V. A. Solonnikov, On an unsteady flow of a finite mass of a liquid bounded by a free surface, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1986, Volume 152, 137–157

В.А.Солонников

О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача на определение ограниченной области $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, $t>0$, и заданного при $x\in\Omega_t$, $t>0$ векторного поля скоростей $\vec{v}(x,t)=(v_1,v_2,v_3)$ и давления $p(x,t)$, удовлетворяющих уравнениям Навье-Стокса, начальным и краевым условиям:

$$\vec{v}_t-\nu\nabla^2\vec{v}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}+\nabla p=\vec{f}(x,t),\quad \nabla\cdot\vec{v}=0,\quad x\in\Omega_t,\ t>0,$$

$$\vec{v}\Big|_{t=0}=\vec{v}_0(x),\quad x\in\Omega_0\equiv\Omega \tag{1.1}$$

$$T\vec{n}-\sigma H\vec{n}\Big|_{x\in\Gamma_t}=0.$$

Здесь $\vec{f}(x,t)$ – заданное при $x\in\mathbb{R}^3$, $t>0$ векторное поле массовых сил, ν,σ – положительные постоянные (коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения), $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, $\Gamma_t=\partial\Omega_t$, $\vec{n}(x)$ – единичный вектор внешней нормали к Γ_t в точке x, $T(\vec{v},p)=-pI+\nu S(\vec{v})$ – тензор напряжений, $S(\vec{v})$ – тензор скоростей деформации с элементами $S_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, $H(x,t)$ – удвоенная средняя кривизна поверхности Γ_t, считающаяся отрицательной, когда Ω_t выпукла наружу жидкости; при этом

$$H\vec{n}=\Delta(t)\vec{x},$$

где $\Delta(t)$ – оператор Лапласа-Бельтрами на Γ_t. Если Γ_t задается уравнением $\vec{x}=\vec{x}(s_1,s_2)$, $(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2$, то

$$\Delta(t)=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\frac{\hat{g}_{\alpha\beta}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial s_\beta}=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}g^{\alpha\beta}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial s_\beta}, \tag{1.2}$$

где $g=\det(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,2}$, $g_{\alpha\beta}=\frac{\partial\vec{x}}{\partial s_\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial s_\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ и $\hat{g}_{\alpha\beta}$ – элементы обратной и взаимной матрицы для $(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,2}$. Область Ω задается, а $\Omega_t=\{\vec{x}=\vec{x}(\xi,t),\ \xi\in\Omega\}$, где $\vec{x}(\xi,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial t}=\vec{v}(x,t),\qquad \vec{x}\Big|_{t=0}=\vec{\xi}\in\Omega.$$

Отображение $\vec{x}=\vec{x}(\xi,t)$ области Ω на Ω_t связывает эйлеровы x и лагранжевы ξ координаты одной и той же жидкой частицы. Если известно векторное поле скоростей как функция лагранжевых координат $\vec{u}(\xi,t)$, то

$$\vec{x} = \vec{\xi} + \int_0^t \vec{u}(\xi,\tau)\,d\tau \equiv X_u(\xi,t).$$

Перейдя к лагранжевым координатам можно записать всю задачу как начально-краевую задачу в известной области $Q_T=\Omega\times(0,T)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_t - \nu\nabla_u^2\vec{u} + \nabla_u q = \vec{f}(X_u(\xi,t),t), \qquad \nabla_u\cdot\vec{u} = 0, \\ &\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{v}_0(\xi) \\ &T_u(\vec{u},q)\vec{n} - \sigma\Delta(t)X_u(\xi,t)\Big|_{\xi\in\Gamma} = 0 . \end{aligned} \tag{I.3}$$

Здесь $q=p(X_u,t)$, $\Gamma=\partial\Omega$, $\nabla_u=\left\{\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\xi_m}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right\}_{i=1,2,3}$. Так как в силу уравнения $\nabla_u\cdot\vec{u}=0$ определитель матрицы Якоби преобразования X_u равен единице, то $\frac{\partial\xi_m}{\partial x_i}$ совпадают с алгебраическими дополнениями A_{im} элемента $a_{im}=\delta_{im}+\int_0^t\frac{\partial u_i}{\partial\xi_m}d\tau$ этой матрицы. Таким образом, $\nabla_u=\mathcal{A}\nabla$, где $\mathcal{A}$ – матрица алгебраических дополнений. Далее, $T_u(\vec{u},q)=-qI+\nu S_u(\vec{u})$,

$$(S_u)_{ij}=\sum_{m=1}^{3}\left(A_{jm}\frac{\partial u_i}{\partial\xi_m}+A_{im}\frac{\partial u_j}{\partial\xi_m}\right).$$

Наконец, $\vec{n}=\vec{n}(X_u(\xi,t))=\mathcal{A}\vec{n}_0(\xi)\,|\mathcal{A}\vec{n}_0|^{-1}$, где $\vec{n}_0$ – вектор внешней нормали к Γ в точке ξ.

Задача (I.3) изучалась при $\sigma=0$ в работе [I], где была установлена ее разрешимость на конечном интервале времени в гельдеровских пространствах $C^{\ell,\ell/2}$. Близкая к ней задача, описывающая неустановившееся движение тяжелой жидкости над бесконечным дном, изучалась как при $\sigma=0$ [2], так и при $\sigma>0$ [3,4]. Теорема о разрешимости задачи (I.3) при $\sigma>0$ на конечном интервале времени в пространствах $W_2^{\ell,\ell/2}$ анонсирована в [5]. В настоящей работе доказывается разрешимость задачи (I.I) при всех $t>0$ в предположении, что начальные данные близки к равновесным ($\vec{v}_0$ мало, Ω_0 близка к шару). Необходимые для этого результаты (в том числе локальная теорема существования) приводятся без доказательства в § 2.

В конце статьи кратко обсуждается случай $\sigma=0$. Результаты работы переносятся без больших изменений на двумерный случай.

Автор приносит глубокую благодарность Ю.Д.Бураго за консультации. Теорема 3 обсуждалась с сотрудниками Института математики Копенгагенского университета, которым автор признателен за помощь и литературные указания, в особенности профессору Р.Шмидту и профессору Б.Фугледе. Последний является одним из авторов теоремы 3 (см.[6]).

§ 2. Вспомогательные предложения

Определим анизотропные пространства С.Л.Соболева-Л.Н.Слободецкого $W_2^{\tau,\tau/2}(Q_T)$ с нецелым $\tau>0$ как множества заданных в $Q_T=\Omega\times(0,T)$ функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W_2^{\tau,\tau/2}(Q_T)}=\left(\|u\|^2_{W_2^{\tau,0}(Q_T)}+\|u\|^2_{W_2^{0,\tau/2}(Q_T)}\right)^{1/2},$$

где

$$\|u\|^2_{W_2^{\tau,0}(Q_T)}=\int_0^T\|u\|^2_{W_2^{\tau}(\Omega)}dt,\quad \|u\|^2_{W_2^{0,\tau/2}(Q_T)}=\int_\Omega\|u\|^2_{W_2^{\tau/2}(0,T)}dx,$$

$$\|u\|^2_{W_2^{\tau}(\Omega)}=\sum_{|k|<\tau}\|\mathcal{D}^k u\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{|k|=[\tau]}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|\mathcal{D}_x^k u(x,t)-\mathcal{D}_y^k u(y,t)|^2}{|x-y|^{3+2(\tau-[\tau])}}dx\,dy, \tag{2.1}$$

$$\|u\|^2_{W_2^{\tau/2}(0,T)}=\sum_{j=0}^{[\tau/2]}\|\mathcal{D}_t^j u\|^2_{L_2(0,T)}+\int_0^T\int_0^T\frac{|\mathcal{D}_t^{[\frac{\tau}{2}]}u(x,t)-\mathcal{D}_\tau^{[\frac{\tau}{2}]}u(x,\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2(\frac{\tau}{2}-[\frac{\tau}{2}])}}dt\,d\tau,$$

а производные понимаются как обобщенные в смысле С.Л.Соболева.

Часто используются другие эквивалентные нормы в этом пространстве, включающие различные смешанные производные u .

Аналогичным образом, с помощью локальных карт и разбиения единицы, определяется норма в пространстве $W_2^{\tau,\tau/2}(G_T)$ функций, заданных на $G_T=\Gamma\times(0,T)$.

Под $W_2^{\tau}(\Omega)$ понимается пространство функций, заданных в Ω и имеющих конечную норму (2.1).

Для обозначения пространств векторных полей с компонентами из $W_2^{\tau,\tau/2}(Q_T)$, $W_2^{\tau,\tau/2}(G_T)$ или $W_2^{\tau}(\Omega)$ будем использовать жирный шрифт: $\mathbf{W}_2^{\tau,\tau/2}(Q_T)$, $\mathbf{W}_2^{\tau,\tau/2}(G_T)$, $\mathbf{W}_2^{\tau}(\Omega)$.

Прежде чем формулировать теорему о разрешимости задачи (1.3), преобразуем краевые условия. Определим на множестве векторных полей, заданных на Γ, операции проектирования

$$\Pi\vec{g} = \vec{g} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{g}), \qquad \Pi_0\vec{g} = \vec{g} - \vec{n}_0(\vec{n}_0\cdot\vec{g}),$$

где, как и выше, $\vec{n} = \dfrac{A\vec{n}_0}{|A\vec{n}_0|}$. Если $T_u\vec{n} - \sigma\Delta(t)X_u = 0$, то, очевидно,

$$\Pi_0\Pi S_u(\vec{u})\vec{n} = \Pi_0\Pi(T_u\vec{n} - \sigma\Delta(t)X_u) = 0,$$

$$\vec{n}_0\cdot T_u\vec{n} - \sigma\vec{n}_0\cdot\Delta(t)X_u = 0.$$

Верно и обратное при условии, что $(\vec{n}_0\cdot\vec{n}) > 0$ на Γ.

Рассмотрим линейную задачу

$$\vec{w}_t - \nu\nabla_u^2\vec{w} + \nabla_u s = \vec{f}(\xi,t), \qquad \nabla_u\cdot\vec{w} = \rho(\xi,t),$$

$$\vec{w}\big|_{t=0} = \vec{w}_0(\xi),$$

$$\Pi_0\Pi S_u(\vec{w})\vec{n}\big|_{\xi\in\Gamma} = \Pi_0\vec{d}, \tag{2.2}$$

$$\vec{n}_0\cdot T_u\vec{n} - \sigma\vec{n}_0\cdot\Delta(t)\int_0^t\vec{w}\,d\tau\Big|_{\xi\in\Gamma} = b + \sigma\int_0^t B\,d\tau.$$

ТЕОРЕМА I. Предположим, что $\Gamma\in W_2^{l+3/2}$, $l\in(\frac{1}{2},1)$, $\vec{f}, \nabla\rho\in W_2^{l,l/2}(Q_T)$, $\vec{w}_0\in W_2^{1+l}(\Omega)$, $\vec{d}\in W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)$, $b\in W_2^{1/2+l,1/4+l/2}(G_T)$, $B\in W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)$, кроме того, $\rho = \nabla\cdot\vec{R}$, $\vec{R}\in L_2(Q_T)$ имеет конечную норму $\|\vec{R}_t\|_{W_2^{0,l/2}(Q_T)}$ и выполнены условия согласования

$$\nabla\cdot\vec{w}_0 = \rho(x,0), \qquad \Pi_0 S(\vec{w}_0)\vec{n}_0\big|_{\xi\in\Gamma} = \Pi_0\vec{d}\big|_{t=0}.$$

Пусть $\vec{u}\in W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T)$ и

$$T^{\frac{1}{2}}\|\vec{u}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T)} \leqslant \delta \tag{2.3}$$

с достаточно малым $\delta > 0$.

Тогда задача (2.2) имеет единственное решение, такое что $\vec{w}\in W_2^{l+2,l/2+1}(Q_T)$, $s\in W_2^{l,l/2}(Q_T)$, $\nabla s\in W_2^{l,l/2}(Q_T)$, $s\big|_{G_T}\in W^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)$, и

$$
\begin{gathered}
\|\vec{w}\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q_T)}+\|s\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q_T)}+\|\nabla s\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q_T)}+ \\
+\|s\|_{W_2^{1/2+\ell,1/4+\ell/2}(G_T)}\le C(T)(\|\vec{f}\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q_T)}+\|\vec{w}_0\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega)}+ \\
+\|\nabla p\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q_T)}+\|\vec{R}_t\|_{W_2^{0,\ell/2}(Q_T)}+\|\vec{d}\|_{W_2^{1/2+\ell,1/4+\ell/2}(G_T)}+ \\
+\|b\|_{W_2^{\ell+1/2,\ell/4+1/4}(G_T)}+\|B\|_{W_2^{\ell-1/2,\ell/2-1/4}(G_T)});
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

$c(T)$ – неубывающая функция T.

Центральная часть доказательства – рассмотрение задачи (I.3) при $\vec{u}=0$. При $\vec{u}\neq 0$ оценка решения задачи (I.3) получается из оценки решения задачи (I.3) с $\vec{u}=0$ благодаря малости σ в (2.3).

Такая же теорема справедлива для задачи с краевыми условиями

$$
\Pi_0\Pi S_u(\vec{w})\vec{n}=\Pi_0\vec{d},\quad \vec{n}_0\cdot T_u(\vec{w},s)\vec{n}-\sigma\vec{n}_0\cdot\int_0^t\Delta(\tau)\vec{w}\,d\tau=b+\sigma\int_0^t B\,d\tau .
$$

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что $\ell\in(1/2,1)$, $\Gamma\in W_2^{5/2+\ell}$, а $\vec{f}(x,t)$ непрерывно дифференцируемо по x_k и $\vec{f}$, $\vec{f}_{x_k}$ удовлетворяют условию Липшица по x и условию Гельдера по t с показателем $1/2$. При любом $\vec{v}_0\in W_2^{1+\ell}(\Omega)$, удовлетворяющем условиям согласования $\nabla\cdot\vec{v}_0=0$, $\Pi_0 S(\vec{v}_0)\vec{n}_0|_\Gamma=0$, задача (I.3) имеет единственное решение $(\vec{u},q)$, определенное при $0\le t\le T_1$, причем $\vec{u}\in W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q_{T_1})$, $\nabla q\in W_2^{\ell,\ell/2}(Q_{T_1})$, $q\in W_2^{\ell,\ell/2}(Q_{T_1})$, $q|_{G_{T_1}}\in W_2^{1/2+\ell,1/4+\ell/2}(G_{T_1})$. Величина $T_1<\infty$ зависит от $\|\vec{v}_0\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega)}$, $|\vec{f}|_{T_1}=\sup_{x,t<T_1}|\vec{f}(x,t)|+\max_k\sup|\vec{f}_{x_k}|+\sup_{x,t,\tau}|t-\tau|^{-1/2}|\vec{f}(x,t)-\vec{f}(x,\tau)|$ и от $\|H(\xi,0)\|_{W_2^{1/2+\ell}(\Gamma)}$.

Если область Ω диффеоморфна шару, то T_1 неограниченно возрастает, когда стремятся к нулю $\|\vec{v}_0\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega)}$, $|\vec{f}|_{T_1}$ и $\left\|H(\xi,0)+\frac{2}{R_0}\right\|_{W_2^{1/2+\ell}(\Gamma)}$, где $R_0=(3|\Omega|)^{1/3}(4\pi)^{-1/3}$ – радиус шара с объемом $|\Omega|$. В этом случае решение удовлетворяет неравенству

$$\|\vec{u}\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q_{T_1})}+\|q-q_0\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q_{T_1})}+\|q-q_0\|_{W_2^{1/2+\ell,1/4+\ell/2}(G_{T_1})}+$$

$$+\|\nabla q\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q_{T_1})}\leqslant C\Big(\|\vec{v}_0\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega)}+|f|_{T_1}+\Big\|H(\xi,0)+\frac{2}{R_0}\Big\|_{W_2^{1/2+\ell}(\Gamma)}\Big), \qquad (2.4)$$

где $q_0=\dfrac{2\sigma}{R_0}$.

Предположим теперь, что область Ω диффеоморфна шару, и будем задавать Γ уравнением

$$|x| = r = R(\omega), \qquad \omega\in S_1, \qquad (2.5)$$

где S_1 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Γ задается уравнением (2.5), и начало координат совпадает с центром тяжести Ω. Существует такая постоянная $\delta\in(0,1/2)$, что если

$$\sup_{S_1}|R(\omega)-R_0|+\sup_{S_1}|\nabla R(\omega)|\leqslant \delta R_0, \qquad (2.6)$$

где $|\nabla R|^2=R_\theta^2+\dfrac{1}{\sin^2\theta}R_\varphi^2$ в сферических координатах, то

$$\int_{S_1}\big((R(\omega)-R_0)^2+|\nabla R|^2\big)\,d\omega\leqslant c_1(|\Gamma|-4\pi R_0^2), \qquad (2.7)$$

где $|\Gamma|$ – площадь поверхности Γ, а c_1 – постоянная, не зависящая от δ и R_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем исходить из формулы

$$|\Gamma|-4\pi R_0^2=\int_{S_1}\big(R\sqrt{R^2+|\nabla R|^2}-R_0^2\big)\,d\omega.$$

Представим подинтегральное выражение в виде суммы Тэйлора для функции $R\sqrt{R^2+|\nabla R|^2}$, содержащей линейные и квадратичные члены, и остаточного члена:

$$-R_0^2+R\sqrt{R^2+|\nabla R|^2}=2R_0(R-R_0)+\frac{1}{2}\big[2(R-R_0)^2+|\nabla R|^2\big]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1(1-s)^2\frac{d^3}{ds^3}\Big[(R_0+s(R-R_0))\sqrt{(R_0+s(R-R_0))^2+s^2|\nabla R|^2}\Big]\,ds. \qquad (2.8)$$

Равенство $|\Omega|=\frac{4}{3}\pi R_0^3$ и условие того, что начало координат помещено в центр тяжести Ω, могут быть записаны в виде

$$\int_{S_1}(R^3-R_0^3)\,d\omega=0, \qquad \int_{S_1}(R^4-R_0^4)\,\vec{\nu}(\omega)\,d\omega=0,$$

где $\vec{\nu}=(\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta)$, или, что то же самое,

$$R_0^2\int_{S_1}(R-R_0)\,d\omega=-R_0\int_{S_1}(R-R_0)^2 d\omega-\frac{1}{3}\int_{S_1}(R-R_0)^3 d\omega\ , \tag{2.9}$$

$$R_0^3\int_{S_1}(R-R_0)\vec{\nu}\,d\omega=-\frac{3R_0^2}{2}\int_{S_1}(R-R_0)^2\vec{\nu}\,d\omega-$$
$$-R_0\int_{S_1}(R-R_0)^3\vec{\nu}\,d\omega-\frac{1}{4}\int_{S_1}(R-R_0)^4\vec{\nu}\,d\omega\ . \tag{2.10}$$

Поэтому после интегрирования (2.8) получаем

$$|\Gamma|-4\pi R_0^2=-\int_{S_1}(R-R_0)^2 d\omega+\frac{1}{2}\int_{S_1}|\nabla R|^2 d\omega-$$
$$-\frac{2}{3R_0}\int_{S_1}(R-R_0)^3 d\omega+I\ , \tag{2.11}$$

где I – интеграл от остаточного члена.

Для оценки $\int_{S_1}(R-R_0)^2 d\omega$ воспользуемся формулой

$$n(n+1)=\inf\Big(\int_{S_1}|f|^2 d\omega\Big)^{-1}\int_{S_1}|\nabla f|^2 d\omega\ ,$$

в которой $\inf$ берется по всем $f\in W_2^1(S_1)$, ортогональным в $L_2(S_1)$ всем сферическим функциям порядка $m<n$. Функция

$$f(\omega)=a+\vec{b}\cdot\vec{\nu}+R-R_0\ ,$$

где $a=-\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}(R-R_0)\,d\omega$, $\vec{b}=-\frac{3}{4\pi}\int_{S_1}(R-R_0)\vec{\nu}\,d\omega$,

ортогональна сферическим функциям $Y_0=const$ и $Y_1=\vec{c}\cdot\vec{\nu}$.

Поэтому $$\int_{S_1}|f(\omega)|^2 d\omega\leqslant\frac{1}{6}\int_{S_1}|\nabla f|^2 d\omega\ ,$$

а значит

$$\|R-R_0\|^2_{L_2(S_1)}=\|f\|^2_{L_2(S_1)}+4\pi|a|^2+\|\vec{b}\cdot\vec{\nu}\|^2_{L_2(S_1)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{6}\|\nabla f\|^2_{L_2(S_1)}+4\pi(|a|^2+|\vec{b}|^2)\leqslant\Big(\frac{1}{6}+\varepsilon\Big)\|\nabla R\|^2_{L_2(S_1)}+ \tag{2.12}$$
$$+4\pi(|a|^2+|b|^2)+\frac{|\vec{b}|^2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{3}\|\nabla\nu_i\|^2_{L_2(S_1)}\ ,$$

$\forall \varepsilon > 0$. Числа a и b_i оцениваются с помощью (2.9) и (2.10):

$$|a| \leq \frac{1}{4\pi}\left(\delta + \frac{\delta^2}{3}\right) \int_{S_1} |R - R_0|\, d\omega \leq \frac{7\delta}{6\sqrt{4\pi}} \|R - R_0\|_{L_2(S_1)} ,$$

(2.13)

$$|\vec{b}| \leq \frac{3}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\delta + \delta^2 + \frac{1}{4}\delta^3\right) \int_{S_1} |R - R_0|\, d\omega \leq \frac{3}{\sqrt{4\pi}}\, \frac{33}{16}\, \delta \|R - R_0\|_{L_2(S_1)} .$$

Рассмотрим еще последние два члена в (2.11). Имеем:

$$\frac{2}{3R_0} \int_{S_1} |R - R_0|^3 d\omega \leq \frac{2\delta}{3} \|R - R_0\|^2_{L_2(S_1)} ,$$

$$|I| \leq c_2 \int_{S_1} d\omega \int_0^1 (1-s)^2 \frac{|R - R_0|^3 + |\nabla R|^3}{\sqrt{(R_0 + s(R - R_0))^2 + s^2|\nabla R|^2}}\, ds \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}\, c_2}{3}\, \delta \left(\|R - R_0\|^2_{L_2(S_1)} + \|\nabla R\|^2_{L_2(S_1)} \right) .$$

Таким образом, из (2.11) следует

$$|\Gamma| - 4\pi R_0^2 \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} c_2 \delta\right) \|\nabla R\|^2_{L_2(S_1)} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} c_2 \delta + \frac{2\delta}{3}\right) \|R - R_0\|^2_{L_2(S_1)} .$$

Оценив $\|R - R_0\|^2$ с помощью неравенств (2.12) и (2.13) с достаточно малыми ε и δ , получим (2.7). Теорема доказана.

Для областей в $\mathbb{R}^2$ оценка 2.7 доказана в [7], причем без ограничения (2.6).

Удвоенная средняя кривизна Γ определяется выражением

$$\mathcal{H}[R] = \frac{1}{R \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{R_\varphi}{\sin\theta\sqrt{R^2 + |\nabla R|^2}} + \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\sin\theta\, R_\theta}{\sqrt{R^2 + |\nabla R|^2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{R^2 + |\nabla R|^2}} \quad (2.14)$$

в сферических координатах. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{H}[R] + \frac{2}{R_0} = h(\omega) \quad (2.15)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $R \in W_2^{3/2+\ell}(S_1)$, $\ell \in (\frac{1}{2}, 1)$ – решение уравнения (2.15), причем R удовлетворяет неравенству (2.6) с достаточно малым δ . Если $h \in W_2^{\mu}(S_1)$, $\mu \in (0,1)$, то

$$\|R-R_0\|_{W_2^{2+\mu}(S_1)} \leq c_1\|h\|_{W_2^{\mu}(S_1)} + c_2\|R-R_0\|_{L_2(S_1)} \tag{2.16}$$

Если же $h\in W_2^{1+\mu_1}(S_1)$, $\mu_1\in(0,1)$, то

$$\|R-R_0\|_{W_2^{3+\mu_1}(S_1)} \leq c_3\|h\|_{W_2^{1+\mu_1}(S_1)} + c_4\|R-R_0\|_{L_2(S_1)} \tag{2.17}$$

Постоянные c_2, c_4 могут зависеть от $\|R\|_{W_2^{l+3/2}(S_1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\|R-R_0\|^2_{W_2^{2+\mu}(S')} \leq c_5\|h\|^2_{W_2^{\mu}(S'')} + c_6\|R-R_0\|^2_{W_2^{2+\mu'}(S'')}, \tag{2.18}$$

где $\mu'<\mu$, а S' и S'' – некоторые подобласти на сфере S_1 достаточно малого диаметра, причем $\overline{S}'\subset S''$. Покроем S_1 конечным числом малых областей S'. Неравенство (2.16) получается после суммирования (2.18) по всем S' и применения интерполяционного неравенства

$$\|R-R_0\|_{W_2^{2+\mu'}(S_1)} \leq \varepsilon^{\mu-\mu'}\|R-R_0\|_{W_2^{2+\mu}(S_1)} + c_7\varepsilon^{-2-\mu'}\|R-R\|_{L_2(S_1)}$$

с достаточно малым ε .

Воспользовавшись формулой $\dfrac{1}{R_0}-\dfrac{1}{\sqrt{R^2+|\nabla R|^2}}=\dfrac{(R-R_0)(R+R_0)+|\nabla R|^2}{R_0\sqrt{R^2+|\nabla R|^2}\,(R_0+\sqrt{R^2+|\nabla R|^2})}$, можно записать уравнение (2.15) в недивергентной форме

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} A_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi_\alpha\,\partial\varphi_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{2}A_\alpha\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_\alpha}+A\rho=h, \tag{2.19}$$

где $\rho=R-R_0$, $\varphi_1=\varphi$, $\varphi_2=\theta$, а $A_{\alpha\beta}$, A_α, $A\in W_2^{1/2+l}(S_1)$ (эти коэффициенты не зависят от $\partial^2 R/\partial\varphi_\alpha\partial\varphi_\beta$). Сферические координаты выберем так, чтобы $\sin\theta\geq k>0$ на S''.

Рассмотрим один из членов, который приходится оценивать при доказательстве (2.18), а именно, $h_{\alpha\beta}=(A_{\alpha\beta}(\varphi)-A_{\alpha\beta}(\varphi^0))\dfrac{\partial^2\overline{\rho}}{\partial\varphi_\alpha\,\partial\varphi_\beta}$.

Здесь $\varphi^0\in S'$, $\overline{\rho}=\rho\zeta(\varphi)$, $\zeta=1$ на S', и $\zeta=0$ на $S_1\setminus S''$ и $0\leq\zeta\leq 1$. Считая, что $A_{\alpha\beta}$ продолжены на все $\mathbb{R}^2$ $(-\infty<\varphi_1<\infty,\ -\infty<\varphi_2<\infty)$, с сохранением класса и так, что $\max\limits_{\varphi\in\mathbb{R}^2}|A_{\alpha\beta}(\varphi)-A_{\alpha\beta}(\varphi^0)|\leq 2\max\limits_{S''}|A_{\alpha\beta}(\varphi)-A_{\alpha\beta}(\varphi^0)|$, докажем неравенство

$$\|h_{\alpha\beta}\|_{W_2^{\mu}(\mathbb{R}^2)}\leq \max|A_{\alpha\beta}(\varphi)-A_{\alpha\beta}(\varphi^0)|\left\|\frac{\partial^2\overline{\rho}}{\partial\varphi_\alpha\,\partial\varphi_\beta}\right\|_{W_2^{\mu}(\mathbb{R}^2)}+$$

$$+\left\| A_{\alpha\beta} \right\|_{W_2^{1/2+\ell}(\mathbb{R}^2)} \left\| \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right\|_{W_2^{\mu'}(\mathbb{R}^2)}, \quad \mu' < \mu .$$

Достаточно оценить главную часть нормы в левой части. Положим $\Delta(\psi) h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(\varphi+\psi) - h_{\alpha\beta}(\varphi)$. Легко видеть, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\| \Delta(\psi) h_{\alpha\beta} \right\|^2 \frac{d\psi}{|\psi|^{2+2\mu}} \right)^{1/2} \leqslant \max \left| A_{\alpha\beta}(\varphi) - A_{\alpha\beta}(\varphi^0) \right| \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\| \Delta(\psi) \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right\|^2 \frac{d\psi}{|\psi|^{2+2\mu}} \right)^{1/2} +$$

$$+ \left\| \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right\|_{L_{2p'}(\mathbb{R}^2)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\| \Delta(\psi) A_{\alpha\beta} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^{2/p} \left\| \Delta(\psi) A_{\alpha\beta} \right\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}^{2/p'} \frac{d\psi}{|\psi|^{2+2\mu}} \right)^{1/2}, \tag{2.20}$$

$p > \frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$. Так как $\mu > \frac{1}{p}$, то $\left\| \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right\|_{L_{2p'}(\mathbb{R}^2)} \leqslant$ $\leqslant C_8 \left\| \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right\|_{W_2^{\mu'}(\mathbb{R}^2)}$, $\mu' = \mu - \frac{1}{p}$, а последний интеграл в (2.20) оценивается через

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\| \Delta(\psi) A_{\alpha\beta} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \frac{d\psi}{|\psi|^{2+2\nu}} \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\| \Delta(\psi) A_{\alpha\beta} \right\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}^2 \frac{d\psi}{|\psi|^{1+2\ell}} \right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \left\| A_{\alpha\beta} \right\|_{W_2^{\ell+1/2}(\mathbb{R}^2)},$$

где $\nu \in (0,1)$, $\nu/p + \ell - 1/2/p' = \mu$. Таким образом, (2.18) доказано, и аналогично оцениваются другие члены левой части (2.19) (их вклад сводится к $C_{10} \| \rho \|_{W_2^{2+\mu'}}$).

При доказательстве (2.17) можно уже считать, что $R \in W_2^{2+\mu}(S_1)$, $\forall \mu \in (0,1)$, $A_{\alpha\beta}$, A_α, $A \in W_2^{1+\mu}(S_1)$. Продифференцируем (2.19). При этом $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial\varphi_\gamma} = \left(A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}(\varphi)^0 \right) \frac{\partial^3 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta \partial\varphi_\gamma} +$ $+ \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial\varphi_\gamma} \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta}$. Первый член оценивается, как $h_{\alpha\beta}$, а для второго имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\| \Delta(\psi) \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial\varphi_\gamma} \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \frac{d\psi}{|\psi|^{2+2\mu_1}} \right)^{1/2} \leqslant \max \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right| \left\| A_{\alpha\beta} \right\|_{W_2^{1+\mu_1}(\mathbb{R}^2)} +$$

$$+ C_{11} \left\| \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial\varphi_\gamma} \right\|_{L_{2q'}(\mathbb{R}^2)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\| \Delta(\psi) \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}^2 \frac{d\psi}{|\psi|^{2+2\mu_1'}} \right)^{1/q'} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left\| \Delta(\psi) \frac{\partial^2 \bar\rho}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \frac{d\psi}{|\psi|^{2+2\nu_1}} \right)^{1/q}$$

Здесь $q>1$, $0<\mu_1'<\mu_1$, $\nu_1\in(0,1)$ и $\frac{\mu_1'}{q'}+\frac{\nu_1}{q}=\mu_1$. Правая часть оценивается через $c_{12}\|A_{\alpha\beta}\|_{W_2^{1+\mu}(\mathbb{R}^2)}\|\rho\|_{W_2^{3+\mu_1'}(\mathbb{R}^2)}$, где $\mu=\max\left(\frac{1}{q},\mu_1\right)$. Другие члены в (2.19) оцениваются аналогично, и мы приходим к (2.17).

Оценки (2.16), (2.17) были установлены как априорные. Что касается конечности оцениваемых норм, то она устанавливается так, как обычно в теоремах о регулярности решений линейных эллиптических уравнений.

§ 3. Разрешимость задачи (1.1) с $\vec{f}=0$ при всех $t>0$

Начнем в вывода законов сохранения для задачи (2.1).

ТЕОРЕМА 5. Если $\vec{f}=0$, то для решения задачи (1.1) справедливы соотношения

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\vec{v}\cdot\vec{\eta}\,dx=0, \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{\Omega_t}|\vec{v}|^2dx+\sigma|\Gamma_t|\Big)+\nu E(\vec{v})=0, \tag{3.2}$$

где $E(\vec{v})=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2dx$, а $\vec{\eta}=\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}$, $\vec{a},\vec{b}$ - - произвольные постоянные векторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя под знаком интеграла к лагранжевым координатам, получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\vec{v}(x,t)\cdot\vec{\eta}(x)\,dx=\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\vec{v}(X_u(\xi,t),t)\cdot\vec{\eta}(X_u)\,d\xi=$$

$$=\int_{\Omega_t}\Big[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\vec{\eta}+\sum_{k=1}^{3}\Big(\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t}\cdot\vec{\eta}+\vec{v}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial\vec{\eta}}{\partial x_k}\Big)\Big]dx= \tag{3.3}$$

$$=\int_{\Omega_t}(\vec{v}_t+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v})\cdot\vec{\eta}\,dx,$$

поскольку $\frac{\partial x_k}{\partial t}=v_k$ и $\sum_{i,k=1}^{3}v_iv_k\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}v_iv_k\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\right)=0.$

Так как $v_{i_t}+(\vec{v}\cdot\nabla)v_i=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$, то правая часть (3.3) равна $-\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\Omega_t}T_{ik}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}dx+\sigma\int_{\Gamma_t}\Delta(t)\vec{x}\cdot\vec{\eta}\,dS=-\sigma\sum_{i=1}^{3}\int_{\Gamma_t}\langle\nabla_{\Gamma_t}x_i\cdot\nabla_{\Gamma_t}\eta_i\rangle\,dS$,

где ∇_{Γ_t} – градиент на Γ_t, а $\langle\nabla_{\Gamma_t}x_i\cdot\nabla_{\Gamma_t}\eta_i\rangle=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial x_i}{\partial s_\alpha}\frac{\partial\eta_i}{\partial s_\beta}$ в локальных координатах. Если $\vec{\eta}=\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}$, то

$$\sum_{i=1}^{3}\langle\nabla_{\Gamma_t}x_i\cdot\nabla_{\Gamma_t}\eta_i\rangle=\sum_{i=1}^{3}b_i\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x_k}{\partial s_\alpha}\frac{\partial x_j}{\partial s_\beta}-\frac{\partial x_k}{\partial s_\beta}\frac{\partial x_j}{\partial s_\alpha}\right)=0.$$

$(i,j,k$ – круговая перестановка индексов I,2,3). Тем самым (3.I) доказано. Далее,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}|\vec{v}_t|^2dx=2\int_{\Omega_t}(\vec{v}_t+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v})\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}dx=-\sigma\sum_{i=1}^{3}\int_{\Gamma_t}\langle\nabla_{\Gamma_t}x_i\cdot\nabla_{\Gamma_t}v_i\rangle ds-\nu E(\vec{v}),$$

что совпадает с (3.2), поскольку последний интеграл равен $\frac{d|\Gamma_t|}{dt}$: если $\Gamma_t=\{\vec{x}=\vec{x}(s_1,s_2)\quad,(s_1,s_2)\in U\subset\mathbb{R}^2\}$, то

$$\frac{d|\Gamma_t|}{dt}=\int_U\frac{d}{dt}\sqrt{g}\,ds_1ds_2=\frac{1}{2}\int_U\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial t}\sqrt{g}\,ds_1ds_2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_t}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x_i}{\partial s_\alpha}\frac{\partial v_i}{\partial s_\beta}+\frac{\partial x_i}{\partial s_\beta}\frac{\partial v_i}{\partial s_\alpha}\right)dS=\sum_{i=1}^{3}\int_{\Gamma_t}\langle\nabla_{\Gamma_t}x_i\cdot\nabla_{\Gamma_t}v_i\rangle dS.$$

Теорема доказана.

Интегрируя (3.I) и (3.2), получаем

$$\int_{\Omega_t}\vec{v}\cdot\vec{\eta}\,dx=\int_{\Omega}\vec{v}_0\cdot\vec{\eta}\,dx\,, \tag{3.4}$$

$$\int_{\Omega_t}|\vec{v}|^2dx+\sigma(|\Gamma_t|-4\pi R_0^2)+\nu\int_0^t E(\vec{v})\,d\tau=$$

$$=\int_{\Omega}|\vec{v}_0|^2dx+\sigma(|\Gamma|-4\pi R_0^2)\,. \tag{3.5}$$

С помощью преобразования $\vec{x}'=\vec{x}-\vec{V}t$, $\vec{v}'=\vec{v}-\vec{V}$, где $\vec{V}=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\vec{v}_0\,dx$, можно добиться того, что $\int_\Omega\vec{v}_0{}'dx=0$, а тогда $\int_{\Omega_t}\vec{x}\,dx=\int_\Omega\vec{\xi}\,d\xi$, ($\Omega_t$ имеют общий центр тяжести). Будем считать, что этой точкой является начало координат ; тогда $\int_{\Omega_t}\vec{x}\,dx=0$.

Из (3.5) и теоремы 3 следует, что при условии (2.6),

$$\int_{\Omega_t}|\vec{v}|^2dx+\frac{\sigma}{c_1}\|R-R_0\|^2_{W_2^1(S_1)}+\nu\int_0^t E(\vec{v})\,d\tau\leq\int_\Omega|\vec{v}_0|^2dx+\sigma(|\Gamma|-4\pi R_0^2).$$

Переходим к оценкам решения при $t\geq t_0>0$. Предположим, что Γ_t задается уравнением $|x|=R(\omega,t)$, $\omega\in S_1$, начало координат совпадает с центром тяжести Ω_t , $t\geq0$,

$R_0=\left(\frac{3|\Omega|}{4\pi}\right)^{1/3}=\left(\frac{3|\Omega_t|}{4\pi}\right)^{1/3}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\vec{u}\in W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q_{T_1})$, $\nabla q\in W_2^{\ell,\ell/2}(Q_{T_1})$ – решение задачи (I.3) с $\vec{f}=0$, удовлетворяющее условию (2.3) с достаточно малым $\delta>0$. Кроме того, пусть $R(\omega,t)$ удовлетворяет условию (2.6). Тогда

$$\|\vec{u}\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q(\lambda))}+\|q-q_0\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q(\lambda))}+\|\nabla q\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q(\lambda))}+ \tag{3.6}$$

$$+\|q-q_0\|_{W_2^{1/2+\ell,1/4+\ell/2}(G(\lambda))}\le c_1\lambda^{-s}\left(\|\vec{u}\|_{L_2(Q(0))}+\|R-R_0\|_{L_2(S_1\times(t_0,T_1))}\right),$$

где $\lambda\in(0,1)$, $t_0+\lambda<T_1$, $Q(\lambda)=\Omega\times(t_0+\lambda,T_1)$, $G(\lambda)=\Gamma\times(t_0+\lambda,T_1)$, $t_0>0$, $q_0=\frac{2\sigma}{R_0}$, $s>0$, и при $t_1>t_0$

$$\sup_{t_1<t<T_1}\|\vec{u}\|_{W_2^{2+\ell}(\Omega)}+\sup_{t_1<t<T_1}\|q-q_0\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega)}\le \tag{3.7}$$

$$\le c_2\left(\|\vec{u}\|_{L_2(Q(0))}+\|R-R_0\|_{L_2(S_1\times(t_0,T_1))}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство (3.6).

Пусть $\zeta_\lambda(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t\ge t_0+\lambda$, нулю при $t\le t_0+\frac{\lambda}{2}$ и такая, что $0\le\zeta_\lambda\le 1$, $|\zeta_\lambda'(t)|\le c_3\lambda^{-1}$. Легко видеть, что $\vec{u}_\lambda=\vec{u}\zeta_\lambda$ и $q_\lambda=(q-q_0)\zeta_\lambda$ являются решением задачи

$$\begin{gathered}\vec{u}_{\lambda_t}-\nu\nabla_u^2\vec{u}_\lambda+\nabla_u q_\lambda=\vec{u}\zeta_\lambda', \qquad \nabla_u\cdot\vec{u}_\lambda=0,\\ \vec{u}_\lambda\big|_{t=0}=0,\\ \Pi_0\Pi S_u(\vec{u}_\lambda)\vec{n}\big|_{\xi\in\Gamma}=0,\\ \vec{n}_0\cdot T_u(\vec{u}_\lambda,q_\lambda)\vec{n}-\sigma\vec{n}_0\cdot\int_0^t\Delta(\tau)\vec{u}_\lambda d\tau\Big|_{\xi\in\Gamma}=\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$=\int_0^t(\zeta_\lambda'(\tau)\vec{n}_0\cdot T_u(\vec{u},q-q_0)\vec{n}+\sigma\vec{n}_0\cdot\dot{\Delta}(\tau)X_u)d\tau+$$

$$+q_0\int_0^t\zeta_\lambda(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{n}_0\cdot\vec{n})\,d\tau\Big|_{\xi\in\Gamma}\equiv\sigma\int_0^t B(\xi,\tau)d\tau,$$

где через $\dot{\Delta}(t)$ обозначен оператор, получаемый из $\Delta(t)$ дифференцированием коэффициентов по t. Последнее соотношение получается после интегрирования по частям из

$$\zeta_\lambda\left[\vec{n}_0\cdot T_u(\vec{u},q-q_0)\vec{n}-6\vec{n}_0\cdot\Delta(t)X_u\right]-\int_0^t\zeta_\lambda'(\tau)\left[\vec{n}_0\cdot T_u(\vec{u},q-\right.$$
$$\left.-q_0)\vec{n}-6\vec{n}_0\cdot\Delta(\tau)X_u\right]d\tau=q_0\left[\zeta_\lambda(\vec{n}_0\cdot\vec{n})-\int_0^t\zeta_\lambda'(\tau)(\vec{n}_0\cdot\vec{n})d\tau\right].$$

Оценим норму $\|B\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_{T_1})}$ выражения

$$B(\xi,t)=\frac{1}{6}\zeta_\lambda'(t)\vec{n}_0\cdot T_u(\vec{u},q-q_0)\vec{n}+\zeta_\lambda(t)\vec{n}_0\cdot\dot{\Delta}(t)\vec{\xi}+$$
$$+\zeta_\lambda(t)\vec{n}_0\cdot\dot{\Delta}(t)\int_0^t\vec{u}\,d\tau+\frac{q_0}{6}\zeta_\lambda(t)\frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}_0\cdot\vec{n})\equiv$$
$$\equiv B_1+B_2+B_3+B_4.$$

Имеем

$$\|B_1\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_{T_1})}\leq C_3\left[\lambda^{-1}\|D_x\vec{u}\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}+\right.$$
$$+\lambda^{-1}\|q-q_0\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}+\lambda^{-3/4-l/2}\left(\|D_x\vec{u}\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}+\right.$$
$$\left.\left.+\|q-q_0\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}\right)\right],\tag{3.9}$$

где $D_x\vec{u}=\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right\}_{i,k=1,2,3}$.

Для оценки B_2 и B_3 рассмотрим оператор $\dot{\Delta}(t)$ в окрестности произвольной точки $\xi_0\in\Gamma$. Пусть $\{s_1,s_2,s_3\}$ — местные координаты с началом в ξ_0, ось S_3 направлена вдоль $\vec{n}_0(\xi_0)$ а оси S_1 и S_2 образуют координатную систему в касательной плоскости. Предположим, что Γ задается вблизи ξ_0 уравнением

$$s_3=\varphi(s_1,s_2)\in W_2^{5/2+l}(K),\qquad K=\{s_1^2+s_2^2\leq d^2\}$$

(обозначим эту часть Γ через Γ'). Тогда соответствующее подмножество $\Gamma_t'=X_u\Gamma'$ будет определяться уравнениями

$$z_\gamma=s_\gamma+\int_0^t\hat{u}_\gamma(s_1,s_2,\varphi(s_1,s_2),\tau)d\tau,\qquad \gamma=1,2,$$
$$z_3=\varphi(s_1,s_2)+\int_0^t\hat{u}_3(s_1,s_2,\varphi(s_1,s_2),\tau)\,d\tau,$$

где $\hat{u}_i$ — проекции вектора $\vec{u}$ на оси S_i, и

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial z_i}{\partial s_\alpha}\frac{\partial z_i}{\partial s_\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\varphi_\alpha\varphi_\beta+\varphi_\alpha U_{3\beta}+\varphi_\beta U_{3\alpha}+$$
$$+U_{\alpha\beta}+U_{\beta\alpha}+\sum_{i=1}^{3}U_{i\alpha}U_{i\beta},$$

где $U_{i\alpha}=\int_0^t\left(\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial s_\alpha}+\varphi_\alpha\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial s_3}\right)d\tau$, $\varphi_\alpha=\frac{\partial\varphi}{\partial s_\alpha}$. Из (I.2) вытекает, что

$$\dot{\Delta}(t)=-\frac{g_t}{2g}\Delta(t)+\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\tilde{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial s_\beta},$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\hat{g}_{\alpha\beta}}{\sqrt{g}},\quad \hat{g}_{11}=g_{22},\quad \hat{g}_{22}=g_{21},\quad \hat{g}_{12}=\hat{g}_{21}=-g_{21}.$$

В координатах $\{s_i\}$ $\vec{n}_0=\left(-\frac{\varphi_1}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}},-\frac{\varphi_2}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}},\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}\right)$, поэтому

$$\vec{n}_0\cdot\dot{\Delta}(t)\vec{\xi}=\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}\left(\dot{\Delta}(t)\varphi(s_1,s_2)-\sum_{\gamma=1}^{2}\varphi_\gamma\dot{\Delta}(t)s_\gamma\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{g}\sqrt{1+(\nabla\varphi)^2}}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(-\frac{g_t}{2g^{3/2}}\hat{g}_{\alpha\beta}+\tilde{g}_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_\alpha\partial s_\beta}.$$

Так как $\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_\alpha\partial s_\beta}\in W_2^{\ell+1/2}(K)$, а $-\frac{g_t}{2g^{3/2}}\hat{g}_{\alpha\beta}+\tilde{g}_{\alpha\beta}=-\frac{g_t\,\hat{g}_{\alpha\beta}}{g^{3/2}}+\frac{(\hat{g}_{\alpha\beta})_t}{g^{1/2}}=h_{\alpha\beta}$ является линейной комбинацией членов, содержащих множители $\partial u_i/\partial s_\gamma$, то

$$\|\vec{n}_0\cdot\dot{\Delta}(t)\vec{\xi}\|_{W_2^{\ell-1/2}(K)}\leq C_4\|D\vec{u}\|_{W_2^{\ell-1/2}(K)},$$

а следовательно,

$$\|B_2\|_{W_2^{\ell-1/2,\ell/2-1/4}(G_{T_1})}\leq C_5\left(\|D\vec{u}\|_{W_2^{\ell-1/2,\ell/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}+\right. \tag{3.10}$$
$$\left.+\lambda^{1/4-\ell/2}\|D\vec{u}\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}\right).$$

Аналогичным образом из формулы

$$\dot{\Delta}(t)\int_0^t\vec{u}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}h_{\alpha\beta}\int_0^t\frac{\partial^2\vec{u}(s_1,s_2,\varphi(s_1,s_2),\tau)}{\partial s_\alpha\partial s_\beta}d\tau+\right.$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(-\frac{g_t}{2g}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\frac{\hat g_{\alpha\beta}}{\sqrt g}+\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\hat g_{\alpha\beta}}{\sqrt g}\right)\int_0^t\frac{\partial\vec u(s_1,s_2,\varphi(s_1,s_2),\tau)}{\partial s_\beta}d\tau\Big),$$

учитывая (2.3), можно вывести оценку

$$\|B_3\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_{T_1})}\leqslant C_6\,\delta\,\big(\|\vec u_\lambda\|_{W_2^{l+2,l/2+1}(Q_{T_1})}+$$
$$+\lambda^{-l/2+1/4}\big(\|D^2\vec u\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}+\|D\vec u\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}\big)\big). \tag{3.II}$$

Наконец, оценивая $\frac{\partial A}{\partial t}$, получим

$$\|B_4\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_{T_1})}\leqslant C_7\big(\|D_x\vec u\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}+$$
$$+\lambda^{-l/2+1/4}\|D\vec u\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}\big). \tag{3.I2}$$

Из оценок (3.9)-(3.I2) и из теоремы I, примененненной к задаче (3.8), следует (при достаточно малом δ):

$$\|\vec u_\lambda\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(Q_{T_1})}+\|\nabla q_\lambda\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{T_1})}+\|q_\lambda\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{T_1})}+$$
$$+\|q_\lambda\|_{W_2^{1/2+l,1/4+l/2}(G_{T_1})}\leqslant C_8\big(\lambda^{-1}\|\vec u\|_{W_2^{l,l/2}(Q(\frac{\lambda}{2}))}+\lambda^{-3/4-l/2}\|\vec u\|_{L_2(Q(\frac{\lambda}{2}))}+$$
$$+\lambda^{-1}\|D_x\vec u\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}+\lambda^{-3/4-l/2}\|D_x\vec u\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}+$$
$$+\lambda^{-l/2+1/4}\|D_x^2\vec u\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}+\lambda^{-1}\|q-q_0\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}+$$
$$+\lambda^{-3/4-l/2}\|q-q_0\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}\big). \tag{3.I3}$$

Для оценки норм $\vec u$ в правой части воспользуемся интерполяционными неравенствами

$$\|D_x\vec u\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}\leqslant \varkappa_1^{l-1/2}\|D^2\vec u\|_{W_2^{l,0}(Q(\frac{\lambda}{2}))}+C_9\,\varkappa_1^{-5/2}\|\vec u\|_{L_2(Q(\frac{\lambda}{2}))},$$

$$\|D_x\vec{u}\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}\leqslant \varkappa_2^{\ell+\frac12}\|D_x^2\vec{u}\|_{W_2^{\ell,0}(Q(\frac{\lambda}{2}))}+C_{10}\varkappa_2^{-\frac32}\|\vec{u}\|_{L_2(Q(\frac{\lambda}{2}))},\tag{3.14}$$

$$\|D_x\vec{u}\|_{W_2^{\ell-1/2,\ell/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}\leqslant\varkappa_3\|\vec{u}\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q(\frac{\lambda}{2}))}+C_{11}\varkappa_3^{-1-\ell}\|\vec{u}\|_{L_2(Q(\frac{\lambda}{2}))},$$

$$\|\vec{u}\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q(\frac{\lambda}{2}))}\leqslant\varkappa_4^2\|\vec{u}\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q(\frac{\lambda}{2}))}+C_{12}\varkappa_4^{-\ell}\|\vec{u}\|_{L_2(Q(\frac{\lambda}{2}))},$$

$$\|q-q_0\|_{W_2^{\ell-1/2,\ell/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}\leqslant\varkappa_5\|q-q_0\|_{W_2^{\ell+1/2,\ell/2+1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}+C_{13}\varkappa_5^{-\ell-1/2}\|q-q_0\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}$$

справедливыми при произвольно малых $\varkappa_i>0$.

Так как, в силу краевых условий, $\vec{n}\cdot T(\vec{u},q-q_0)\vec{n}=\sigma(H+\frac{2}{R_0})$, то

$$\|q-q_0\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}\leqslant C_{14}\|D\vec{u}\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}+\sigma\left\|H+\frac{2}{R_0}\right\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}.\tag{3.15}$$

Выразим H через $R(\omega,t)$, как указано в § 2. Очевидно, $R(\omega,t)=$ $=|X_u(\xi,t)|$, $\omega=X_u(\xi,t)|X_u(\xi,t)|^{-1}$, и

$$\begin{aligned}&|R-R_0|\leqslant|R(\omega,0)-R_0|+|R(\omega,t)-R(\omega,0)|\leqslant C_{15}\delta,\\&|\nabla R(\omega,t)|\leqslant C_{16}\Big(|\nabla R(\omega,0)|+\int_0^t\sup_\Gamma|D\vec{u}|\,d\tau\Big)\leqslant C_{17}\delta.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Поэтому

$$\left\|H+\frac{2}{R_0}\right\|_{L_2(\Gamma)}\leqslant C_{18}\left\|\mathcal{H}[R(\omega,t)]+\frac{2}{R_0}\right\|_{L_2(S_1)}\leqslant C_{19}\|R-R_0\|_{W_2^2(S_1)}\leqslant$$

$$\leqslant\varkappa_6^{\ell-1/2}\cdot\|R-R_0\|_{W_2^{3/2+\ell}(S_1)}+C_{20}\varkappa_6^{-2}\|R-R_0\|_{L_2(S_1)},$$

и в силу (2.16)

$$\begin{aligned}\left\|H+\frac{2}{R_0}\right\|_{L_2(G(\frac{\lambda}{2}))}&\leqslant C_{21}\varkappa_6^{\ell-1/2}\Big(\|q-q_0\|_{W_2^{\ell-1/2,0}(G(\frac{\lambda}{2}))}+\\&+\|D\vec{u}\|_{W_2^{\ell-1/2,\ell/2-1/4}(G(\frac{\lambda}{2}))}\Big)+C_{22}\varkappa_6^{-2}\|R-R_0\|_{L_2(S_1\times(t_0,T_1))}\end{aligned}\tag{3.16'}$$

Пользуясь для оценки правой части (3.13) неравенствами (3.14)-(3.16') с подходящими $\varkappa_i$, можно показать, что

$$U(\lambda)\leqslant\varepsilon U\left(\frac{\lambda}{2}\right)+C(\varepsilon)\lambda^{-s}\left(\|\vec{u}\|_{L_2(Q(0))}+\|R-R_0\|_{L_2(S_1\times(t_0,T_1))}\right),$$

где $s=\left(\frac{3}{2}+\ell\right)\frac{2+\ell}{1+\ell}$, $\varepsilon<2^{-s}$, $\mathcal{U}(\lambda)=\|\vec{u}\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q(\lambda))}+$

$+\|q-q_0\|_{W_2^{\ell+1/2,\ell/2+1/4}(G(\lambda))}+\|\nabla q\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q(\lambda))}+\|q-q_0\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q(\lambda))}$

и после итераций

$$\mathcal{U}(\lambda)\leqslant\frac{C(\varepsilon)\lambda^{-s}}{1-2^s\varepsilon}\left(\|\vec{u}\|_{L_2(Q(0))}+\|R-R_0\|_{L_2(S_1\times(t_0,T_1))}\right),$$

что совпадает с (3.6). Для доказательства (3.7) следует оценить разности $\vec{u}^{(s)}(\xi,t)=\vec{u}_\lambda(\xi,t)-\vec{u}_\lambda(\xi,t-s)$,
$q^{(s)}(\xi,t)=q_\lambda(\xi,t)-q_\lambda(\xi,t-s)$, взяв $s<t_0$, $\lambda=\frac{T_1+t_0}{2}$.
Положим $\vec{u}'(\xi,t)=\vec{u}(\xi,t-s)$. Вычитая из (3.8) такие же соотношения для $\vec{u}_\lambda(\xi,t-s)$, $q_\lambda(\xi,t-s)$, получим

$$\vec{u}_t^{(s)}-\nu\nabla_u^2\vec{u}^{(s)}+\nabla_u q^{(s)}=(\nabla_{u'}-\nabla_u)q_\lambda(\xi,t-s)+$$
$$+\nu(\nabla_u^2-\nabla_{u'}^2)\vec{u}_\lambda(\xi,t-s)+(\vec{u}-\vec{u}')\zeta_\lambda'(t)+\vec{u}'(\zeta_\lambda'(t)-\zeta_\lambda'(t-s)),$$
$$\nabla_u\cdot\vec{u}^{(s)}=(\nabla_{u'}-\nabla_u)\cdot\vec{u}_\lambda(\xi,t-s),$$
$$\vec{u}^{(s)}\big|_{t=0}=0,$$

$$\Pi_0\Pi S_u(\vec{u}^{(s)})\vec{n}\Big|_{\xi\in\Gamma}=\Pi_0(\Pi S_u(\vec{u}_\lambda(\xi,t-s))\vec{n}-\Pi' S_{u'}(\vec{u}_\lambda(\xi,t-s))\vec{n}')\Big|_{\xi\in\Gamma}$$
$$\vec{n}_0\cdot T_u(\vec{u}^{(s)},q^{(s)})\vec{n}-\sigma\vec{n}_0\cdot\int_0^t\Delta(\tau)\vec{u}^{(s)}d\tau\Big|_{\xi\in\Gamma}=$$
$$=\vec{n}_0\cdot\left[T_u(\vec{u}_\lambda(\xi,t-s),q_\lambda(\xi,t-s))\vec{n}-T_{u'}(\vec{u}_\lambda(\xi,t-s),q_\lambda(\xi,t-s))\vec{n}'\right]-$$
$$-\sigma\vec{n}_0\cdot\int_0^t(\Delta(\tau)-\Delta(\tau-s))\vec{u}_\lambda(\xi,\tau-s)d\tau\Big|_{\xi\in\Gamma}+$$
$$+\sigma\int_0^t\left[B(\xi,\tau)-B(\xi,\tau-s)\right]d\tau$$

Применение теоремы I и оценки выражений в правых частях написанных уравнений (которые мы опускаем) приводят к неравенству

$$\|\vec{u}^{(s)}\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q(\lambda))}+\|\nabla q^{(s)}\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q(\lambda))}+\|q^{(s)}\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q(\lambda))}+$$
$$+\|q^{(s)}\|_{W_2^{1/2+\ell,1/4+\ell/2}(G(\lambda))}\leqslant C_{23}\left(\|\vec{u}\|_{L_2(Q(0))}+\|R-R_0\|_{L_2(S_1\times(t_0,T_1))}\right)s^\beta,$$

где $\beta>\frac{1}{2}$. Из этого неравенства и из (3.6) следует (3.7).
Переходим к доказательству основного результата работы.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\vec{v}_0$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и,

$$\|\vec{v}_0\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega)} + \| R(\omega,0)-R_0\|_{W_2^{5/2+\ell}(S_1)} \leqslant \varepsilon .$$

Если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то задача (I.I) с $\vec{f}=0$ имеет решение при всех $t>0$, удовлетворяющее на интервале $(0,T_1)$ неравенству (2.4$'$); кроме того,

$$\sup_{t\geqslant t_1>0} \|R(\omega,t)-R_0\|_{W_2^{5/2+\ell}(S_1)} + \sup_{t\geqslant t_1}\|\vec{v}\|_{W_2^{2+\ell}(\Omega_t)} + \sup_{t\geqslant t_1}\|\vec{v}_t\|_{W_2^{\ell}(\Omega_t)} +$$

$$+\sup_{t\geqslant t_1}\|q-q_0\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega_t)} \leqslant c(t_1)(\|\vec{v}_0\|_{L_2(\Omega)} + |\Gamma| - 4\pi R_0^2) . \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε таково, что задача (I.3) с $\vec{f}=0$ разрешима на интервале (0,I). Решение удовлетворяет неравенствам (2.4), (3.6) и (3.7) при $\vec{f}=0$, $T_1=1$. Вследствие (3.5), правая часть (3.6) и (3.7) оценивается через $c_1(\|\vec{v}_0\|_{L_2(\Omega)} + |\Gamma| - 4\pi R_0^2) \leqslant c_2\varepsilon$, так что

$$\|\vec{v}\ (x,t)\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega_t)} \leqslant c_3\varepsilon,\quad t\in(t_0,1] . \quad (3.18)$$

Кроме того, оценки (3.16) показывают, что выполняется условие (2.6) с $\delta = c_4\varepsilon$. Если ε достаточно мало, то из соотношения

$$\vec{n}\cdot T(\vec{u},q-q_0)\vec{n} - \sigma\left(H+\frac{2}{R_0}\right)\Big|_{x\in\Gamma_t} = 0 . \quad (3.19)$$

и из (3.7),(2.17) заключаем, что

$$\| R(\omega,t)-R_0\|_{W_2^{5/2+\ell}(S_1)} \leqslant c_5\varepsilon,\quad t\in(t_0,1) \quad (3.20)$$

В частности, (3.18),(3.20) справедливы при $t=1$. Рассмотрим задачу (I.I) на промежутке $1\leqslant t\leqslant 2$ с начальными данными $\vec{v}\big|_{t=1+0} = \vec{v}(x,1)$. Введя новые лагранжевы координаты $\xi^{(1)}\in\Omega_1$, можем снова применить теорему 2, гарантирующую разрешимость задачи при $t\in(1,2)$, если ε достаточно мало. Дальше решение продолжается на интервал $t\in(2,3)$ и т.д.

Покажем, что при малом ε это рассуждение можно повторять неограниченно и что решение удовлетворяет неравенствам

$$\|\vec{u}'\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q')} + \|q'\|_{W_2^{1/2+\ell,1/4+\ell/2}(G')} + \|\nabla q'\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q')} +$$

$$+\|q'\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q')} \leqslant c_6(\|\vec{v}_0\|_{L_2(\Omega)} + |\Gamma| - 4\pi R_0^2) \leqslant c_7\varepsilon , \quad (3.21)$$

$$\|\vec{v}\|_{W_2^{2+\ell}(\Omega_t)} + \|\vec{v}_t\|_{W_2^{\ell}(\Omega_t)} + \|q-q_0\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega_t)} \leqslant \ldots \leqslant c_8\varepsilon \quad (3.22)$$

$$\|R(\omega,t)-R_0\|_{W_2^{5/2+\ell}(S_1)} \leqslant c_9(\|\vec{v}_0\|_{L_2(\Omega)} + |\Gamma| - 4\pi R_0^2) \leqslant c_{10}\varepsilon \quad (3.23)$$

при любом $t' > t_0 > 0$. Здесь $Q' = \Omega' \times (t', t'+1)$, $G' = \Gamma' \times (t', t'+1)$, $\Omega' = \Omega_{t'}$, $\Gamma' = \Gamma_{t'}$, $\vec{u}'$ и q' – векторное поле скоростей и давление, выраженные как функции лагранжевых координат (ξ',t), $\xi'\in\Omega'$, $t\geqslant t'$.

Пусть решение определено при $t\leqslant m$ и (3.22),(3.23) имеют место при $t'\leqslant m$, а (3.2I) - при $t'\leqslant m-1$. Из (3.2I) следует, что $\|\vec{v}(x,m)\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega_m)}\leqslant C_{11}\varepsilon$. Потребовав, чтобы $C_{11}\varepsilon\leqslant\delta$, мы можем снова применить теорему 2 и продолжить решение задачи (I.I), на интервал $t\in(m,m+1)$. При этом, в силу (2.4′),

$$\|\vec{u}^{(m)}(\xi^{(m)},t)\|_{W_2^{2+\ell,1+\ell/2}(Q^{(m)})}+\|q^{(m)}-q_0\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q^{(m)})}+\|\nabla q^{(m)}\|_{W_2^{\ell,\ell/2}(Q^{(m)})}$$
$$+\|q^{(m)}-q_0\|_{W_2^{1/2+\ell,1/4+\ell/2}(G^{(m)})}\leqslant C_{12}\Big(\|\vec{v}(x,m)\|_{W_2^{1+\ell}(\Omega_m)}+\|H(\xi,m)+\frac{2}{R_0}\|_{W_2^{1/2+\ell}(\Gamma_m)}\Big)$$

$\leqslant C_{13}\varepsilon$, где $Q^{(m)}_m=\Omega_m\times(m,m+1)$, $G^{(m)}=\Gamma_m\times(m,m+1)$, $\vec{u}^{(m)},q^{(m)}$ - векторное поле скоростей и давление в лагранжевых координатах $(\xi^{(m)},t)$, $\xi^{(m)}\in\Omega_m$, $t\geqslant t_m$. Точно так же, как в (3.I6), получаем

$$|R(\omega,t)-R_0|+|\nabla_\omega R(\omega,t)|\leqslant C_{14}\varepsilon,$$
$$\|R(\omega,t)-R_0\|_{W_2^{3/2+\ell}(S_1)}\leqslant C_{15}\varepsilon. \qquad (3.24)$$

Таким образом, при $C_{14}\varepsilon\leqslant\delta$ выполнено условие (2.6), а значит имеет место (3.5) для $t\leqslant m+1$. Записав (I.I) в лагранжевых координатах (ξ',t), повторив рассуждение теоремы 6 и учтя (3.5), получим неравенства (3.2I),(3.22), причем, вследствие (3.24), постоянные C_6-C_8 от t',t не зависят. Наконец, из (3.I9) и из теоремы 4 следует (3.24). Тем самым установлена разрешимость задачи (I.I) при всех $t>0$ и оценки (3.2I)-(3.23) для решения. Они влекут за собой (3.I7). Теорема доказана.

В заключение скажем несколько слов о случае $\sigma=0$. Начально-краевая задача для системы Стокса с краевыми условиями $T\vec{n}|_\Gamma=\vec{d}$ изучена в [9,I0]. Соотношения (3.4) при $\sigma=0$ остаются справедливыми, и если $\int_\Omega\vec{v}_0\cdot\vec{h}\,dx=0$ для всех $\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}$, то $\int_{\Omega_t}\vec{v}\cdot\vec{h}\,dx=0$, и по неравенству Корна $E(\vec{v})\geqslant c\int_{\Omega_t}(|D\vec{v}|^2+|\vec{v}|^2)dx$. Из (3.5) следует экспоненциальное убывание интеграла $\int_{\Omega_t}|\vec{v}|^2dx=\int_\Omega|\vec{u}|^2d\xi$ при росте t, что позволяет продолжить решение задачи (I.3) с малым $\vec{v}_0$, $\int_\Omega\vec{v}_0\cdot\vec{h}\,dx=0$, на все $t>0$, причем условие близости Ω шару не является необходимым. Условие $\int_{\Omega_0}\vec{v}_0\cdot\vec{h}\,dx=0$ также не является необходимым, если $\partial\Omega=\Sigma\cup\Gamma_t$, $\Sigma\cap\Gamma_t=\emptyset$ и $\vec{v}|_\Sigma=0$. Наконец, отметим, что в случае $\sigma=0$ краевое условие не содержит вторых производных $\vec{v}$, что делает возможным рассмотрение задачи в пространствах $W_p^{2,1}(Q_T)$, $p>3$.

Литература

I. С о л о н н и к о в В.А. Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью. - Изв.АН СССР, сер.матем., I977, т.4I, с.I388-I424.

2. B e a l e J.T. The initial-value problem for the Navier--Stokes equations with a free boundary. - Comm.Pure Appl. Math., 1980, v.31, p.p.359-392.

3. B e a l e J.T. Large-time regularity of viscons surface waves. - Arch.Rat.Mech.Anal. 1984, v.84, p.307-352.

4. A l l a i n G. Small-time existence for the Navier-Stokes equations with a free surface. - Ecole Polytechnique, Rapport interne N 135, 1985, p.1-24.

5. С о л о н н и к о в В.А. Разрешимость задачи об эволюции изолированного объема вязкой несжимаемой капиллярной жидкости. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, I984, т.I40, с.I79-I86.

6. F u g l e d e B. Stability in the isoperimetric problem. University of Copenhagen. Preprint Series 1985, N 26,p.1-10.

7. H u r w i t z A. Sur quelques applications geometriques des series de Fourier. - Mathematische Werue I, S.509-554.

8. И л ь и н В.П., С о л о н н и к о в В.А. О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих неременных. - Труды МИАН СССР, I962, т.66, с.205-226.

9. С о л о н н и к о в В.А. Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса. - Зап.научн.семин.ЛОМИ АН СССР, I976, т.59, с.I78-254.

I0. С о л о н н и к о в В.А. О разрешимости второй начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса. - Зап.научн.семин.ЛОМИ АН СССР, I977, т.69, с.200-2I8.

Solonnikov V.A. On an unsteady flow of a finite mass of a liquid bounded by a free surface.

It is proved that the intial-value problem for the Navier-Stokes equations describing the motion of a viscous incompressible liquid bounded by a free surface has the unique solution in an infinite time interval $t > 0$, if the domain occupied by the biquid is close to a ball and the velocity vector field is small at the initial moment of time.