Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ш. М. Нагиев, Динамическая группа симметрии релятивистской кулоновской задачи в квазипотенциальном подходе,
ТМФ, 1989, том 80, номер 1, 40–46

https://www.mathnet.ru/tmf5114

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.86
22 января 2026 г., 06:37:01

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 80, № 1
июль, 1989

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КУЛОНОВСКОЙ ЗАДАЧИ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

Нагиев Ш. М.

Построена динамическая группа симметрии релятивистской кулоновской задачи в квазипотенциальном подходе. Найдены повышающие и понижающие главное квантовое число n и орбитальное квантовое число l операторы в релятивистском конфигурационном **r**-представлении. Чисто алгебраическим методом определены радиальные волновые функции, соответствующие дискретному спектру.

1. Алгебраический подход в квантовой теории, известный как теория динамических симметрий, широко применяется к описанию свойств квантовых систем [1, 2]. Данный подход основан на том факте, что из операторов, относящихся к изучаемой физической системе, могут быть построены различные конечномерные алгебры Ли, элементами которых являются гамильтониан и операторы его симметрии, а также понижающие и повышающие операторы, не коммутирующие с гамильтонианом. Любая определенная таким образом алгебра Ли называется динамической алгеброй. Базисом ее неприводимого представления являются независимые собственные функции гамильтониана. Знание динамической группы (или алгебры) позволяет полностью решить квантово-механическую задачу, в частности определить энергетические уровни и волновые функции.

В работе [3] было исследовано квазипотенциальное уравнение, обобщающее на релятивистский случай точно решаемую квантово-механическую кулоновскую задачу. Рассмотренная квазипотенциальная модель кулоновской задачи была сформулирована в релятивистском конфигурационном **r**-представлении [4], в котором гамильтониан является конечно-разностным оператором. Группа ее скрытой симметрии была найдена в работе [5].

Цель настоящей работы — построить динамическую группу симметрии релятивистской кулоновской задачи в квазипотенциальном подходе и найти явный вид радиальных волновых функций дискретного спектра чисто алгебраическим методом. Отметим, что с точки зрения динамической группы как нерелятивистская, так и релятивистская кулоновские задачи детально исследовались многими авторами. Например, в работах [6—10] было показано, что нерелятивистский атом водорода обладает группой динамической симметрии $SO(4, 2)$ и весь его дискретный спектр связан с одним бесконечномерным неприводимым представлением группы $SO(4, 2)$. Эта группа была применена к объяснению спектров масс, к вы-

числению различных формфакторов и ширин распадов элементарных частиц [7—9]. Особо отметим работы [11—15], в которых рассматривались релятивистские кулоновские задачи с динамической группой симметрии $SO(4, 2)$.

2. Квазипотенциальное уравнение, описывающее рассматриваемую релятивистскую кулоновскую задачу, имеет вид ($\hbar=m=c=1$) [3]

$$H\Psi(\mathbf{r})\equiv(H_0-\alpha/r)\Psi(\mathbf{r})=E\Psi(\mathbf{r}),\qquad \alpha>0, \tag{1}$$

где конечно-разностный оператор

$$H_0=\operatorname{ch}(i\nabla_r)+\frac{i}{r}\operatorname{sh}(i\nabla_r)+\frac{\mathbf{L}^2}{2r^2}e^{i\nabla_r},\qquad \nabla_r=\frac{\partial}{\partial r}, \tag{2}$$

является свободным гамильтонианом, а L^2 — квадрат оператора орбитального момента. Энергетический спектр и волновые функции

$$\Psi(\mathbf{r})=\frac{1}{r}\psi_l(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

данной задачи найдены в работах [3, 5]. Здесь мы только отметим, что радиальные волновые функции

$$\psi_{nl}(r)=c_{nl}(r)e^{-r\chi_n}(-r)^{(l+1)}P^{l+1}_{n-(l+1)}(-r;\chi_n), \tag{3}$$

соответствующие дискретному спектру

$$|E_n|=\sqrt{1-\alpha^2/n^2},\qquad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

можно выразить через полиномы Поллачека [16]

$$P_n^{\nu}(x;\varphi)=\frac{(2\nu)_n}{n!}e^{in\varphi}F(-n,\nu+ix;2\nu;1-e^{-2i\varphi}),$$

где $c_{nl}(r)$ — произвольная i-периодическая функция, $E_n=\cos\chi_n$, $\chi_n\in(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)$, а $r^{(\lambda)}$ — обобщенная степень [17]:

$$r^{(\lambda)}=i^{\lambda}\frac{\Gamma(-ir+\lambda)}{\Gamma(-ir)}\equiv i^{\lambda}(-ir)_{\lambda}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению динамической группы симметрии релятивистской кулоновской задачи. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что следующие 15 операторов:

$$\Gamma_0=r\operatorname{ch}(i\nabla_r)+i\operatorname{sh}(i\nabla_r)+\frac{\mathbf{L}^2}{2r}e^{i\nabla_r},\qquad \Gamma_4=r, \tag{5}$$

$$T=r\operatorname{sh}(i\nabla_r)+i\operatorname{ch}(i\nabla_r)+\frac{\mathbf{L}^2}{2r}e^{i\nabla_r},$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{n}(i-r)\operatorname{ch}(i\nabla_r)+\mathbf{n}\mathbf{L}^2\frac{1}{2r}e^{i\nabla_r}-\mathbf{m}e^{i\nabla_r},$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{n}(i-r)-\mathbf{m},\quad \mathbf{L},$$

$$\mathbf{\Gamma}=-\mathbf{n}(i-r)\operatorname{sh}(i\nabla_r)-\mathbf{n}\mathbf{L}^2\frac{1}{2r}e^{i\nabla_r}+\mathbf{m}e^{i\nabla_r},$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли $SO(4, 2)$ (см. приложение). Они действуют на функции $\Psi(\mathbf{r})$ в пространстве со скаляр-

ным произведением $\int \Psi_1^* \frac{1}{r} \Psi_2 d\mathbf{r}$ и являются эрмитовыми. Эта совокупность операторов и определяет динамическую симметрию задачи. Инвариантные операторы Казимира в данном случае имеют значения

$$C_2=\mathbf{L}^2+\mathbf{A}^2-\mathbf{M}^2-\mathbf{\Gamma}^2+\Gamma_0^2-\Gamma_4^2-T^2=-3, \qquad C_3=C_4=0. \tag{6}$$

Множество операторов L_i, A_j $(i, j=1, 2, 3)$, коммутирующих с Γ_0, образуют компактную подалгебру $so(4)$ алгебры $so(4, 2)$. Из (5) в полной аналогии с нерелятивистским случаем имеем

$$\mathbf{LA}=\mathbf{AL}=0, \qquad \mathbf{L}^2+\mathbf{A}^2+1=\Gamma_0^2. \tag{7}$$

Поэтому собственные функции релятивистской кулоновской задачи, отвечающие главному квантовому числу n, образуют базис конечномерного неприводимого представления $D((n-1)/2, (n-1)/2)$ алгебры $so(4)$. В этом представлении $\mathbf{L}^2+\mathbf{A}^2=n^2-1$ и орбитальный момент l принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Известно (см., например, [10]), что неприводимое лестничное представление группы $SO(4, 2)$ при редукции по компактной подгруппе $SO(4)$ разлагается на неприводимые представления $D((n-1)/2, (n-1)/2)$, $n=1, 2, 3, \ldots$.

Таким образом, как и в случае нерелятивистского атома водорода, все состояния дискретного спектра обсуждаемой здесь релятивистской кулоновской задачи реализуют одно бесконечномерное неприводимое унитарное представление алгебры $so(4, 2)$, определяемое собственными значениями (6) операторов Казимира.

Собственные значения гамильтониана $H=H_0-\alpha/r$ можно определить чисто алгебраически с привлечением некомпактной подалгебры $so(2, 1)$ алгебры $so(4, 2)$ с генераторами Γ_0, Γ_4, T (ср. с [14, 18, 19]). Оператор Казимира этой подалгебры $C_2'=\Gamma_0^2-\Gamma_4^2-T^2=\mathbf{L}^2$ в силу сферической симметрии задачи равен $C_2'=l(l+1)=\Phi(\Phi+1)$, т. е. $\Phi=l$ или $\Phi=-l-1$. Собственному значению $\Phi=-l-1$ оператора C_2' соответствуют унитарное неприводимое представление $D^+(-l-1)$ и дискретный спектр компактного генератора Γ_0, ограниченный снизу и равный $n=-\Phi+n_r=n_r+l+1$, $n_r=0, 1, 2, 3, \ldots$. Используя явный вид генераторов Γ_0, Γ_4, перепишем уравнение (1) (после умножения слева на r) в следующей алгебраической форме:

$$(\Gamma_0-E\Gamma_4-\alpha)\Psi(\mathbf{r})=0. \tag{8}$$

Чтобы решить уравнение (8) стандартным способом [2], рассмотрим отдельно случаи, когда $|E|<1$ и $|E|>1$:

1) в случае $|E|<1$ (дискретный спектр) в (8) можно диагонализовать компактный генератор Γ_0 и получить

$$(\sqrt{1-E^2}\Gamma_0-\alpha)\tilde{\Psi}=0, \qquad \tilde{\Psi}=e^{i\rho T}\Psi, \tag{9}$$

где $\operatorname{th}\rho=-E$, отсюда следует формула (4);

2) в случае же $|E|>1$ диагонализуется некомпактный генератор Γ_4, имеющий непрерывный вещественный спектр λ. В результате приходим

к уравнению

$$(10)\qquad [\sqrt{E^2-1}\,(\operatorname{sgn} E)\,\Gamma_4+\alpha]\,\widetilde{\Psi}'=0,\qquad \widetilde{\Psi}'=e^{i\rho' T}\Psi,$$

в котором $\operatorname{th}\rho'=-1/E$. Из этого уравнения находим непрерывный спектр гамильтониана H: $E_\lambda=\pm\sqrt{1+\alpha^2/\lambda^2}$.

Необходимо подчеркнуть, что в нерелятивистском пределе операторы (5) не переходят в соответствующие генераторы динамической алгебры $so(4,\ 2)$ нерелятивистского атома водорода. Генераторы релятивистской задачи с нужными нерелятивистскими пределами можно получить из (5) с помощью унитарных преобразований. Например, в случае $|E|<1$ унитарный оператор, осуществляющий такое преобразование, имеет вид $S=e^{-i\rho T}e^{-i\pi\Gamma_0}$, где $\operatorname{th}\rho=-E$. Тогда

$$(11)\qquad \begin{aligned}
&\Gamma_0(E)\equiv S\Gamma_0S^{-1}=\gamma(\Gamma_0-E\Gamma_4),\\
&\Gamma_4(E)\equiv S\Gamma_4S^{-1}=\gamma(E\Gamma_0-\Gamma_4),\\
&T(E)\equiv STS^{-1}=-T,\qquad \mathbf{L}=S\mathbf{L}S^{-1},\\
&\mathbf{A}(E)\equiv S\mathbf{A}S^{-1}=\gamma(\mathbf{A}-E\mathbf{M}),\\
&\mathbf{M}(E)\equiv S\mathbf{M}S^{-1}=\gamma(E\mathbf{A}-\mathbf{M}),\\
&\mathbf{\Gamma}(E)\equiv S\mathbf{\Gamma}S^{-1}=-\mathbf{\Gamma},\qquad \gamma=(1-E^2)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

3. Найдем теперь чисто алгебраическим методом явный вид решений уравнения (1) в случае дискретного спектра. Для этого перейдем к новой волновой функции

$$(12)\qquad |n,\ l\rangle\equiv u_{nl}(r)=c_{nl}^{-1}(r)\,\Gamma(ir)\,\psi_{nl}(r),$$

которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$(13)\qquad h_l(r)\,|n,\ l\rangle=\alpha|n,\ l\rangle,$$

$$h_l(r)=\frac{i}{2}\{[r^{(2)}+l(l+1)]\,e^{i\nabla_r}-e^{-i\nabla_r}\}-Er.$$

В пространстве функций $u_{nl}(r)$ со скалярным произведением

$$\int_0^\infty u_1^*u_2[r|\Gamma(ir)|^2]^{-1}\,dr$$

генераторы подалгебры $so(2,\ 1)$ (11) принимают вид

$$(14)\qquad \tilde{\Gamma}_0(E)=\gamma h_l(r),\qquad \tilde{\Gamma}_4(E)=E\tilde{\Gamma}_0(E)-r/\gamma,$$

$$\tilde{T}(E)=-\left[\frac{1}{\gamma}\tilde{\Gamma}_0(E)+Er+ie^{-i\nabla_r}\right].$$

Сначала определим явный вид волновой функции основного состояния $|1,\ 0\rangle$ с помощью метода факторизации [20, 21], т. е. представим радиальный «гамильтониан» $h_l(r)$ в факторизованной форме (ср. с [22]):

$$(15)\qquad h_l(r)=a_l(\sigma,\ \sigma')\,a_l^+(\sigma,\ \sigma')+(\sigma/\gamma)\,(\sigma'\mu+{}^1/_2),$$

где $\mu=l+{}^1/_2$, $\sigma=\pm1$, $\sigma'=\pm1$. Для операторов a_l и a_l^+ имеем следующие вы-

ражения:

$$(16)\qquad a_l(\sigma,\sigma')=-i({}^1/_2\operatorname{cth}\pi r)^{1/2}[\exp\{i(\sigma\chi-{}^1/_2\nabla_r)\}+ +e^{i\nabla_r/2}(\sigma'\mu-ir)],$$
$$a_l^+(\sigma,\sigma')=({}^1/_2\operatorname{cth}\pi r)^{1/2}[\exp\{-i(\sigma\chi+{}^1/_2\nabla_r)\}- -(\sigma'\mu+ir)e^{i\nabla_r/2}].$$

Используя вид оператора $a_l^+(\sigma,\sigma')$ при $\sigma=\sigma'=+1$, легко находим, что волновая функция основного состояния, как следует из (15), равна

$$(17)\qquad |1,0\rangle=e^{-r\chi}\Gamma(1+ir).$$

Чтобы определить волновые функции $|n,l\rangle$ при произвольном n и l, необходимо ввести операторы $A_l^+(r)$ и $L_l^+(r)$, повышающие соответственно главное квантовое число n и орбитальное квантовое число l. Очевидно, что в качестве $A_l^+(r)$ можно взять интеграл движения $\Gamma_4(E)+i\tilde{\Gamma}(E)$ (см. приложение). При $l=0$ имеем

$$[A_0^+(r)]^{n-1}|1,0\rangle=(n-1)!|n,0\rangle.$$

Оператор $L_l^+(r)$, определяемый следующей формулой (ср. с [22]):

$$(18)\qquad L_l^+(r)h_l(r)-h_{l+1}(r)L_l^+(r)=0,$$

можно выразить через $h_l(r)$:

$$(19)\qquad L_l^+(r)={}^1/_2\gamma^2\{(l+1)[E-(l+ir)e^{i\nabla_r}]-ih_l(r)\}.$$

Для нахождения явного вида волновых функций $|n,l\rangle$ воспользуемся тем, что

$$(20)\qquad L_l^+(r)e^{-r\chi}\Gamma(l+1+ir)=e^{-r\chi}\Gamma(l+2+ir)D(r),$$

где оператор

$$(21)\qquad D(r)=\frac{\gamma^2}{2}\left(E-E\operatorname{ch}(i\nabla_r)+\frac{i}{\gamma}\operatorname{sh}(i\nabla_r)\right)$$

действует на полиномы Поллачека следующим образом (см. приложение):

$$(22)\qquad [D(r)]^kP_n^\nu(-r;\chi)=P_{n-k}^{\nu+k}(-r;\chi).$$

Как теперь легко видеть, из формул (20) и (22) следует равенство

$$(23)\qquad L_l^+(r)|n,l\rangle=|n,l+1\rangle.$$

Следовательно, произвольное состояние $|n,l\rangle$ может быть получено действием операторов $L_l^+(r)$ на состояние $|n,0\rangle$:

$$(24)\qquad |n,l\rangle=L_{l-1}^+(r)L_{l-2}^+(r)\ldots L_0^+(r)|n,0\rangle.$$

Отметим, что, как следовало ожидать, формула (24) дает $|n,l\rangle=0$ при $l\geqslant n$.

4. В настоящей работе мы построили динамическую алгебру релятивистской кулоновской задачи, сформулированной в релятивистском конфигурационном r-представлении, в котором генераторы алгебры реализуются в виде конечно-разностных операторов. Все дискретные уровни энергии задачи объединяются в один мультиплет группы $SO(4,2)$.

Мы также определили чисто алгебраическим методом радиальные волновые функции (24), соответствующие дискретному спектру E_n. При этом использование метода факторизации позволило нам легко найти явный вид волновой функции основного состояния.

В заключение отметим, что в дальнейшем теоретико-групповой подход [23], основанный на использовании динамической группы SO (4, 2) релятивистской кулоновской задачи, будет применен к проблеме описания спектров масс адронов, рассматриваемых как связанные состояния кварков.

Я благодарен В. И. Манько и Р. М. Мир-Касимову за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Приведем здесь некоторые сведения из теории некомпактной алгебры so (4, 2). Алгебра Ли so (4, 2) является линейным векторным пространством, натянутым на 15 генераторов $L_{\mu\nu}=-L_{\nu\mu}$, μ, $\nu=0, 1, 2, 3, 4, 5$, образующих базис и удовлетворяющих коммутационным соотношениям [6, 14, 24]

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}]=i(g_{\mu\rho}L_{\nu\lambda}+g_{\nu\lambda}L_{\mu\rho}-g_{\mu\lambda}L_{\nu\rho}-g_{\nu\rho}L_{\mu\lambda}), \tag{П.1}$$

где компоненты метрического тензора $g_{00}=g_{55}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=-g_{44}=1$. Инвариантные операторы Казимира второго, третьего и четвертого порядков имеют вид

$$C_2={}^1/_2L_{\mu\nu}L^{\nu\mu},\ C_3=\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho\sigma\tau}L^{\mu\nu}L^{\lambda\rho}L^{\sigma\tau},\ C_4=L_{\mu\nu}L^{\nu\lambda}L_{\lambda\rho}L^{\rho\mu}. \tag{П.2}$$

В данной работе для генераторов алгебры $so(4, 2)$ используются обозначения ($i, j, k=1, 2, 3$)

$$L_i={}^1/_2\varepsilon_{ijk}L_{jk},\ A_i=L_{i4},\ M_i=L_{i0},$$

$$\Gamma_i=L_{i5},\quad \Gamma_0=L_{05},\quad \Gamma_4=L_{45},\quad T=L_{40}.$$

2. Компоненты трехмерных векторов $\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$ и $\mathbf{m}$ в сферических координатах записываются в виде

$$\mathbf{n}=(\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta), \tag{П.3}$$

$$m_x=i\left(\cos\varphi\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}-\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{П.4}$$

$$m_y=i\left(\sin\varphi\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\quad m_z=-i\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}.$$

Различные соотношения между векторными операторами $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{L}$ приведены в [5].

3. Вследствие коммутационных соотношений для генераторов (14) действие операторов $A_l^+(r)$ и $A_l^-(r)$ на собственные функции $|n, l\rangle$ гамильтониана задается формулами

$$A_l^\pm(r)\,|n, l\rangle=(n\mp l)\,|n\pm1, l\rangle. \tag{П.5}$$

Понижающий орбитальное квантовое число l оператор $L_l^-(r)$ получается из $L_l^+(r)$ (19) эрмитовым сопряжением и равен

$$L_l^-(r)=\frac{\gamma^2}{2}\{(l+1)\,[E+(l+1-ir)\,e^{i\nabla_r}]+ih_l(r)\}. \tag{П.6}$$

Из формулы (23) и соотношения

$$L_l^-(r)\,L_l^+(r)={}^1/_4[\gamma^4h_l^2(r)-(l+1)^2] \tag{П.7}$$

следует, что

$$L_{l-1}^-(r)\,|n, l\rangle=\frac{\gamma^2}{4}(n^2-l^2)\,|n, l-1\rangle. \tag{П.8}$$

4. Используя производящую функцию для полиномов Поллачека [16]

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^nP_n^\nu(x;\varphi)=(1-ze^{i\varphi})^{ix-\nu}(1-ze^{-i\varphi})^{-ix-\nu}, \tag{П.9}$$

можно получить следующие полезные формулы:

$$\text{(П.10)} \qquad \operatorname{ch}\left(\frac{i}{2}\nabla_x\right)P_n^{\nu}(x;\varphi)=P_n^{\nu+1/2}(x;\varphi)-\cos\varphi P_{n-1}^{\nu+1/2}(x;\varphi),$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{i}{2}\nabla_x\right)P_n^{\nu}(x;\varphi)=i\sin\varphi P_{n-1}^{\nu+1/2}(x;\varphi),$$

$$\operatorname{sh} i(\varphi+{}^1/_2\nabla_x)P_n^{\nu}(x;\varphi)=i\sin\varphi P_n^{\nu+1/2}(x;\varphi).$$

Они приводят к различным соотношениям между полиномами Поллачека и, в частности, к (21).

Литература

[1] *Малкин И. А., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
[2] *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1980.
[3] *Freeman M., Mateev M. D., Mir-Kasimov R. M.* // Nucl. Phys. 1969. V. B12. P. 197–215.
[4] *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* // Nuovo Cim. 1968. V. 55A. № 2. P. 233–257.
[5] *Nagiyev Sh. M.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1988. V. 21. P. 2559–2564.
[6] *Малкин И. А., Манько В. И.* // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. Вып. 5. С. 230–234; ЯФ. 1966. Т. 3. Вып. 2. С. 372–382.
[7] *Nambu Y.* // Phys. Rev. 1967. V. 160. № 5. P. 1171–1182.
[8] *Barut A. O., Kleinert H.* // Phys. Rev. 1967. V. 156. № 5. P. 1541–1545; V. 157. № 5. P. 1180–1183; V. 160. № 5. P. 1149–1151.
[9] *Fronsdal C.* // Phys. Rev. 1967. V. 156. № 5. P. 1653–1677; V. 171. № 5. P. 1181–1823.
[10] *Тодоров И. Т.* // Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев: Наукова думка, 1967. С. 237–257.
[11] *Малкин И. А., Манько В. И.* // ЯФ. 1969. Т. 9. Вып. 1. С. 184–189.
[12] *Itzykson C., Kadyshevsky V. G., Todorov I. T.* // Phys. Rev. 1970. V. D1. № 10. P. 2823–2831.
[13] *Barut A. O., Bornzin J. L.* // J. Math. Phys. 1971. V. 12. № 5. P. 841.
[14] *Barut A. O.* Dynamical groups and generalized symmetries in quantum theory. Chistchurch, New Zealand, 1971.
[15] *Barut A. O.* // SIAM J. Appl. Math. 1973. V. 25. № 2. P. 247–259.
[16] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
[17] *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.* // ЯФ. 1969. Т. 9. Вып. 1. С. 212–223.
[18] *Lanik J.* // Czech. J. Phys. 1969. V. B12. P. 1540–1548.
[19] *Дмитриев В. Ф., Румер Ю. Б.* // ТМФ. 1970. Т. 5. № 2. С. 276–280.
[20] *Schrödinger E.* // Proc. Roy. Irish. Acad. 1941. V. A46. P. 183–206.
[21] *Infeld L., Hill T. E.* // Rev. Mod. Phys. 1951. V. 23. № 1. P. 21–68.
[22] *Atakishiyev N. M., Mir-Kasimov R. M., Nagiyev Sh. M.* // Ann. der Phys. (DDR). 1985. V. 42. № 1. P. 25–30.
[23] *Gerry C. C., Silverman S.* // Phys. Lett. 1983. V. 95A. № 9. P. 481.
[24] *Barut A. O., Böhm A.* // J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 10. P. 2938–2945.

Институт физики
Академии наук АзССР

Поступила в редакцию
4.I.1988 г.

DYNAMICAL SYMMETRY GROUP OF THE RELATIVISTIC COULOMB PROBLEM IN THE QUASIPOTENTIAL APPROACH

Nagiyev Sh. M.

Dynamical symmetry group of the relativistic Coulomb problem in the quasipotential approach is constructed. In the relativistic configurational r-representation the raising and lowering operators for the quantum numbers n and l are found. The radial wave functions corresponding to the discrete spectrum are determined by purely algebraic method.