Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. В. Алексеевский, Б. А. Путко, О полноте левоинвариантных метрик на группах Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 3, 73–74

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
21 марта 2025 г., 20:52:37

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 3, 73—74

УДК 517.9

О ПОЛНОТЕ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ МЕТРИК НА ГРУППАХ ЛИ

Д. В. Алексеевский, Б. А. Путко

1. Пусть g — псевдоевклидова метрика в алгебре Ли G. Векторное поле Γ: $X \mapsto \mapsto \mathrm{ad}^g(X)X$, где $\mathrm{ad}^g(X)$ — оператор, сопряженный к оператору присоединенного представления $\mathrm{ad}(X)$, называется полем Эйлера, а его траектории — геодезическими метрики g. Метрика g называется полной, если поле Γ полно.

Пусть $\mathscr{S}$ — группа Ли с алгеброй Ли G. Псевдоевклидовы метрики g в G биективно соответствуют псевдоримановым метрикам $\tilde{g}$ в группе Ли $\mathscr{S}$. Отображение годографа $x(t) \mapsto x(t)^{-1}\dot{x}(t)$ устанавливает биективное соответствие между параметризованными кривыми $x(t)$ в группе $\mathscr{S}$ с $x(0) = e$ и параметризованными кривыми $X(t)$ в алгебре Ли G. При этом геодезическим метрики $\tilde{g}$ соответствуют геодезические метрики g. В частности, полнота левоинвариантной метрики $\tilde{g}$ в группе $\mathscr{S}$ равносильна полноте метрики g в алгебре Ли G. Более обще, вопрос о полноте инвариантной метрики $\tilde{g}$ в однородном пространстве $\mathscr{S}/\mathscr{H}$ сводится к исследованию полноты некоторого поля Эйлера Γ в алгебре Ли G (точнее, его ограничения на инвариантное подпространство M, дополнительное к стационарной подалгебре H). Для определенности будем предполагать, что g есть лоренцева метрика сигнатуры $(+, -, \ldots, -)$. Соответствующая неполная геодезическая называется t-неполной (n-неполной, s-неполной), если она принадлежит Γ-интегральной поверхности $g(X, X) = c = \mathrm{const} > 0$ (соответственно, $c = 0$, $c < 0$).

Определение. *Алгебра Ли G называется абсолютно (не) полной, если все лоренцевы метрики на G (не) полны, и алгеброй промежуточного типа, если на ней есть как полные, так и неполные лоренцевы метрики.*

2. Обозначим через $A(V) = \mathbf{R}A + V$ алгебру Ли, являющуюся полупрямым произведением m-мерной векторной алгебры V и одномерной подалгебры $\mathbf{R}A$, натянутой на эндоморфизм A пространства V. Обозначим через $S(A)$ и $N(A)$ полупростую и нильпотентную части эндоморфизма A: $A = S(A) + N(A)$, $[S(A), N(A)] = 0$. Эндоморфизм A называется компактным, если он полупрост и имеет чисто мнимые собственные значения.

Поле Эйлера Γ на произвольной алгебре Ли G является гамильтоновым относительно пуассоновой структуры в G, индуцированной стандартной пуассоновой структурой сопряженного пространства G^* при изоморфизме g^{-1}: $G^* \to G$. В частности, поле Γ касается орбит представления $\mathrm{Ad}^g\mathscr{S}$ присоединенной группы, сопряженного к присоединенному представлению этой группы [1]. Для алгебры Ли $A(V)$ орбиты коприсоединенного представления двумерны или нульмерны и легко описываются и, следовательно, любое поле Эйлера интегрируется. Отсюда выводится

Теорема. *Пусть g — лоренцева метрика в алгебре Ли $A(V)$ и $\varepsilon = g(A, A)$.*

1) *Пусть $\varepsilon > 0$. Метрика g полна тогда и только тогда, когда полупростая часть $S(A)$ оператора A компактна, а нильпотентная часть $N(A)$ удовлетворяет условию $N(A)^2 = 0$.*

2) *Пусть $\varepsilon = 0$. Метрика g полна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Ker}\, g \mid V = \mathbf{R}X$, $X = Y + Z$, $A^2Y = 0$ *и собственные значения оператора A в A-инвариантном подпространстве, натянутом на вектор Z, не вещественны.*

3) *Пусть $\varepsilon < 0$. Все лоренцевы метрики с $\varepsilon < 0$ неполны тогда и только тогда, когда $A = \lambda id$, $\lambda \neq 0$ и все они полны тогда и только тогда, когда оператор $S(A)$ компактен и $N(A)^2 = 0$.*

Замечания. 1. В случае 3) необходимые и достаточные условия полноты не приводятся, так как они имеют более громоздкий вид.

2. Можно описать все t-неполные и n-неполные геодезические произвольной метрики g на $A(V)$.

3. При $m = 2$ полнота лоренцевых метрик на $A(V)$ исследована С. П. Гавриловым [2].

Следствие. Алгебра Ли $A(V)$ абсолютно полна тогда и только тогда, когда $S(A)$ есть компактный оператор и $N(A)^2 = 0$. Алгебра Ли $A(V)$ абсолютно неполна тогда и только тогда, когда $A = \lambda id$, $\lambda \neq 0$.

3. Приведем некоторые критерии существования полных и неполных лоренцевых метрик на алгебрах Ли, см. также [3].

Предложение. *Лоренцева метрика g в алгебре Ли G полна, если она инвариантна относительно присоединенного оператора adX, где $g(X, X) > 0$.*

Следствие. Пусть в алгебре Ли G есть элемент X с компактным оператором adX (в частности, центральный элемент). Тогда в G есть полная лоренцева метрика. В частности, алгебра Ли G обладает полной лоренцевой метрикой, если она нильпотентна или неразрешима.

О п р е д е л е н и е. *Алгебра Ли G называется алгеброй типа R, если все операторы присоединенного представления имеют чисто мнимые собственные значения и алгеброй типа $\overline{R}$ в противном случае.*

О с н о в н а я т е о р е м а. *Алгебра Ли типа $\overline{R}$ обладает неполной лоренцевой метрикой.* Теорема доказывается с помощью индукции по размерности с использованием следующих утверждений.

Л е м м а 1. *Если на фактор-алгебре G/H алгебры Ли G по идеалу H есть неполная лоренцева метрика, то и в алгебре Ли G есть неполная лоренцева метрика с тем же типом неполноты* (т. е. t-, n- или s-неполная).

Л е м м а 2. *Пусть в алгебре Ли G существует элемент X, для которого оператор* ad X *имеет вещественное ненулевое собственное значение. Тогда в G существует неполная лоренцева метрика с n-неполной геодезической.*

Л е м м а 3. *Пусть G — алгебра Ли типа $\overline{R}$, причем ее фактор-алгебра по любому ненулевому идеалу является алгеброй Ли типа R, а операторы присоединенного представления не имеют ненулевых вещественных собственных значений. Тогда алгебра Ли G разлагается в прямую сумму подалгебры A (V) (см. п. 2), компактной полупростой подалгебры и* ad A *(V)-инвариантного подпространства.*

Было бы интересно исследовать характер сингулярностей (по классификации Эллиса — Шмидта [4]), соответствующих неполным геодезическим на однородном лоренцевом пространстве. Они не могут быть скалярными сингулярностями кривизны, но могут быть устранимыми сингулярностями. Примеры получаются при рассмотрении открытой собственной орбиты группы движений $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ однородного пространства $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ с полной инвариантной метрикой. Например, устранимы сингулярности неполных метрик на двумерной разрешимой группе Ли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 2. *Гаврилов С. П.* // Гравитация и теория относительности. Вып. 21. Казань.: Изд-во Казанского ун-та, 1984.— С. 13—48. 3. *Marsden J. E.* // Indiana Univ. Math. J.— 1973.— V. 22.— P. 1065—1066. 4. *Ellis G. F. R., Schmidt B. G.* // Gen. Rel. Grav. —1977.— V. 8.— P. 915—953.

Московский государственный
заочный педагогический институт

Поступило в редакцию
22 декабря 1986 г.