Gamma^{ab}_{c\beta} + \lambda^a_\gamma \Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta},\\
\overset{2}{L}{}^a_{\alpha b} = \lambda^a_{\alpha b} - \lambda^c_\alpha L^a_{cb} + \lambda^a_\beta L^\beta_{\alpha b}, \quad \overset{2}{\Pi}{}^b_{a\alpha} = \lambda^b_{a\alpha} + \lambda_c \Gamma^{cb}_{a\alpha},\\
\overset{2}{\Gamma}_{a\alpha} = \lambda_{a\alpha} + \lambda_b L^b_{a\alpha}, \quad \overset{2}{\Gamma}_{ab} = \lambda_{ab} + \lambda_c L^c_{ab}.
\end{gathered}$$

С учётом охвата (2.6.5) подобъекта $\left\{\overset{0}{\Gamma}_1,\, \overset{0}{\Gamma}_2\right\} = \left\{\overset{0}{L}{}^a_{b\alpha},\, \overset{0}{L}{}^a_{bc},\, \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{c\alpha},\, \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta a},\, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma},\, \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta\gamma}\right\}$ эти равенства примут вид

$$\begin{gathered}
\overset{02}{L}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\lambda_b - \lambda^a_\beta\lambda_\alpha, \quad \overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - 2\lambda^b_\alpha\lambda^a_\beta, \\
\overset{02}{L}{}^a_{\alpha b} = \lambda^a_{\alpha b} + \delta^a_b\lambda^c_\alpha\lambda_c, \quad \overset{02}{\Pi}{}^b_{a\alpha} = \lambda^b_{a\alpha} + \delta^b_a\lambda_c\lambda^c_\alpha, \\
\overset{02}{\Gamma}{}_{ab} = \lambda_{ab} - 2\lambda_a\lambda_b, \quad \overset{02}{\Gamma}{}_{a\alpha} = \lambda_{a\alpha} + 2\lambda_a\lambda_b\lambda^b_\alpha - \lambda_a\lambda_\alpha.
\end{gathered} \tag{2.8.1}$$

Учитывая выражения (2.8.1) и дифференциальные сравнения, соответствующие уравнениям (2.3.2) объекта Γ, можно охватить остальные компоненты объекта Γ групповой связности:

$$\begin{gathered}
\overset{02}{\Gamma}{}_{\alpha a} = -\lambda_{ba}\lambda^b_\alpha + 2\lambda_a\lambda_b\lambda^b_\alpha + \lambda^b_{\alpha a}\lambda_b, \quad \overset{02}{\Pi}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda^{ba}_{\alpha\beta}\lambda_b - \lambda^a_{b\beta}\lambda^b_\alpha - 2\lambda^a_\alpha\lambda^b_\beta\lambda_b, \\
\overset{02}{\Gamma}{}_{\alpha\beta} = -2\lambda_a\lambda_b\lambda^a_\alpha\lambda^b_\beta - \lambda_{a\beta}\lambda^a_\alpha + \lambda_a\lambda_\beta\lambda^a_\alpha + \lambda^a_{\alpha\beta}\lambda_a - \lambda_\alpha\lambda_\beta.
\end{gathered} \tag{2.8.2}$$

Мы выражали компоненты объекта групповой связности

$$\left\{\overset{2}{L}{}^a_{\alpha\beta},\, \overset{2}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta},\, \overset{2}{L}{}^a_{\alpha b},\, \overset{2}{\Pi}{}^b_{a\alpha},\, \overset{2}{\Gamma}{}_{ab},\, \overset{2}{\Gamma}{}_{a\alpha}\right\}$$

через компоненты составного подобъекта $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, т. е. получили пучок максимальных подсвязностей.

Теорема 2.8.1. *Аналог сильной нормализации Нордена пространства* Π *центрированных плоскостей индуцирует пучок подсвязностей (второго типа) в максимальном подрасслоении, из которого выделяется максимальная подсвязность второго типа* $\overset{02}{\Gamma}{}_5$.

Теорема 2.8.2. *Аналог сильной нормализации Нордена пространства* Π *индуцирует связность второго типа* $\overset{02}{\Gamma} = \left\{\overset{02}{\Gamma}{}_5,\, \overset{02}{\Gamma}{}_{\alpha a},\, \overset{02}{\Pi}{}^a_{\alpha\beta},\, \overset{02}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}\right\}$.

2.9. Связность третьего типа в расслоении над пространством центрированных плоскостей

Учтём продолженные дифференциальные сравнения компонент оснащающего объекта λ, дифференциальные уравнения (2.3.2), которым удовлетворяют компоненты объекта связности Γ, и охват (2.6.5) составного подобъекта $\left\{\overset{0}{\Gamma}_1, \overset{0}{\Gamma}_2\right\}$, получим

$$\begin{gathered}
\overset{03}{L}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda^a_{b\alpha}\lambda^b_\beta - \lambda^{ba}_{\beta\alpha}\lambda_b + \lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\lambda_b - \lambda^a_\beta\lambda_\alpha, \quad \overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^{ba}_{\beta\alpha}, \\
\overset{03}{L}{}^a_{\alpha b} = -\lambda^a_{b\alpha}, \quad \overset{03}{\Pi}{}^b_{a\alpha} = -\lambda^b_{\alpha a}, \quad \overset{03}{\Gamma}{}_{ab} = -\lambda_{ba}, \quad \overset{03}{\Gamma}{}_{a\alpha} = \lambda_{ba}\lambda^b_\alpha - \lambda^b_{\alpha a}\lambda_b - \lambda_a\lambda_\alpha, \\
\overset{03}{\Gamma}{}_{\alpha a} = -\lambda_{a\alpha}, \quad \overset{03}{\Pi}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda^a_{\beta\alpha}, \quad \overset{03}{\Gamma}{}_{\alpha\beta} = \lambda_{a\alpha}\lambda^a_\beta - \lambda_a\lambda^a_{\beta\alpha} + \lambda_a\lambda_\beta\lambda^a_\alpha - \lambda_\alpha\lambda_\beta.
\end{gathered} \tag{2.9.1}$$

Теорема 2.9.1. *Нормализация Нордена индуцирует связность третьего типа*

$$\overset{03}{\Gamma} = \Big\{ \overset{0}{L}{}^a_{b\alpha},\ \overset{0}{L}{}^a_{bc},\ \overset{0}{\Gamma}{}^{ab}_{c\alpha},\ \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta\gamma},\ \overset{0}{L}{}^\alpha_{\beta a},\ \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma},$$
$$\overset{03}{\Gamma}{}_{a\alpha},\ \overset{03}{\Gamma}{}_{ab},\ \overset{03}{\Pi}{}^b_{a\alpha},\ \overset{03}{L}{}^a_{\alpha\beta},\ \overset{03}{L}{}^a_{\alpha b},\ \overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta},\ \overset{03}{\Gamma}{}_{\alpha\beta},\ \overset{03}{\Gamma}{}_{\alpha a},\ \overset{03}{\Pi}{}^a_{\alpha\beta} \Big\}.$$

2.10. Условия совпадения и связь объектов групповых связностей трёх типов

Найдём условия, при которых совпадают построенные охваты трёх типов. Для этого мы приравняем соответствующие компоненты объекта связности Γ по парам и учтём формулы (2.6.6), (2.8.1), (2.8.2), (2.9.1), т. е. равенства, по которым выражаются компоненты объекта Γ в связностях трёх типов.

Как и в случае многообразия Грассмана, мы получаем общее условие совпадения всех трёх охватов, которое аналогично условию совпадения охватов по парам.

Теорема 2.10.1. *Связности первого, второго и третьего типов совпадают тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\lambda^a_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda^a_\beta, \quad \lambda_{ab} = \lambda_a \lambda_b, \quad \lambda^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha,$$
$$\lambda^a_{\alpha b} = -\delta^a_b \lambda_\alpha, \quad \lambda^b_{a\alpha} = \delta^b_a \mu_\alpha, \quad \lambda_{a\alpha} = \lambda_a \mu_\alpha.$$

Теорема 2.10.2. *Связности первого, второго и третьего типов подчиняются зависимости*

$$\overset{02}{\Gamma} = \overset{01}{\Gamma} + \overset{01}{\Gamma}{}_p - \overset{03}{\Gamma}{}_p,$$

где p означает перестановку индексов функции Γ. Если в качестве Γ выступает $L_{(\mathrm{ind})}$, то $\Gamma_p = \Pi_{(\mathrm{ind})}$ и наоборот, а ind *означает, что компоненты функции содержат индексы. Например, $(\Gamma^{ab}_{\alpha\beta})_p = \Gamma^{ba}_{\beta\alpha}$, $(L^a_{\alpha\beta})_p = \Pi^a_{\beta\alpha}$.*

Доказательство. Сравнивая формулы (2.6.6), (2.8.1), (2.8.2), (2.9.1), по которым выражаются компоненты объекта связности в построенных охватах, убеждаемся, что теорема справедлива. □

2.11. Тензор неабсолютных перенесений

С помощью структурных уравнений найдём внешние дифференциалы от компонент ковариантного дифференциала (2.7.1):

$$D\nabla\lambda^a_\alpha = \nabla\lambda^b_\alpha \wedge \tilde\omega^a_b - \nabla\lambda^a_\beta \wedge \tilde\omega^\beta_\alpha + T^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + T^a_{\alpha bc}\omega^b \wedge \omega^c +$$
$$+ T^a_{\alpha\beta b}\omega^\beta \wedge \omega^b + T^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_b + T^{ac}_{\alpha b\beta}\omega^b \wedge \omega^\beta_c + T^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,$$
$$D\nabla\lambda_\alpha = \nabla\lambda^a_\alpha \wedge \tilde\omega_a - \nabla\lambda_\beta \wedge \tilde\omega^\beta_\alpha + T_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + T_{\alpha ab}\omega^a \wedge \omega^b +$$
$$+ T_{\alpha\beta a}\omega^\beta \wedge \omega^a + S^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a + T^b_{\alpha a\beta}\omega^a \wedge \omega^\beta_b + S^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b,$$

$$D\nabla\lambda_a = -\nabla\lambda_b \wedge \tilde{\omega}_a^b + T_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + T_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + T_{a\alpha b}\omega^\alpha \wedge \omega^b +$$
$$+ T_{a\alpha\beta}^b \omega^\alpha \wedge \omega_b^\beta + T_{ab\alpha}^c \omega^b \wedge \omega_c^\alpha + T_{a\alpha\beta}^{bc}\omega^\alpha \wedge \omega_c^\beta,$$

где

$$T_{\alpha\beta\gamma}^a = R_{\alpha\beta\gamma}^a + \lambda_\alpha^b R_{b\beta\gamma}^a - \lambda_\mu^a R_{\alpha\beta\gamma}^\mu, \quad T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} + \lambda_\alpha^c R_{c\beta\gamma}^{ab} - \lambda_\mu^a R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu b},$$
$$T_{\alpha bc}^a = R_{\alpha bc}^a + \lambda_\alpha^e R_{ebc}^a - \lambda_\beta^a R_{\alpha bc}^\beta, \quad T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} + \lambda_\alpha^e R_{e\beta\gamma}^{abc} - \lambda_\mu^a R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu bc},$$
$$T_{\alpha\beta\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_\alpha^a R_{\alpha\beta\gamma} - \lambda_\mu R_{\alpha\beta\gamma}^\mu, \quad T_{\alpha\beta b}^a = R_{\alpha\beta b}^a + \lambda_\alpha^c R_{c\beta b}^a - \lambda_\gamma^a R_{\alpha\beta b}^\gamma,$$
$$S_{\alpha\beta\gamma}^a = K_{\alpha\beta\gamma}^a + \lambda_\alpha^b K_{b\beta\gamma}^a - \lambda_\mu R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu a}, \quad S_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = K_{\alpha\beta\gamma}^{ab} + \lambda_\alpha^c K_{c\beta\gamma}^{ab} - \lambda_\mu R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu ab},$$
$$T_{\alpha a\beta}^b = R_{\alpha a\beta}^b + \lambda_\alpha^c R_{ca\beta}^b - \lambda_\gamma R_{\alpha a\beta}^{\gamma b}, \quad T_{\alpha ab} = R_{\alpha ab} + \lambda_\alpha^c R_{cab} - \lambda_\beta R_{\alpha ab}^\beta,$$
$$T_{\alpha\beta a} = R_{\alpha\beta a} + \lambda_\alpha^b R_{b\beta a} - \lambda_\gamma R_{\alpha\beta a}^\gamma, \quad T_{a\alpha\beta}^b = K_{a\alpha\beta}^b - \lambda_c R_{a\alpha\beta}^{cb},$$
$$T_{a\alpha\beta}^{bc} = K_{a\alpha\beta}^{bc} - \lambda_e R_{a\alpha\beta}^{ebc}, \quad T_{ab\alpha}^c = R_{ab\alpha}^c - \lambda_e R_{ab\alpha}^{ec},$$
$$T_{\alpha b\beta}^{ac} = R_{\alpha b\beta}^{ac} + \lambda_\alpha^e R_{eb\beta}^{ac} - \lambda_\gamma^a R_{\alpha b\beta}^{\gamma c}, \quad T_{a\alpha\beta} = R_{a\alpha\beta} - \lambda_b R_{a\alpha\beta}^b,$$
$$T_{abc} = R_{abc} - \lambda_e R_{abc}^e, \quad T_{a\alpha b} = R_{a\alpha b} - \lambda_c R_{a\alpha b}^c.$$

Теорема 2.11.1. *Объект неабсолютных перенесений T образует тензор.*

Доказательство следует из дифференциальных сравнений объекта кривизны R и выражений компонент объекта T. □

2.12. Отображения, характеризующие индуцированные связности

Дадим геометрическую характеристику связностям, индуцированным в расслоениях линейных реперов.

Теорема 2.12.1. *Простой подобъект $\overset{0}{\Gamma}_1$ объектов связности $\overset{01}{\Gamma}$, $\overset{02}{\Gamma}$ и $\overset{03}{\Gamma}$ характеризуется центральным проектированием плоскости $P_{m-1} + dP_{m-1}$, смежной с плоскостью P_{m-1}, на исходную плоскость P_{m-1} из центра — плоскости $P_{n-m} = [P_{n-m-1}, A]$:*

$$\overset{0}{\Gamma}_1 \colon P_{m-1} + dP_{m-1} \xrightarrow{P_{n-m}} P_{m-1}. \tag{2.12.1}$$

Доказательство. Плоскость P_{m-1} задаётся совокупностью точек $B_a = A_a + \lambda_a A$. Находя их дифференциалы и учитывая полученные охваты, запишем

$$dB_a = \vartheta B_a + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}_a^b B_b + (\omega_a^\alpha + \lambda_a \omega^\alpha) B_\alpha + \overset{01}{\nabla}\lambda_a A, \tag{2.12.2}$$

где $\vartheta = \theta - \mu_\alpha\omega^\alpha - \lambda_a\omega^a$, $\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^b\lambda_b$.

Проекция плоскости $P_{m-1} + dP_{m-1}$, смежной с плоскостью P_{m-1}, из центра — плоскости $P_{n-m} = [P_{n-m-1}, A]$ определяется формами связности $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}_a^b$, которые выражаются с помощью подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_1$, т. е. выполняется (2.12.1). □

Теорема 2.12.2. *Простой подобъект* $\overset{0}{\Gamma}_2$ *объектов связности* $\overset{01}{\Gamma}$, $\overset{02}{\Gamma}$ *и* $\overset{03}{\Gamma}$ *характеризуется центральным проектированием плоскости* $P_{n-m-1}+dP_{n-m-1}$, *смежной с оснащающей плоскостью* P_{n-m-1}, *на исходную плоскость* P_{n-m-1} *из центра — образующей плоскости* L^*_m:

$$\overset{0}{\Gamma}_2\colon P_{n-m-1}+dP_{n-m-1} \xrightarrow{L^*_m} P_{n-m-1}. \tag{2.12.3}$$

Доказательство. Плоскость P_{n-m-1} задаётся системой точек B_α, дифференциалы которых приводятся к виду

$$dB_\alpha = \vartheta B_\alpha + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha B_\beta + \overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha A_a + \overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha A. \tag{2.12.4}$$

Проекция (2.12.3) плоскости $P_{n-m-1}+dP_{n-m-1}$, смежной с плоскостью P_{n-m-1}, на плоскость P_{n-m-1} из центра — плоскости L^*_m определяется формами связности $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha$, которые выражаются с помощью подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_2$. □

2.13. Параллельные перенесения в связности первого типа

В данном разделе рассматриваются параллельные перенесения оснащающих плоскостей в связности первого типа.

Теорема 2.13.1. *Оснащающую плоскость* P_{n-m-1} *в групповой связности первого типа* $\overset{01}{\Gamma}$ *переносить параллельно нельзя.*

Доказательство. Приравнивая нулю компоненты ковариантных дифференциалов $\overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha = 0$, $\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha = 0$ в (2.12.4), получим, что

$$dB_\alpha = \vartheta B_\alpha + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha B_\beta,$$

т. е. плоскость P_{n-m-1} остаётся на месте. □

Теорема 2.13.2. *Аналог нормали второго рода* P_{m-1} *переносится параллельно в связности первого типа тогда и только тогда, когда он смещается в гиперплоскости* $P_{n-1} = P_{m-1} \oplus P_{n-m-1}$.

Доказательство. Учитывая, что $\overset{01}{\nabla}\lambda_a = 0$ в выражениях (2.12.2) дифференциалов базисных точек B_a, получим, что

$$dB_a = \vartheta B_a + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^b_a B_b + (\omega^\alpha_a + \lambda_a \omega^\alpha) B_\alpha,$$

откуда видно, что при рассматриваемом параллельном перенесении плоскость P_{m-1} смещается в гиперплоскости P_{n-1}, натянутой на эту плоскость и плоскость P_{n-m-1}. □

Теорема 2.13.3. *Плоскость* P_{n-m-1} *переносится параллельно в связности, определяемой подобъектом* $\overset{01}{\Gamma}_4$ *объекта связности* $\overset{01}{\Gamma}$, *тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости* $P_{n-m} = [P_{n-m-1}, A]$.

Доказательство. Плоскости P_{m-1} и P_{n-m-1} соответственно задаются системами точек $B_a = A_a + \lambda_a A$ и $B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A$. Находя дифференциалы точек B_α, учитывая в них выражения точек B_a и охваты первого типа (2.6.5), (2.6.6), получим, что

$$dB_\alpha = (\delta_\alpha^\beta \theta + \omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a \omega_a^\beta + \lambda_\alpha \omega^\beta) B_\beta + \overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha^a B_a + (\overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha - \lambda_a \overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha^a) A. \quad (2.13.1)$$

Из равенств (2.13.1) видно, что обращение в нуль ковариантного дифференциала $\overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha^a$ характеризует рассматриваемый параллельный перенос в связности, определяемой подобъектом $\overset{01}{\Gamma}_4$ объекта связности $\overset{01}{\Gamma}$, при котором плоскость P_{n-m-1} смещается в плоскости P_{n-m}. □

Теорема 2.13.4. *Плоскость P_{n-m-1} переносится параллельно в линейной комбинации* [29, 32] *связности первого типа тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости P_{n-1}.*

Доказательство. Из выражений (2.13.1) следует, что обращение в нуль линейной комбинации ковариантных дифференциалов $\overset{01}{\Omega}_\alpha = \overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha - \lambda_a \overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha^a$ характеризует рассматриваемый параллельный перенос в линейной комбинации связности, при котором плоскость P_{n-m-1} смещается в гиперплоскости P_{n-1}. □

2.14. Пучок связностей первого типа, индуцированный аналогом нормализации Нордена пространства центрированных плоскостей

Преобразуем дифференциалы точек B_α, подставляя вместо дифференциалов компонент оснащающего квазитензора их выражения через ковариантные дифференциалы:

$$\begin{aligned} dB_\alpha &= (\ldots)_\alpha^\beta B_\beta + (\nabla \lambda_\alpha^a + l_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + l_{\alpha b}^a \omega^b + l_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta) B_a + \\ &\quad + \big(\nabla \lambda_\alpha + l_{\alpha\beta} \omega^\beta + l_{\alpha a} \omega^a + m_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta - \lambda_a (\nabla \lambda_\alpha^a + l_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + l_{\alpha b}^a \omega^b + l_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta)\big) A, \\ dB_a &= (\ldots)_a^b B_b + (\ldots)_a^\alpha B_\alpha + (\nabla \lambda_a + l_{a\alpha} \omega^\alpha + l_{ab} \omega^b + l_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha) A, \end{aligned} \quad (2.14.1)$$

где

$$l_{\alpha\beta}^a = L_{\alpha\beta}^a + \lambda_\alpha^b L_{b\beta}^a - \lambda_\gamma^a L_{\alpha\beta}^\gamma - \lambda_\alpha \lambda_\beta^a, \quad l_{\alpha b}^a = L_{\alpha b}^a + \lambda_\alpha^c L_{cb}^a - \lambda_\beta^a L_{\alpha b}^\beta + \delta_b^a \lambda_\alpha,$$
$$l_{\alpha\beta}^{ab} = \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \lambda_\alpha^c \Gamma_{c\beta}^{ab} - \lambda_\gamma^a \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \lambda_\alpha^b \lambda_\beta^a, \quad l_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha^a \Gamma_{a\beta} - \lambda_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma - \lambda_\alpha \lambda_\beta,$$
$$l_{\alpha a} = \Gamma_{\alpha a} + \lambda_\alpha^b \Gamma_{ba} - \lambda_\beta L_{\alpha a}^\beta, \quad (2.14.2)$$
$$m_{\alpha\beta}^a = \Pi_{\alpha\beta}^a + \lambda_\alpha^b \Pi_{b\beta}^a - \lambda_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a} - \lambda_\alpha^a \lambda_\beta, \quad l_{a\alpha} = \Gamma_{a\alpha} - \lambda_b L_{a\alpha}^b - \lambda_a \mu_\alpha,$$
$$l_{ab} = \Gamma_{ab} - \lambda_c L_{ab}^c - \lambda_a \lambda_b, \quad l_{a\alpha}^b = \Pi_{a\alpha}^b - \lambda_c \Gamma_{a\alpha}^{cb} - \delta_a^b \mu_\alpha,$$

причём $\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^a \lambda_a$. Дифференцируя величины (2.14.2), убеждаемся, что объект l является тензором.

Приравняем его компоненты нулю и обозначим объект связности в этом случае через $\overset{1}{\Gamma}$. Получим следующие формулы для его компонент:

$$\overset{1}{L}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda^b_\alpha L^a_{b\beta} + \lambda^a_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \lambda^a_\beta, \quad \overset{1}{L}{}^a_{\alpha b} = -\lambda^c_\alpha L^a_{cb} + \lambda^a_\beta L^\beta_{\alpha b} - \delta^a_b \lambda_\alpha,$$
$$\overset{1}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^c_\alpha \Gamma^{ab}_{c\beta} + \lambda^a_\gamma \Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} + \lambda^b_\alpha \lambda^a_\beta,$$
$$\overset{1}{\Gamma}_{\alpha\beta} = -\lambda^a_\alpha \lambda_b L^b_{a\beta} + \lambda_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta} + \lambda_a \lambda_b \lambda^a_\alpha \lambda^b_\beta + \mu_\alpha \lambda_\beta, \tag{2.14.3}$$
$$\overset{1}{\Gamma}_{\alpha a} = -\lambda^b_\alpha \lambda_c L^c_{ba} + \lambda_\beta L^\beta_{\alpha a} - \lambda_a \lambda_b \lambda^b_\alpha, \quad \overset{1}{\Pi}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda^b_\alpha \lambda_c \Gamma^{ca}_{b\beta} + \lambda_\gamma \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta} + \lambda^a_\alpha \lambda^b_\beta \lambda_b,$$
$$\overset{1}{\Gamma}_{a\alpha} = \lambda_b L^b_{a\alpha} + \lambda_a \mu_\alpha, \quad \overset{1}{\Gamma}_{ab} = \lambda_c L^c_{ab} + \lambda_a \lambda_b, \quad \overset{1}{\Pi}{}^b_{a\alpha} = \lambda_c \Gamma^{cb}_{a\alpha} + \delta^b_a \mu_\alpha.$$

Так возникает пучок групповых связностей первого типа.

Теорема 2.14.1. *Аналог сильной нормализации Нордена пространства* Π *центрированных плоскостей* L^*_m *индуцирует пучок* $\overset{1}{\Gamma}$ *групповых связностей первого типа.*

Следствие 2.14.1. *Аналог нормализации Нордена пространства* Π *индуцирует связность первого типа* $\overset{01}{\Gamma}$.

Доказательство. Для выделения в пучке групповых связностей первого типа $\overset{1}{\Gamma}$ подсвязности $\overset{01}{\Gamma}$ подставим в (2.14.3) выражения компонент объекта $\left\{\overset{0}{\Gamma}_1, \overset{0}{\Gamma}_2\right\}$ (2.6.5) и получим формулы для остальных компонент объекта связности первого типа $\overset{01}{\Gamma}$, причём они совпадут с выражениями (2.6.6). □

2.15. Вырожденные параллельные перенесения в индуцированных связностях пространства центрированных плоскостей

Рассматриваются свободно вырожденные и связанно вырожденные параллельные перенесения для связностей трёх типов, индуцированных нормализацией Нордена пространства Π центрированных плоскостей. Таким образом, даётся ещё одна геометрическая характеристика связностей.

Исследуя дифференциалы базисных точек B_α оснащающей плоскости P_{n-m-1} при введении ковариантных дифференциалов с учётом выражений дифференциалов точек B_α (2.14.1) и формул (2.14.2), по которым находятся компоненты объекта l, и найденных охватов, убеждаемся, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.15.1. *При обращении в нуль ковариантных производных оснащающего квазитензора* λ *специальных смещений оснащающих плоскостей* P_{n-m-1}, P_{m-1}, *вообще говоря, не выделяется. Иначе говоря, параллельные перенесения* *данных плоскостей в произвольной связности* Γ *являются свободно вырожденными* [31].

Теорема 2.15.2. *В групповой связности первого типа параллельное перенесение оснащающей плоскости* P_{n-m-1} *будет связанно вырожденным, т. е. плоскость* P_{n-m-1} *неподвижна при параллельном перенесении в этой связности.*

Теорема 2.15.3. *В групповой связности первого типа параллельное перенесение гиперплоскости* $P_{n-1} = P_{n-m-1} \oplus P_{m-1}$ *будет связанно вырожденным, т. е. гиперплоскость* P_{n-1} *неподвижна при параллельном перенесении в этой связности.*

Теорема 2.15.4. *В групповой связности третьего типа параллельное перенесение оснащающей плоскости* P_{n-m-1} *будет свободно вырожденным.*

Теорема 2.15.5. *В групповых связностях второго и третьего типов параллельное перенесение гиперплоскости* P_{n-1} *будет свободно вырожденным.*

Теорема 2.15.6. *В групповых связностях второго и третьего типов параллельное перенесение оснащающей плоскости* P_{m-1} *будет свободно вырожденным.*

По аналогии с разделом 1 введён тензор подвижности параллелизма l и тензор деформации Σ. Эти объекты связаны следующим образом: компоненты тензора подвижности параллелизма l в связности первого типа обращаются в нуль ($l = 0$); в связности второго типа они совпадают с соответствующими компонентами подтензора σ тензора деформации или равны нулю, когда таких компонент не существует; в связности третьего типа они противоположны соответствующим компонентам простейших подтензоров тензора деформации Σ или компонентам объекта χ с переставленными индексами (объект χ является линейной комбинацией тензора деформации Σ и оснащающего квазитензора λ).

3. Геометрические связности в пространстве центрированных плоскостей

В данном разделе пространство Π центрированных плоскостей представлено в виде двух однородных расслоений, т. е. пространство Π является составным многообразием в смысле В. В. Вагнера [18]. В этих расслоениях заданы линейные дифференциально--геометрические связности по В. И. Близникасу. Доказывается, что оснащения пространства Π полями плоскостей P_{n-m} и P_{m-1} ($A \notin P_{m-1} \subset L_m$, $P_{n-m} \cap L_m = A$), которые являются аналогами нормалей первого и второго рода в смысле Нордена, позволяют задать эти связности.

В разделе 2 мы изучали в n-мерном проективном пространстве P_n пространство Π всех центрированных плоскостей размерности m. Пространство Π можно представить в виде двух однородных расслоений:

1) уравнения $\omega^a = 0$, $\omega^\alpha = 0$ образуют вполне интегрируемую подсистему, которая выделяет из пространства Π подпространство S, представляющее из себя связку m-мерных плоскостей проективного пространства P_n, проходящих через одну точку. В связи с этим пространство Π центрированных плоскостей представим в виде расслоения $S(P_n)$, базой которого служит область пространства P_n, а типовым слоем — связка S;
2) уравнения $\omega^\alpha = 0$, $\omega_a^\alpha = 0$ также образуют вполне интегрируемую подсистему, которая выделяет из пространства Π центрированных плоскостей совокупность T плоскостей L_m^*, принадлежащих одной нецентрированной плоскости L_m. Поэтому пространство Π можно представить в виде другого расслоения $T(V)$, базой которого является многообразие Грассмана $V = \mathrm{Gr}(m,n)$ плоскостей L_m, а типовым слоем — совокупность T.

3.1. Геометрическая связность в расслоении $S(P_n)$

Пространство Π центрированных плоскостей представим как расслоение $S(P_n)$. Линейную дифференциально-геометрическую связность [30] в расслоении $S(P_n)$ по В. И. Близникасу [14] зададим с помощью форм

$$\hat\omega_a^\alpha = \omega_a^\alpha - G_{ab}^\alpha \omega^b - G_{a\beta}^\alpha \omega^\beta. \tag{3.1.1}$$

Продифференцируем формы (3.1.1) внешним образом, используя структурные уравнения Картана (1.1.2):

$$\begin{aligned} D\hat\omega_a^\alpha &= (\delta_\beta^\alpha \omega_a^b - \delta_a^b \omega_\beta^\alpha - G_{a\beta}^\alpha \omega^b) \wedge \hat\omega_b^\beta - \Delta G_{ab}^\alpha \wedge \omega^b + \\ &+ (-\Delta G_{a\beta}^\alpha + G_{ab}^\alpha \omega_\beta^b + \delta_\beta^\alpha \omega_a) \wedge \omega^\beta - G_{a\beta}^\alpha G_{bc}^\beta \omega^b \wedge \omega^c - G_{a\beta}^\alpha G_{b\gamma}^\beta \omega^b \wedge \omega^\gamma, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

где оператор Δ действует обычным образом. Для задания связности в расслоении $S(P_n)$ мы должны задать поле объекта связности $G = \{G_{ab}^\alpha, G_{a\beta}^\alpha\}$ в пространстве Π. Учитывая внешние дифференциалы (3.1.2) форм $\hat\omega_a^\alpha$, получим

$$\begin{aligned} \Delta G_{ab}^\alpha &= G_{abc}^\alpha \omega^c + G_{ab\beta}^\alpha \omega^\beta + G_{ab\beta}^{\alpha c} \omega_c^\beta, \\ \Delta G_{a\beta}^\alpha - G_{ab}^\alpha \omega_\beta^b - \delta_\beta^\alpha \omega_a &= G_{a\beta b}^\alpha \omega^b + G_{a\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma + G_{a\beta\gamma}^{\alpha b} \omega_b^\gamma. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Теорема 3.1.1. *Объект геометрической связности G является квазитензором, содержащим подтензор G_{ab}^α.*

Учитывая в структурных уравнениях (3.1.2) дифференциальные уравнения (3.1.3), мы найдём выражения дифференциалов форм связности $\hat\omega_a^\alpha$ (3.1.1), в которых присутствует объект кривизны R:

$$\begin{aligned} D\hat\omega_a^\alpha = (\delta_\beta^\alpha \omega_a^b - \delta_a^b \omega_\beta^\alpha - G_{a\beta}^\alpha \omega^b + G_{ac\beta}^{\alpha b} \omega^c + G_{\alpha\gamma\beta}^{\alpha b} \omega^\gamma) \wedge \hat\omega_b^\beta + \\ + R_{abc}^\alpha \omega^b \wedge \omega^c + R_{ab\beta}^\alpha \omega^b \wedge \omega^\beta + R_{a\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \end{aligned}$$

где компоненты объекта кривизны R выражаются по формулам

$$\begin{aligned} R_{abc}^\alpha = G_{a[bc]}^\alpha - G_{a\beta}^\alpha G_{[bc]}^\beta + G_{a[b\beta}^{\alpha e} G_{ec]}^\beta, \quad R_{a\beta\gamma}^\alpha = G_{a[\beta\gamma]}^\alpha + G_{a[\beta\mu}^{ab} G_{b\gamma]}^\mu, \\ R_{ab\beta}^\alpha = G_{ab\beta}^\alpha - G_{a\beta b}^\alpha - G_{a\gamma}^\alpha G_{b\beta}^\gamma + G_{ab\gamma}^{\alpha c} G_{c\beta}^\gamma - G_{a\beta\gamma}^{\alpha c} G_{cb}^\gamma. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Продолжая дифференциальные уравнения (3.1.3) компонент объекта G геометрической связности, находим сравнения по модулю базисных форм ω^α, ω^a, ω_a^α пространства Π на пфаффовы производные компонент объекта связности G и учитывая выражения (3.1.4) компонент объекта кривизны R геометрической связности расслоения $S(P_n)$, находим дифференциальные сравнения компонент кривизны:

$$\Delta R^\alpha_{abc} \equiv 0, \quad \Delta R^\alpha_{ab\beta} - 2R^\alpha_{abc}\omega^c_\beta \equiv 0, \quad \Delta R^\alpha_{a\beta\gamma} + R^\alpha_{ab[\beta}\omega^b_{\gamma]} \equiv 0.$$

Теорема 3.1.2. *Объект кривизны R геометрической связности расслоения $S(P_n)$ образует тензор.*

Осуществим оснащение пространства Π полем $(m-1)$-мерных плоскостей P_{m-1} (аналог нормализации второго рода в смысле Нордена [32]). Плоскость P_{m-1} зададим совокупностью точек $B_a = A_a + \lambda_a A$. Найдём дифференциалы базисных точек оснащающей плоскости:

$$dB_a = (\delta^b_a\theta + \omega^b_a + \lambda_a\omega^b)B_b + (\omega^\alpha_a + \lambda_a\omega^\alpha)A_\alpha + (d\lambda_a + \omega_a - \lambda_b\omega^b_a - \lambda_a\lambda_b\omega^b)A.$$

Требуя относительную инвариантность плоскости P_{m-1}, получим условия

$$\omega^\alpha_a + \lambda_a\omega^\alpha \equiv 0, \tag{3.1.5}$$

$$\Delta\lambda_a + \omega_a \equiv 0. \tag{3.1.6}$$

Условие (3.1.5) выполняется автоматически, так как формы ω^α, ω^α_a входят в состав базисных форм пространства Π центрированных плоскостей. Таким образом, оснащающий квазитензор $\lambda = \{\lambda_a\}$ удовлетворяет сравнениям (3.1.6).

Теорема 3.1.3. *Аналог нормализации второго рода пространства* Π *центрированных плоскостей, рассматриваемого как однородное расслоение $S(P_n)$, индуцирует геометрическую связность G в этом расслоении.*

Доказательство. Действительно, из дифференциальных уравнений компонент объекта геометрической связности (3.1.3) и дифференциальных сравнений (3.1.6) оснащающего квазитензора получим охват:

$$\overset{0}{G}{}^\alpha_{a\beta} = -\delta^\alpha_\beta\lambda_a, \quad \overset{0}{G}{}^\alpha_{ab} = 0. \tag{3.1.7}$$

Продолжая дифференциальные уравнения, соответствующие сравнениям (3.1.6), приходим к следующим сравнениям:

$$\Delta\lambda_{ab} + \lambda_b\omega_a + \lambda_a\omega_b \equiv 0, \quad \Delta\lambda_{a\alpha} - \lambda_{ab}\omega^b_\alpha + \lambda^b_{a\alpha}\omega_b + \lambda_a\omega_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta\lambda^b_{a\alpha} - \delta^b_a\lambda_c\omega^c_\alpha + \delta^b_a\omega_\alpha \equiv 0,$$

причём $\lambda' = \{\lambda, \lambda_{ab}, \lambda_{a\alpha}, \lambda^b_{a\alpha}\}$ — продолженный оснащающий квазитензор.

Введём объект, компоненты которого выражаются по формулам $\lambda_\alpha = \frac{1}{m}\lambda^a_{a\alpha}$. Дифференциальные сравнения этих компонент выглядят следующим образом:

$$\Delta\lambda_\alpha - \lambda_b\omega^b_\alpha + \omega_\alpha \equiv 0. \tag{3.1.8}$$

Мы видим, что объект $\{\lambda_a, \lambda_\alpha\}$ является квазитензором.

Теорема 3.1.4. *Объект* $\{\lambda_a, \lambda_\alpha\}$ *определяет гиперплоскость* $P_{n-1} = [B_a, D_\alpha]$, *где* $D_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha A$.

Доказательство. Находим дифференциалы точек B_a, D_α, сворачивая часть слагаемых при помощи оператора Δ:

$$\begin{gathered} dB_a = (\delta_a^b\theta + \omega_a^b + \lambda_a\omega^b)B_b + (\omega_a^\alpha + \lambda_a\omega^\alpha)D_\alpha + \\ + (\Delta\lambda_a + \omega_a - \lambda_a\lambda_b\omega^b - \lambda_a\lambda_\alpha\omega^\alpha - \lambda_\alpha\omega_a^\alpha)A, \\ dD_\alpha = (\delta_\alpha^\beta\theta + \omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha\omega^\beta)D_\beta + (\omega_\alpha^a + \lambda_\alpha\omega^a)B_a + \\ + (\Delta\lambda_\alpha + \omega_\alpha - \lambda_a\omega_\alpha^a - \lambda_\alpha\lambda_a\omega^a - \lambda^\alpha\lambda_\beta\omega^\beta)A. \end{gathered} \tag{3.1.9}$$

Гиперплоскость $P_{n-1} = [B_a, D_\alpha]$ определяется тогда, когда выполнены сравнения (3.1.6), (3.1.8). □

Продолжая дифференциальное уравнение, соответствующее дифференциальному сравнению (3.1.8), приходим к следующим сравнениям по модулю форм ω^α, ω^a, ω_a^α:

$$\begin{gathered} \Delta\lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha a}\omega_\beta^a + \lambda_{\alpha\beta}^a\omega_a + \lambda_\beta\omega_\alpha + \lambda_\alpha\omega_\beta - \lambda_{a\beta}\omega_\alpha^a \equiv 0, \\ \Delta\lambda_{\alpha a} + \lambda_\alpha\omega_a + \lambda_a\omega_\alpha - \lambda_{ba}\omega_\alpha^b \equiv 0, \quad \Delta\lambda_{\alpha\beta}^a + \lambda_\beta\omega_\alpha^a - \lambda_{b\beta}^a\omega_\alpha^b \equiv 0. \end{gathered}$$

Рассмотрим дифференциалы базисных точек (3.1.9). Учитывая дифференциальные уравнения объекта, определяющего гиперплоскость P_{n-1}, запишем дифференциалы базисных точек данной плоскости с учётом форм геометрической связности (3.1.1) и охвата (3.1.7) объекта G геометрической связности:

$$dB_a = (\ldots)_a^b B_b + \overset{0}{\hat{\omega}}{}_a^\alpha D_\alpha + \Big(\tau_{ab}\omega^b + \tau_{a\alpha}\omega^\alpha + \tau_{a\alpha}^b\overset{0}{\hat{\omega}}{}_b^\alpha\Big)A, \tag{3.1.10}$$

$$dD_\alpha = (\ldots)_\alpha^\beta D_\beta + (\ldots)_\alpha^a B_a + \Big(\tau_{\alpha a}\omega^a + \tau_{\alpha\beta}\omega^\beta + \lambda_{\alpha\beta}^a\overset{0}{\hat{\omega}}{}_a^\beta\Big)A, \tag{3.1.11}$$

где

$$\begin{gathered} \tau_{ab} = \lambda_{ab} - \lambda_a\lambda_b, \quad \tau_{a\alpha} = \lambda_{a\alpha} - \lambda_{a\alpha}^b\lambda_b, \quad \tau_{a\alpha}^b = \lambda_{a\alpha}^b - \delta_a^b\lambda_\alpha, \\ \tau_{\alpha a} = \lambda_{\alpha a} - \lambda_\alpha\lambda_a, \quad \tau_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha\lambda_\beta - \lambda_{\alpha\beta}^a\lambda_a, \end{gathered} \tag{3.1.12}$$

причём $\overset{0}{\hat{\omega}}{}_a^\alpha$ — форма индуцированной геометрической связности.

Из дифференциальных уравнений компонент (3.1.12) видно, что объект

$$\tau = \{\tau_{ab},\, \tau_{a\alpha},\, \tau_{a\alpha}^b,\, \tau_{\alpha a},\, \tau_{\alpha\beta}\}$$

является тензором.

Уравнения

$$\hat{\omega}_a^\alpha = 0 \tag{3.1.13}$$

образуют интегрируемую систему вдоль одномерного семейства плоскостей L_m^*, что следует из структурных уравнений.

Таким образом, при построенном охвате, обращении объекта τ в нуль и условии (3.1.13) оснащающая плоскость P_{m-1} остаётся на месте (см. (3.1.10)).

Теорема 3.1.5. *Оснащающая плоскость P_{m-1} остаётся на месте при обращении в нуль компонент подтензора $\{\tau_{ab},\, \tau_{a\alpha},\, \tau^b_{a\alpha}\}$ и форм геометрической связности G вдоль любого одномерного семейства плоскостей L^*_m.*

Теорема 3.1.6. *Оснащающая гиперплоскость $P_{n-1} = [B_a, D_\alpha]$ остаётся на месте при обращении в нуль тензора τ и форм геометрической связности G вдоль любого одномерного семейства плоскостей L^*_m.*

Доказательство следует из формул (3.1.10), (3.1.11), (3.1.13). □

3.2. Геометрическая связность в расслоении $T(V)$

Пространство центрированных плоскостей представим в виде расслоения $T(V)$.

Геометрическую связность в расслоении $T(V)$ зададим с помощью форм

$$\hat{\omega}^a = \omega^a - F^a_\alpha \omega^\alpha - Q^{ab}_\alpha \omega^\alpha_b. \tag{3.2.1}$$

Найдём внешние дифференциалы форм (3.2.1):

$$\begin{aligned} D\hat{\omega}^a = (-\omega^a_b + F^a_\alpha \omega^\alpha_b) \wedge \hat{\omega}^b - (\Delta F^a_\alpha + Q^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha) \wedge \omega^\alpha - \\ - (\Delta Q^{ab}_\alpha) \wedge \omega^\alpha_b - F^a_\alpha F^b_\beta \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_b + F^a_\alpha Q^{bc}_\beta \omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Компоненты объекта геометрической связности $F = \{F^a_\alpha,\, Q^{ab}_\alpha\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta F^a_\alpha + Q^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha = F^a_{\alpha\beta} \omega^\beta + F^a_{\alpha b} \omega^b + F^{ab}_{\alpha\beta} \omega^\beta_b, \\ \Delta Q^{ab}_\alpha = Q^{ab}_{\alpha\beta} \omega^\beta + Q^{ab}_{\alpha c} \omega^c + Q^{abc}_{\alpha\beta} \omega^\beta_c. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Теорема 3.2.1. *Объект геометрической связности F является квазитензором, содержащим подтензор Q^{ab}_α.*

Подставляем в структурные уравнения (3.2.2) форм $\hat{\omega}^a$ дифференциальные уравнения (3.2.3) компонент объекта геометрической связности F, находим выражения дифференциалов форм связности (3.2.1), в которых присутствует объект кривизны R.

Теорема 3.2.2. *Объект кривизны R геометрической связности расслоения $T(V)$ образует тензор.*

Рассмотрим аналог нормализации первого рода Нордена, т.е. осуществим оснащение пространства Π полем $(n-m)$-мерных плоскостей $P_{n-m} = [C_\alpha, A]$, где $C_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a$. Тогда

$$dC_\alpha = (\delta^\beta_\alpha \theta + \omega^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha \omega^\beta_a) C_\beta + (\Delta \lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha \omega^\beta_b) A_a + (\omega_\alpha + \lambda^a_\alpha \omega_a) A.$$

Требуя относительную инвариантность плоскости, получим

$$\Delta \lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha \equiv 0. \tag{3.2.4}$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения компонент объекта геометрической связности F (3.2.3) и выражения (3.2.4), находим охват объекта геометрической связности компонентами оснащающего квазитензора λ:

$$\overset{0}{Q}{}^{ab}_{\alpha} = 0, \quad \overset{0}{F}{}^{a}_{\alpha} = \lambda^a_\alpha. \tag{3.2.5}$$

Теорема 3.2.3. *Аналог нормализации первого рода пространства центрированных плоскостей, представленного как однородное расслоение $T(V)$, индуцирует геометрическую связность F.*

Продолжаем уравнения, соответствующие дифференциальным сравнениям (3.2.4), получим

$$\Delta\lambda^a_{\alpha b} - \delta^a_b\lambda^c_\alpha\omega_c - \delta^a_b\omega_\alpha \equiv 0, \quad \Delta\lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda^a_{\alpha b}\omega^b_\beta + \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b + \lambda^a_\beta\omega_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \lambda^b_\alpha\omega^a_\beta + \lambda^a_\beta\omega^b_\alpha \equiv 0.$$

Рассмотрим дифференциалы базисных точек оснащающей плоскости, учтём в них дифференциальные уравнения компонент пфаффовых производных оснащающего квазитензора, выражения форм связности (3.2.1) и охват (3.2.5). Тогда

$$dC_\alpha = (\ldots)^\beta_\alpha C_\beta + (\ldots)_\alpha A + \Big(\tau^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \lambda^a_{\alpha b}\overset{0}{\hat{\omega}}{}^b + \tau^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b\Big)A_a, \tag{3.2.6}$$

где

$$\tau^a_{\alpha\beta} = \lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda^a_{\alpha b}\lambda^b_\beta, \quad \tau^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha.$$

Компоненты объекта $\tau_1 = \{\tau^a_{\alpha\beta}, \tau^{ab}_{\alpha\beta}\}$ образуют тензор, так как

$$\Delta\tau^a_{\alpha\beta} + \tau^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b \equiv 0, \quad \Delta\tau^{ab}_{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Если в (3.2.6) $\overset{0}{\hat{\omega}}{}^b = 0$, $\tau_1 = 0$, то $dC_\alpha = (\ldots)^\beta_\alpha C_\beta + (\ldots)_\alpha A$. Уравнения $\overset{0}{\hat{\omega}}{}^b = 0$ образуют интегрируемую систему вдоль одномерного семейства плоскостей L^*_m, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.4. *Оснащающая плоскость P_{n-m} не смещается при обращении в нуль форм геометрической связности F и тензора τ_1 вдоль произвольного одномерного семейства плоскостей L^*_m.*

Литература

[1] Белова О. О. Объект кривизны связности в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // Проблемы математических и физических наук. — Калининград, 2000. — С. 19—22.

[2] Белова О. О. Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 31. — Калининград, 2000. — С. 8—11.

[3] Белова О. О. Ковариантный дифференциал оснащающего квазитензора на грассмановом многообразии // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 32. — Калининград, 2001. — С. 13—17.

[4] Белова О. О. Связности трёх типов в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // Проблемы математических и физических наук. — Калининград, 2001. — С. 3—5.

[5] Белова О. О. Связности трёх типов в расслоении над пространством центрированных плоскостей // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 12. — Казань, 2001. — С. 23—24.

[6] Белова О. О. Геометрическая интерпретация связности в расслоении над пространством центрированных плоскостей // Проблемы математических и физических наук. — Калининград, 2002. — С. 27—28.

[7] Белова О. О. Интерпретация связности первого типа в расслоении над грассмановым многообразием // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 33. — Калининград, 2002. — С. 14—17.

[8] Белова О. О. Связности в главном расслоении над областью проективного пространства // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 18. — Казань, 2002. — С. 9—10.

[9] Белова О. О. Геометрические связности в пространстве центрированных плоскостей // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 21. — Казань, 2003. — С. 81.

[10] Белова О. О. Параллельные перенесения в связности 1-го типа пространства центрированных плоскостей // Междунар. конф. по геометрии и анализу. — Пенза, 2003. — С. 3—5.

[11] Белова О. О. Связности трёх типов в главном расслоении над областью проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 34. — Калининград, 2003. — С. 21—26.

[12] Белова О. О. Тензор кручения групповой подсвязности на многообразии Грассмана // Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Одессе—2004. Дифференц. геом. и её применения». — Одесса, 2004. — С. 8—10.

[13] Белова О. О. Квазитензор кручения групповой подсвязности в пространстве центрированных плоскостей // Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева: Сборник трудов. — Пенза, 2004. — С. 5—8.

[14] Близникас В. И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Литовский мат. сб. — 1966. — Т. 6, № 2. — С. 141—209.

[15] Близникас В. И. Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. геом. семин. Т. 6. — М.: ВИНИТИ, 1974. — С. 43—111.

[16] Близникене И. В. О геометрии полунеголономной конгруэнции первого рода // Тр. геом. семин. Т. 3. — М.: ВИНИТИ, 1971. — С. 125—148.

[17] Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи мат. наук. — 1991. — Т. 46, № 2. — С. 41—83.

[18] Вагнер В. В. Теория составного многообразия // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. Вып. 8. — М.—Л., 1950. — С. 11—72.

[19] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: ВИНИТИ, 1979. — (Проблемы геометрии; Т. 9).

[20] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 275—383.

[21] Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семин. Т. 3. — М.: ВИНИТИ, 1971. — С. 49—94.

[22] Лумисте Ю. Г. Индуцированные связности в погружённых проективных и аффинных расслоениях // Уч. зап. Тартуского ун-та. — 1965. — Вып. 177. — С. 6—42.

[23] Нейфельд Э. Г. Нормализованное пространство m-плоскостей n-мерного проективного пространства // Тезисы докл. Второй Всесоюзной геом. конф. — Харьков, 1964. — С. 190—191.

[24] Нейфельд Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1976. — № 11. — С. 48—55.

[25] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

[26] Полякова К. В. Интерпретация подтензоров тензора деформации на поверхности // Проблемы математических и физических наук. — Калининград, 2001. — С. 20—22.

[27] Скрягина А. В. Пучок связностей 1-го типа, индуцированный оснащением Бортолотти плоскостной поверхности // Проблемы математических и физических наук. — Калининград, 2000. — С. 35—38.

[28] Шевченко Ю. И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 9. — Калининград, 1978. — С. 124—133.

[29] Шевченко Ю. И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 18. — Калининград, 1987. — С. 115—120.

[30] Шевченко Ю. И. Связность в составном многообразии и её продолжение // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 23. — Калининград, 1992. — С. 110—118.

[31] Шевченко Ю. И. Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград, 1998.

[32] Шевченко Ю. И. Оснащения центропроективных многообразий. — Калининград, 2000.

[33] Шинкунас Ю. И. О распределении m-мерных плоскостей в n-мерном римановом пространстве // Тр. геом. семин. Т. 5. — М.: ВИНИТИ, 1974. — С. 123—133.

[34] Belova O. O. Geometric connections in the space of centred planes // Докл. междунар. мат. семин.: К 140-летию со дня рождения Давида Гильберта из Кёнигсберга и 25-летию математического факультета. — Калининград, 2002. — С. 100—105.

[35] Belova O. O. Bunch of connections of the 1st type induced by analog of Norden's normalization of centred planes space // New Geometry of Nature. Vol. 1. — Kazan, 2003. — P. 51—54.

[36] Bortolotti E. Connessioni nelle varietà luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. — 1933. — No. 3. — P. 81—89.