A. N. Sharkovskii, E. Yu. Romanenko, Difference Equations and Dynamical Systems Generated by Certain Classes of Boundary Value Problems,
Trudy Mat. Inst. Steklova, 2004, Volume 244, 281–296

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 244, с. 281–296

УДК 517.9

Разностные уравнения и динамические системы, порождаемые некоторыми классами краевых задач

©2004 г. А. Н. Шарковский[1], Е. Ю. Романенко[2]

Поступило в январе 2001 г.

Изучен специальный класс эволюционных полугрупп, рассмотрение которых может быть сведено к исследованию динамических свойств отображений с одномерным или двумерным фазовым пространством. Описаны строение аттракторов и энтропийные свойства соответствующих бесконечномерных динамических систем.

1. ВВЕДЕНИЕ

Детерминированный хаос и связанные с ним понятия прочно вошли в обиход современной науки. Появлением хаоса и разного рода фрактальных объектов в различных областях естествознания никого сейчас особо не удивишь. Это, в частности, относится и к теории эволюционных задач, задаваемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. Однако в случае уравнений с частными производными можно и должно говорить не только о сложной временной динамике состояний системы, как для обыкновенных уравнений, но и о сложной "внутренней (пространственной) структуре" самих состояний в каждый момент времени.

Исследования эволюционных задач математической физики, начатые нами более 20 лет назад, также связаны с возникновением детерминированного хаоса, но в отличие от большинства исследований они касаются преимущественно "внутренней" структуры индивидуальных решений. В рассматриваемых нами задачах эволюция "внутренней" структуры решений связана в первую очередь с развитием *каскадного процесса рождения пространственных структур* бесконечно убывающих масштабов и формированием в пределе (при $t = \infty$) *фрактальных структур* или даже *случайных структур*, когда предельными для решения являются случайные функции (пространственных переменных).

Нам не известны работы, в которых рассматривались бы такого рода эффекты. При изучении эволюционных задач возникновение фрактальных множеств обычно связывают со сложным строением аттракторов, а не сложным "внутренним" строением их элементов. В наших же исследованиях фрактальные множества естественным образом возникают при описании внутреннего устройства как раз самих элементов аттракторов. Это позволило констатировать существование совсем простых по форме краевых задач с крайне сложной пространственно-временной динамикой, а также предложить для их исследования эффективные методы, основанные на современной теории динамических систем.

Не имея здесь возможности дать достаточно полную характеристику проведенных в этом направлении исследований, мы ограничимся в данной работе в основном вопросами о структуре аттракторов и топологической энтропии для тех бесконечномерных динамических систем, которые порождаются простейшими краевыми задачами, и в меньшей степени будем касаться внутреннего устройства самих "состояний системы".

[1]Институт математики НАН Украины, Киев, Украина.
E-mail: asharkov@imath.kiev.ua
[2]Институт математики НАН Украины, Киев, Украина.

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, СВОДИМЫЕ К РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Среди краевых задач для уравнений в частных производных особое место занимают задачи, которые можно свести к разностным или дифференциально-разностным уравнениям. Обычно такое сведение (редукция) оказывается возможным благодаря тому, что известно представление общего решения соответствующего уравнения в частных производных. Хотя примеры таких задач, которые в дальнейшем будем называть сводимыми, давно и хорошо известны, глубокое их исследование "методом редукции" стало возможным только в последние десятилетия благодаря развитию теории разностных уравнений с непрерывным временем, которая в свою очередь в решающей степени обязана успехам теории дискретных динамических систем, особенно задаваемых одномерными отображениями.

Когда используют термин "разностное уравнение", то, как правило, имеют в виду уравнения с дискретным аргументом. А при редукции сводимых краевых задач к разностным уравнениям получаются как раз уравнения с непрерывным аргументом (см. ниже примеры 1–5). В простейших случаях это уравнения вида

$$u(\tau+1) = f(u(\tau)), \qquad \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Как связана динамика решений разностных уравнений с непрерывным аргументом с динамикой решений аналогичных уравнений с дискретным аргументом? Поясним это на примере уравнения (1). Ему соответствует дискретное уравнение

$$u_{n+1} = f(u_n), \qquad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2}$$

Каждое решение u_n, $n \in \mathbb{Z}^+$, уравнения (2) однозначно определяется значением $u_0 \in \mathbb{R}$, а каждое решение $u(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, уравнения (1) — значениями u на интервале $[0,1)$. Уравнение (2) индуцирует одномерную динамическую систему (фазовое пространство которой — действительная прямая или интервал), задаваемую отображением

$$u \mapsto f(u). \tag{3}$$

Уравнение (1) индуцирует бесконечномерную динамическую систему, действующую на пространстве функций $\varphi\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ по правилу $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ (символ $\circ$ — знак суперпозиции). Таким образом, каждому решению уравнения (2) отвечает траектория динамической системы, задаваемой отображением (3), а каждому решению уравнения (1) — континуальное семейство траекторий этой же динамической системы. Иначе говоря, в каждой точке $\tau_* \in [0,1)$ действует "осциллятор" $\varphi(\tau_*) \mapsto f(\varphi(\tau_*))$, колебания которого не зависят от колебаний "осцилляторов" в других точках из $[0,1)$, и, следовательно, уравнение (1) можно рассматривать как *задачу о колебаниях континуума несвязанных осцилляторов*. Важно отметить, что как раз независимость колебаний "осцилляторов" может приводить к появлению у уравнения (1) и, как следствие, у сводящихся к нему краевых задач решений, поведение которых на больших временах практически неотличимо от поведения случайных процессов. Это явление получило название *автостохастичность* [16, 17] и применительно к краевым задачам означает развитие *пространственно-временного хаоса*, который уже необходимо описывать методами теории вероятностей (см., например, [5, 10, 11]). Еще одним важным следствием отмеченной выше связи динамики решений уравнения (1) с динамикой отображения (3) является развитие в решениях соответствующих краевых задач каскадного процесса образования когерентных структур (см., например, [5, 8, 9]), которое обусловлено сложной геометрией бассейнов притяжения циклов и циклов интервалов одномерных отображений [13].

По нашему мнению, именно редукция различных классов краевых задач, описывающих те или иные волновые процессы, к разностным уравнениям с непрерывным аргументом является тем инструментом, который позволяет продвинуться на пути к более глубокому пониманию природы таких сложных нелинейных явлений, как самоорганизация и хаос.

Богатым источником сводимых задач являются уравнения гиперболического типа; даже совсем простые линейные уравнения с нелинейными краевыми условиями приводят к большому разнообразию разностных уравнений и отвечающих им отображений. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом вопросе (который сравнительно детально обсуждается в [7, 14]), а ограничимся несколькими простейшими примерами, в которых появляются типичные разностные уравнения. К таковым можно отнести ситуации, когда краевая задача сводится к

- автономному разностному уравнению вида (1), так что каждому начальному условию и, более того, каждому $\tau \in [0,1]$ соответствует один и тот же осциллятор (3) (примеры 1 и 2);
- неавтономному разностному уравнению, когда каждому $\tau \in [0,1]$ отвечает свой осциллятор f_τ или суперпозиция осцилляторов $f_\tau \circ f_{\tau+1} \circ \dots$ (пример 3);
- семейству автономных разностных уравнений, когда каждому начальному условию краевой задачи отвечает свой осциллятор, однако один и тот же для всех $\tau \in [0,1]$ (пример 4).

При этом к одному (скалярному) разностному уравнению могут сводиться как одномерные (примеры 1, 3, 4), так и многомерные (пример 2) краевые задачи. И наоборот, имеются одномерные задачи, сводящиеся к системам разностных уравнений (пример 5).

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad x \in [0,1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

с краевым условием

$$w\big|_{x=1} = f(w)\big|_{x=0}, \qquad f \text{ — некоторая } C^1\text{-функция.} \tag{5}$$

Если функция f нелинейная, то задача (4), (5) — это простейшая нелинейная краевая задача, какую только можно представить. Подставляя общее решение уравнения (4), которое имеет вид

$$w(x,t) = u(x+t), \qquad u \text{ — произвольная } C^1\text{-функция,} \tag{6}$$

в краевое условие (5), приходим к разностному уравнению (1) для функции u.

Таким образом, *задача* (4), (5) *сводится к автономному разностному уравнению*; каково бы ни было начальное условие

$$w(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \quad \varphi \text{ — некоторая } C^1\text{-функция,} \tag{7}$$

ее решение можно представить в виде

$$w(x,t) = u_\varphi(x+t), \tag{8}$$

где u_φ — решение разностного уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $u(\tau) = \varphi(\tau)$, $\tau \in [0,1]$. Понятно, что решение (8) будет C^1-гладким всюду на $\mathbb{R}^+$, если условия (5), (7) являются согласованными: $\varphi(1) = f(\varphi(0))$, $\varphi'(1) = f'(\varphi(0))\varphi'(0)$, что обычно предполагается при постановке краевых задач.

2. Если ввести в уравнение (4) еще одну пространственную переменную

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad x \in [0,1], \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{9}$$

оставив неизменным краевое условие (5), то, используя представление общего решения уравнения (9)

$$w(x,t) = u(x+t, y+t), \qquad u \text{ — произвольная } C^1\text{-функция}, \tag{10}$$

сведем задачу к разностному уравнению вида (1), но с параметром

$$u(\tau+1,\sigma) = f(u(\tau,\sigma)), \qquad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

3. Если же в уравнение (4) добавить простейшую неавтономность

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} + d(t), \qquad x \in [0,1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{12}$$

то, используя представление общего решения

$$w(x,t) = u(x+t) + D(t), \qquad D(t) \text{ — первообразная функции } d(t), \tag{13}$$

и краевое условие (5), для функции $v(\tau) = u(\tau) + D(\tau)$ получим неавтономное разностное уравнение

$$v(\tau+1) = f(v(\tau)) - D(\tau+1), \qquad \tau \geq 0.$$

4. Если краевое условие для уравнения (4) содержит и производные, например, имеет вид

$$w_t\big|_{x=1} = g(w) w_t\big|_{x=0}, \qquad g \text{ — некоторая } C^0\text{-функция}, \tag{14}$$

то получаем задачу, которая сводится уже к некоторому семейству нелинейных разностных уравнений. Действительно, интегрирование (14) приводит краевое условие к виду

$$w\big|_{x=1} = f(w)\big|_{x=0} + \gamma, \tag{15}$$

где f — первообразная функции g, а γ — произвольная постоянная. Поэтому после подстановки общего решения (6) в (15) получим для u однопараметрическое семейство разностных уравнений

$$u(\tau+1) = f(u(\tau)) + \gamma, \qquad \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{16}$$

Ввиду непрерывности решений исходной краевой задачи функция u, отвечающая начальному условию (7), может быть решением только одного из разностных уравнений семейства (16), а именно уравнения с $\gamma = \varphi(1) - f(\varphi(0))$.

5. Классический пример краевых задач, сводящихся к разностным, дифференциально-разностным, функциональным уравнениям, дает волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq 1. \tag{17}$$

Такого рода задачи для уравнения (17) рассматривались во многих работах, в частности в наших работах [5, 7–12, 14]. Приведем здесь пример задачи, сводящейся уже не к одному, а к системе разностных уравнений. Пусть краевые условия имеют вид

$$w_x\big|_{x=0} = a w_t\big|_{x=0}, \quad a > 0, \qquad w\big|_{x=1} = h(w\big|_{x=0}). \tag{18}$$

Используя представление общего решения уравнения (17)

$$w(x,t)=u(t+x)+v(t-x),\qquad u,\, v \text{ — произвольные } C^2\text{-функции,} \tag{19}$$

в соответствии с описанной выше схемой находим

$$u(\tau)=\frac{1+a}{2}z(\tau+1)-A,\qquad v(\tau)=\frac{1-a}{2}z(\tau+1)+A, \tag{20}$$

где A — произвольная постоянная, z — решение разностного уравнения второго порядка

$$z(\tau+2)=\frac{2}{1+a}h(z(\tau+1))+bz(\tau),\qquad b=-\frac{1-a}{1+a}. \tag{21}$$

Полагая

$$y(\tau)=\frac{1}{b}\,z(\tau+1),\qquad f(y)=\frac{2}{a-1}\,h(by),$$

заключаем, что при $a\neq 1$ *краевая задача* (17), (18) *сводится к системе разностных уравнений*

$$\begin{cases} y(\tau+1)=f(y(\tau))+z(\tau),\\ z(\tau+1)=by(\tau). \end{cases} \tag{22}$$

Системе (22) отвечает двумерное отображение

$$\begin{aligned} y&\mapsto f(y)+z,\\ z&\mapsto by, \end{aligned}$$

которое при $f(y)=1-My^2$ представляет собой отображение Хенона, а при $f(y)=1-M|y|$ — отображение Лози.

Резюмируя, можем сказать, что для эффективного исследования сводимых и близких к ним краевых задач необходимо хорошее понимание специфики разностных уравнений с непрерывным аргументом. Как показывают наши исследования, поведение решений таких уравнений может быть очень сложным; уже простейшие нелинейные уравнения вида (1) обладают широким спектром решений от асимптотически постоянных до квазислучайных, асимптотические свойства которых описываются в терминах случайных процессов; типичными для (1) являются гладкие решения, стремящиеся к разрывным функциям (имеющим во многих случаях бесконечное число разрывов на любом интервале единичной длины). Все это не только приводит к не менее сложному поведению решений исходных краевых задач, но, что весьма важно, позволяет предложить сравнительно простые сценарии возникновения в решениях краевых задач таких сложных нелинейных явлений, как каскадный процесс образования когерентных структур, формирование в пределе фрактальных структур, автостохастичность.

К сожалению, опыт показывает, что исследования по теории разностных уравнений с непрерывным аргументом известны недостаточно широко. Поэтому мы посчитали полезным вкратце описать наш подход к изучению таких уравнений и привести некоторые результаты для уравнения (1), как полученные ранее, так и новые (это главным образом раздел 5).

3. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ КАК ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим асимптотическое поведение решений нелинейных разностных уравнений вида

$$x(t+1)=f(x(t)),\qquad t\in\mathbb{R}^+, \tag{23}$$

где $f\in C^0(I,I)$, I — замкнутый интервал.

При каждом $\varphi\colon [0,1)\to I$ начальное условие

$$x(t)=\varphi(t) \qquad \text{при} \quad t\in[0,1) \tag{24}$$

определяет единственное решение $x_\varphi\colon \mathbb{R}^+\to I$ уравнения (23), которое можно построить по шагам, а именно

$$x_\varphi(t)=f^i(\varphi(t-i)) \qquad \text{при} \quad t\in[i,i+1), \quad i=0,1,\dots \tag{25}$$

Таким образом, каждое решение $x\colon \mathbb{R}^+\to I$ уравнения (23) однозначно определяется своими значениями на начальном интервале $[0,1)$, причем в отличие от дифференциальных уравнений разностные уравнения сами по себе не предполагают гладкости и даже непрерывности решений. Здесь мы будем рассматривать решения, непрерывные на $\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Z}^+$. Из (25) следует, что такие решения x_φ порождаются начальными функциями $\varphi\in C^0([0,1),I)$, при этом x_φ является, вообще говоря, разрывным в точках $t\in\mathbb{Z}^+$. Чтобы x_φ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(1)=f(\varphi(0))$. И вообще решение x_φ является C^k-гладким, $k\ge 0$, всюду на $\mathbb{R}^+$ тогда и только тогда, когда

$$f\in C^k(I,I), \qquad \varphi\in C^k([0,1],I) \qquad \text{и} \qquad \frac{d^s}{dt^s}\varphi(1-0)=\frac{d^s}{dt^s}(f(\varphi(0))), \quad s=0,1,\dots,k. \tag{26}$$

В дальнейшем мы будем (не оговаривая это каждый раз) предполагать начальные функции φ непрерывными и, более того, будем считать их определенными на замкнутом интервале $[0,1]$, полагая $\varphi(1)=\varphi(1-0)$ и тем самым приписывая решениям $x_\varphi(t)$, вообще говоря, по два значения в точках $t\in\mathbb{Z}^+$ (которые совпадают, если $\varphi(1-0)=f(\varphi(0))$).

Качественный анализ разностных уравнений с дискретным временем может быть основан на переходе к соответствующей (конечномерной) динамической системе и использовании богатейшего арсенала методов и результатов теории динамических систем (ДС). При исследовании разностных уравнений с непрерывным временем этот подход, естественно, также должен быть полезным. Однако принципиальное отличие и сложность состоят в том, что разностным уравнениям с непрерывным временем отвечают бесконечномерные динамические системы, фазовое пространство которых к тому же обычно является некомпактным.

Уравнение (23) индуцирует на пространстве начальных функций динамическую систему

$$\{C^0([0,1],I),\, \mathbb{Z}^+,\, S^i\}, \qquad \text{где} \quad S[\varphi]=f\circ\varphi. \tag{27}$$

Траектории этой динамической системы описываются формулой

$$S^i[\varphi]=f^i\circ\varphi, \qquad i\in\mathbb{Z}^+, \quad \varphi\in C^0([0,1],I), \tag{28}$$

и, следовательно, их поведение определяется одномерным отображением $f\colon I\to I$.

Взаимосвязь ДС (27) и уравнения (23) очевидна, а именно: *между траекториями ДС* (27) *и решениями уравнения* (23) *существует взаимно однозначное соответствие в том смысле, что*

$$S^i[\varphi](t)=x_\varphi(t+i) \qquad \textit{при каждом фиксированном } i\in\mathbb{Z}^+.$$

Таким образом, решение $x_\varphi(t)$ получается путем склейки функций $S^i[\varphi](t)$ и $S^{i+1}[\varphi](t)$ при каждом $i=0,1,2,\dots$ и может быть записано в виде

$$x_\varphi(t)=S^{[t]}[\varphi](\{t\}), \qquad t\in\mathbb{R}^+, \tag{29}$$

где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ — целая и дробная части числа соответственно. Следовательно, *асимптотическое поведение решений уравнения* (23) *может быть описано в терминах ω-предельных множеств траекторий ДС* (27).

Фазовое пространство $C^0([0,1],I)$, a priori снабженное C^0-метрикой (которая обычно используется для непрерывных функций), является некомпактным. Поэтому не исключено, что для каких-то φ соответствующие траектории $S^i[\varphi]$ ДС (27) не имеют компактных ω-предельных множеств в $C^0([0,1],I)$ (траектории "стремятся" покинуть фазовое пространство). Оказывается, *типична ситуация, когда траектории ДС* (27), *за исключением асимптотических к неподвижным точкам* (*а это функции вида* $\varphi \equiv \alpha$, *где* α — *неподвижная точка* f), *имеют пустые* ω-*предельные множества в фазовом пространстве* $C^0([0,1],I)$ (*а сама динамическая система не имеет аттрактора в* $C^0([0,1],I)$).

Компактные ω-предельные множества будут иметь только те траектории, которые являются компактными (как множества в $C^0([0,1],I)$). Все же траектории ДС (27) являются компактными тогда и только тогда, когда отображение f не имеет неустойчивых[3] траекторий [15]. Поэтому в пространстве всех динамических систем вида (27) (с топологией, индуцированной топологией пространства $C^0(I,I)$, которому принадлежит отображение f) множество динамических систем, все траектории которых компактны, является нигде не плотным.

Чтобы иметь возможность описывать асимптотическое поведение некомпактных траекторий, пополним фазовое пространство $C^0([0,1],I)$ полунепрерывными сверху функциями $\zeta\colon [0,1] \mapsto 2^I$ с помощью метрики

$$\rho(\zeta_1,\zeta_2) = \Delta(\operatorname{gr}\zeta_1, \operatorname{gr}\zeta_2), \tag{30}$$

где $\operatorname{gr}\zeta$ — график функции ζ и $\Delta(\cdot,\cdot)$ — расстояние Хаусдорфа между (замкнутыми) множествами. Обозначим так пополненное пространство с метрикой ρ через $C^\Delta([0,1],I)$. В пространстве $C^\Delta([0,1],I)$ сходимость последовательности функций ζ_i к некоторой функции ζ означает, что

$$\operatorname{Lt}_{i\to\infty} \operatorname{gr}\zeta_i = \operatorname{gr}\zeta, \tag{31}$$

где через Lt обозначен топологический предел последовательности множеств.

Нетрудно проверить, что ДС (27) равномерно непрерывна относительно метрики ρ. Следовательно, ДС (27) индуцирует (по непрерывности) на $C^\Delta([0,1],I)$ динамическую систему

$$\{C^\Delta([0,1],I),\ \mathbb{Z}^+,\ S^i\}, \qquad \text{где} \quad S[\varphi] = f\circ\zeta, \tag{32}$$

которую будем именовать расширенной ДС (здесь под суперпозицией непрерывной и полунепрерывной функций f и ζ понимается функция $(f\circ\zeta)(t) = \bigcup_{z\in\zeta(t)} f(z)$). Так как пространство $C^\Delta([0,1],I)$ компактно, каждая траектория $S^i[\varphi]$, $\varphi \in C^0([0,1],I)$, имеет непустое компактное ω-предельное множество в $C^\Delta([0,1],I)$, которое будем обозначать $\omega[\varphi]$.

Теперь после пополнения фазового пространства ДС (27) можно предложить содержательное определение аттрактора системы. Существует много различных версий понятия "аттрактор", которые отражают те или иные стороны коллективного поведения траекторий. Мы воспользуемся следующим определением [5], которое является естественным обобщением понятия "generic limit set", введенного в [2], на ДС с некомпактным фазовым пространством.

Определение 1. Под *аттрактором* ДС (27) на $C^k([0,1],I)$ будем понимать наименьшее замкнутое множество $\mathcal{A}^{(k)}$ в расширенном фазовом пространстве $C^\Delta([0,1],I)$ такое, что $\omega[\varphi] \subset \mathcal{A}^{(k)}$ для всех $\varphi \in C^k([0,1],I)$, за исключением множества первой категории (т.е. для почти всех $\varphi \in C^k([0,1],I)$).

Доказательство корректности такого определения аттрактора почти дословно повторяет соответствующее доказательство из [2], поскольку C^Δ обладает счетной базой.

[3]Траекторию точки x называем неустойчивой, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся точка x', δ-близкая к x, и $i' > 0$, для которых $|f^{i'}(x) - f^{i'}(x')| > \varepsilon$.

Заметим, что в силу определения

- аттрактор $\mathcal{A}^{(k)}$, $k \geq 0$, является инвариантным относительно действия расширенной ДС (32), а начальные функции φ, для которых $\omega[\varphi]$ содержится в $\mathcal{A}^{(k)}$, образуют в $C^k([0,1], I)$ резидуальное множество;
- $\mathcal{A}^{(k+1)} \subset \mathcal{A}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$

4. ω-ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ТИПИЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Итак, ДС (27) всегда имеет аттрактор в смысле определения 1. Движение на аттракторе задается расширенной ДС (32). Оказывается, что при достаточно общих условиях на f и φ аттрактор ДС (27) состоит из периодических траекторий (циклов) расширенной ДС (32).

Рассмотрим сначала случай, когда одномерное отображение f, задающее действие ДС (27) и (32), не имеет циклов сколь угодно большого периода, т.е. при некотором целом $m > 0$ $f \in F_m$, где

$$F_m = \{f \in C^0([0,1], I) \colon \operatorname{Per} f = \operatorname{Fix} f^m\},$$

$\operatorname{Per} f$ и $\operatorname{Fix} f$ обозначают соответственно множества периодических и неподвижных точек отображения f. Как известно, $F_m \neq \varnothing$, если и только если $m = 2^n$ с некоторым $n < \infty$. Динамические системы, отвечающие отображениям из F_{2^n} с любым $n < \infty$, называют простыми, у них все траектории асимптотически периодические, причем ω-предельное множество любой траектории — цикл периода 2^i, $i \leq n$.

Оказывается, что эти свойства одномерной динамической системы, задаваемой отображением f, наследуются бесконечномерной ДС (27).

Теорема 1. *Если $f \in F_{2^n}$, $n < \infty$, то каждая траектория ДС* (27) *является асимптотически периодической и ее ω-предельное множество — цикл периода 2^i, $i \leq n$, расширенной ДС* (32).

Доказательство теоремы 1 основывается на следующих утверждениях.

Лемма 1 [19]. *Если $f \in F_1$, то для любого множества $I' \subset I$ существует $\operatorname{Lt}_{i\to\infty} f^i(I')$.*

Лемма 2. *Если $f \in F_1$, то ω-предельное множество каждой траектории ДС* (27) *является неподвижной точкой ДС* (32).

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^0([0,1], I)$. Из определения сходимости в расширенном пространстве $C^\Delta([0,1], I)$ следует, что для ДС (27) ω-предельное множество $\omega[\varphi]$ траектории $S^i[\varphi] = f^i \circ \varphi$ будет неподвижной точкой ДС (32), если существует топологический предел последовательности графиков $\operatorname{gr} f^i \circ \varphi$, $i = 0, 1, \dots$, и тогда $\omega[\varphi] = \{\zeta\}$, где $\operatorname{gr} \zeta = \operatorname{Lt}_{i\to\infty} \operatorname{gr} f^i \circ \varphi$.

Чтобы показать это, воспользуемся таким фактом: если $\xi_i \in C^0([0,1], I)$, $i = 1, 2, \dots$, и для каждого $t \in [0,1]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\operatorname{Lt}_{i\to\infty} \xi_i(U_\varepsilon(t))$, где $U_\varepsilon(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap [0,1]$, то

$$\operatorname{Lt}_{i\to\infty} \operatorname{gr} \xi_i = \{(t, x) \in [0,1] \times I \colon x \in G_t\}, \qquad \text{где} \quad G_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{Lt}_{i\to\infty} \xi_i(U_\varepsilon(t)). \tag{33}$$

Соотношение (33) доказывается путем непосредственной проверки включения $\operatorname{Ls}_{i\to\infty} \operatorname{gr} \xi_i \subset \subset \{(t,x) \in [0,1] \times I \colon x \in G_t\} \subset \operatorname{Li}_{i\to\infty} \operatorname{gr} \xi_i$, где Ls и Li обозначают соответственно верхний и нижний топологические пределы последовательности множеств.

Таким образом, лемма будет доказана, если показать, что для каждого $t \in [0,1]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует предел $\operatorname{Lt}_{i\to\infty} (f^i \circ \varphi)(U_\varepsilon(t))$, а это немедленно вытекает из леммы 1.

Доказательство теоремы 1. Положим $g = f^{2^n}$, очевидно, $g \in F_1$. Наряду с ДС (32) рассмотрим ДС

$$\{C^\Delta([0,1], I),\, T,\, \mathbb{Z}^+\}, \qquad \text{где} \quad T[\varphi] = g \circ \varphi.$$

Так как $T[\varphi] = f^{2^n} \circ \varphi = S^{2^n}[\varphi]$, то утверждение теоремы 1 сразу же следует из леммы 2.

Следствие 1. *Если $f \in F_{2^n}$, $n < \infty$, то аттрактор ДС* (27) *на $C^k([0,1], I)$, $k \geq 0$, состоит из циклов ДС* (32), *причем их периоды являются делителями 2^n.*

В случае, когда у отображения f есть циклы сколь угодно большого периода, ДС (27) уже имеет траектории, отличные от асимптотически периодических. Пусть, например, для некоторой точки $x = x_*$ ее ω-предельное множество $\omega_f(x_*)$ при отображении f не является циклом, а начальная функция $\varphi_* \in C^0([0,1], I)$ такова, что $\varphi_*(t) \equiv x_*$ на некотором интервале $[t', t'']$, $t' < t''$. Тогда, какова бы ни была $\zeta \in \omega[\varphi_*]$, $\zeta(t) \equiv \text{const}$ при $t \in [t', t'']$, для любого $\beta \in \omega_f(x_*)$ существует $\zeta_\beta \in \omega[\varphi_*]$ со свойством $\zeta_\beta(t) \equiv \beta$ при $t \in [t', t'']$. Это означает, что динамика ДС (27) на $\omega[\varphi_*]$ "подчинена" динамике отображения f на $\omega_f(x_*)$ и, следовательно, $\omega[\varphi_*]$ также не является циклом.

Тем не менее при некоторых достаточно общих условиях [14, 15] асимптотически периодическими будут почти все траектории ДС (27). Чтобы сформулировать эти условия, нам в первую очередь потребуются множества

$$Q_f(x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{i\geq j} f^i(V_\delta(x))}, \qquad \text{где} \quad V_\delta(x) = (x-\delta, x+\delta) \cap I,$$

$$D(f) = \{x \in I\colon \operatorname{int} Q_f(x) \neq \varnothing\}.$$

Множество $Q_f(x)$ называют *областью влияния* точки $x \in I$ при отображении f. Важно отметить, что $f(Q_f(x)) = Q_f(x)$ и при этом

- $\operatorname{int} Q_f(x) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда траектория точки x при отображении f неустойчива;
- если же траектория точки x устойчива, то $\operatorname{int} Q_f(x) = \varnothing$ и $Q_f(x)$ совпадает с ω-предельным множеством $\omega_f(x)$ этой точки (конечно, возможно $Q_f(x) = \omega_f(x)$ и для точек с неустойчивой траекторией).

Множество $D(f)$ называют *сепаратором* отображения f. Согласно сказанному выше $f(D(f)) \subset D(f)$ и

- $D(f)$ состоит из тех и только тех точек $x \in I$, траектории которых неустойчивы при отображении f.

Нам также потребуются такие подмножества множеств $Q_f(x)$ и $D(f)$:

$$Q_f^+(x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{i>j} f^i(V_\delta^+(x))}, \qquad \text{где} \quad V_\delta^+(x) = [x, x+\delta) \cap I,$$

$$Q_f^-(x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{i>j} f^i(V_\delta^-(x))}, \qquad \text{где} \quad V_\delta^-(x) = (x-\delta, x] \cap I,$$

$$D_0(f) = D(f) \setminus \{x \in D(f)\colon Q_f^+(x) = Q_f^-(x) = Q_f(x)\}.$$

Теперь мы можем сформулировать условия на f и φ. Относительно нелинейности f предположим, что

(f) для любой точки $x \in I$ компоненты ее области влияния $Q_f(x)$ образуют либо цикл, либо цикл интервалов[4] и при этом периоды $p(x)$ этих циклов и циклов интервалов ограничены в совокупности при $x \in I$.

Из (f) следует, что для периодов $p(x)$ циклов и циклов интервалов, образованных компонентами областей влияния точек $x \in I$, существует наименьшее общее кратное $< \infty$.

[4] Набор замкнутых невырожденных попарно не пересекающихся по внутренности интервалов $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ таких, что $f(I_i) = I_{i+1 (\operatorname{mod} n)}$, называют циклом интервалов периода n отображения f.

Хотя условия (f) кажутся сравнительно сложными для проверки, они носят весьма общий характер. Пусть $\mathcal{F}$ — множество отображений $f \in C^0(I, I)$ со свойствами (f), а $\mathcal{F}_p$ — подмножество отображений из $\mathcal{F}$, для которых наименьшее общее кратное периодов $p(x)$, $x \in I$, равно p.

Относительно начальных функций φ будем предполагать, что

(φ1) если $\varphi(t) \equiv \mathrm{const}$ при $t \in [t', t'']$, $t' < t''$, то $\varphi([t', t'']) \not\subset D(f)$;

(φ2) если $\varphi(t)$ имеет экстремум в точке t_*, то $\varphi(t_*) \notin D_0(f)$.

Смысл этих условий состоит в том, чтобы гарантировать выполнение равенства

$$\bigcap_{\delta>0} \bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{i\ge j} (f^i \circ \varphi)(V_\delta(t))} = Q_f(\varphi(t)), \qquad t \in [0,1].$$

Подмножество функций $\varphi \in C^0([0,1], I)$ со свойствами (φ1), (φ2) обозначим $\Phi(f)$. Множество $\Phi(f)$ является достаточно массивным, а именно если $f \in \mathcal{F}$, то $\Phi(f)$ — открытое резидуальное множество в $C^1([0,1], I)$ [4].

Теорема 2 [14]. *Если $f \in \mathcal{F}_p$ и $\varphi \in \Phi(f)$, то ω-предельное множество $\omega[\varphi]$ траектории $S^i[\varphi]$ ДС* (27) *представляет собой цикл расширенной ДС* (32), *точнее, существует $n = n(f, \varphi) > 0$, являющееся делителем $2p$, такое, что*

$$\omega[\varphi] = \{f^\Delta \circ \varphi,\ f \circ f^\Delta \circ \varphi,\ f^{n-1} \circ f^\Delta \circ \varphi\}, \tag{34}$$

где $f^\Delta\colon I \to 2^I$ — полунепрерывная сверху функция

$$f^\Delta(x) = Q_{f^{2p}}(x), \qquad x \in I. \tag{35}$$

Поскольку для $f \in \mathcal{F}$ множество $\Phi(f)$ является, как уже отмечалось, открытым и резидуальным в $C^1([0,1], I)$, то из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Аттрактор ДС* (27) *на $C^k([0,1], I)$, $k \ge 1$, можно представить в виде*

$$\mathcal{A}^{(k)} = \overline{\bigcup_{\varphi\in\Phi(f)} \omega[\varphi]} = \overline{\bigcup_{\varphi\in\Phi(f)} \bigcup_{i=0}^{2p-1} f^i \circ f^\Delta \circ \varphi}. \tag{36}$$

Заметим, что множество $\Phi(f)$, $f \in \mathcal{F}$, содержит не все начальные функции, порождающие асимптотически периодические траектории ДС (27). Тривиальный пример — начальные функции вида $\varphi_-(t) \equiv \alpha_-$, где $x = \alpha_-$ — отталкивающая неподвижная точка отображения f; эти функции не принадлежат $\Phi(f)$, но являются неподвижными точками как для ДС (27), так и для ДС (32) и порождают стационарные траектории $S^i[\varphi_-](t) \equiv \alpha_-$, $i = 0, 1, \dots$

В заключение этого раздела отметим, что теорема 2 не только описывает поведение траекторий ДС (27), но и характеризует внутреннюю структуру индивидуальных "точек" траектории. С одной стороны, она говорит о том, что типичные траектории ДС (27) ведут себя относительно просто — они являются асимптотически периодическими и аттрактор системы состоит из периодических точек расширенной ДС (32). И в этом смысле ДС, индуцируемые разностными уравнениями с непрерывным временем вида (23), оказываются даже более простыми, нежели ДС, индуцируемые аналогичными разностными уравнениями с дискретным временем $x_{n+1} = f(x_n)$; как известно, типичные траектории последних могут и не быть (при сделанных предположениях относительно f) асимптотически периодическими. С другой стороны, теорема 2 показывает, что свойства каждого элемента траектории $(f^i \circ \varphi)(t)$ как функции из $[0,1]$ в I определяются свойствами, вообще говоря, разрывной функции $(f^\Delta \circ \varphi)(t)$, $t \in [0,1]$, и могут быть весьма сложными при больших i.

Положим

$$\mathcal{L}_f(x) = \{f^i(Q_f^{2p}(x)),\ i = 0, 1, \dots, p-1\}, \qquad x \in I,$$

$$\mathcal{L}^0(f) = \bigcup_{x \notin D(f)} \mathcal{L}_f(x) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{L}^*(f) = \bigcup_{x \in D(f)} \mathcal{L}_f(x).$$

Согласно сделанным ранее предположениям для любого $f \in \mathcal{F}$ и каждой точки $x \in I$ компоненты $Q_f(x)$ образуют цикл, если $x \notin D(f)$, и цикл интервалов, если $x \in D(f)$. Следовательно, множество $\mathcal{L}^*(f)$ состоит из замкнутых невырожденных интервалов, а множество $\mathcal{L}^0(f)$ является точечным.

Если при каждом $t \in [0,1]$ значение $\varphi(t)$ принадлежит бассейну некоторой (притягивающей) неподвижной точки $x = \alpha_+$ отображения f (и тогда $\varphi^{-1}(D(f)) = \varnothing$), то $(f^\Delta \circ \varphi)(t) \equiv \alpha_+$; это единственный случай, когда $(f^i \circ \varphi)(t)$ ведет себя просто, равномерно стремится при $i \to \infty$ к константе α_+ (заметим, что $\alpha_+ \in \mathcal{L}^0(f)$).

В противном случае (ввиду непрерывности φ) $f^\Delta \circ \varphi$ — полунепрерывная сверху функция, значениями которой на множестве $\varphi^{-1}(D(f))$ являются невырожденные замкнутые интервалы из множества $\mathcal{L}^*(f)$; а на каждом подынтервале из $[0,1] \setminus \varphi^{-1}(D(f))$ функция $f^\Delta \circ \varphi$ — тождественная константа и принимает значения из множества $\mathcal{L}^0(f)$.

Это означает, что для каждой начальной функции φ такой, что $\varphi^{-1}(D(f)) \neq \varnothing$, наклон графика функции $(f^i \circ \varphi)(t)$ в окрестности точек $t_* \in \varphi^{-1}(D(f))$ неограниченно возрастает (по модулю), когда $i \to \infty$, а амплитуда не убывает к нулю; точнее, в окрестности точки t_* график функции $(f^{2pk} \circ \varphi)(t)$ приближается при $k \to \infty$ к вертикальному отрезку $\mathcal{I} = I_* \times \{t_*\}$, где $I_* = Q_{f^p}(x_*) \in \mathcal{L}^*(f)$, $x_* = \varphi(t_*)$. Поэтому множество $\mathcal{L}^*(f)$ называем *спектром скачков* для решений уравнения (23), а множество $\varphi^{-1}(D(f))$ — *генератором асимптотических разрывов* индивидуального решения x_φ.

Как видим, множество $\varphi^{-1}(D(f))$ является основной характеристикой сложности поведения C^1-функций $(f^i \circ \varphi)(t)$ — элементов соответствующей траектории $S^i[\varphi]$ ДС (27), а значит, и решения x_φ исходного разностного уравнения. Случай, когда множество $\varphi^{-1}(D(f))$ бесконечно, является типичным. А именно это так, если отображение f имеет цикл периода > 2 и существует $t_* \in [0,1]$ такое, что $\varphi(t_*)$ принадлежит бассейну этого цикла [14]. Тогда согласно теореме 2 число незатухающих колебаний функции $(f^i \circ \varphi)(t)$ на интервале $[0,1]$ неограниченно возрастает при $i \to \infty$ и поведение $f^i \circ \varphi$ при $i \to \infty$, а следовательно и поведение решения $x_\varphi(t)$ при $t \to \infty$, можно назвать *хаотическим*.

Таким образом, *хаотическое поведение может иметь место и в динамических системах с простыми аттракторами, состоящими только из неподвижных точек и циклов, но в этих случаях сами "точки" аттрактора имеют очень сложную внутреннюю структуру.*

Остановимся очень схематично на некоторых особенностях хаотических решений. Геометрия графиков таких решений может быть очень сложной (см., например, [4]). Как известно, для одномерных отображений f разделитель $D(f)$ в типичных ситуациях является локально самоподобным множеством и, более того, может быть фрактальным. Понятно, что эти свойства, вообще говоря, наследуются множеством $\varphi^{-1}(D(f))$, что в свою очередь приводит к самоподобию или даже фрактальности графиков функций $\zeta_i = f^i \circ f^\Delta \circ \varphi$, $i = 0, 1, \dots, 2p-1$, из $\omega[\varphi]$. А в силу (29) и теоремы 2 имеем

$$\Delta\big(\mathrm{gr}\, x_\varphi(\tau + t), \mathrm{gr}\, \zeta_{[t] \bmod 2p}(\tau + t)\big) \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \tau \in [0,1],$$

и, следовательно, гладкая кривая $y = x_\varphi(t)$ ведет себя в определенном смысле нестандартно при увеличении t — стремится к самоподобному или фрактальному множеству $y = \zeta_{[t] \bmod 2p}(\tau + t)$, $\tau \in [0,1]$. Здесь особо выделяется случай, когда $D(f)$ содержит интервал, скажем, I' (что имеет место, если и только если у отображения f есть цикл интервалов, на котором имеется всюду плотная траектория). Тогда если $J_\varphi := \varphi^{-1}(\operatorname{int} I') \neq \varnothing$, то графики функций $\zeta_i \in \omega[\varphi]$, $i = 0, 1, \dots, 2p-1$, — это двумерные множества и, следовательно, кривая $y = x_\varphi(t)$ при больших t похожа на высокочастотную гармонику: при $T \to \infty$ она все более плотно заполняет прямоугольники $I' \times [t_1 + T, t_2 + T]$, где $[t_1, t_2] \subset J_\varphi$.

Наличие у решения x_φ указанного выше свойства осцилляции приводит к тому, что для любых сколь угодно близких $t', t'' \in J_\varphi$ найдется бесконечно возрастающая последовательность n_i такая, что значения $x_\varphi(t' + n_i)$ и $x_\varphi(t'' + n_i)$ отличаются на величину порядка $\operatorname{diam} I'$. Попадаем, как говорят, *за горизонт предсказуемости.* Поэтому описание таких решений на больших временах требует вероятностных методов (в этом случае теорема 2 дает, как видим, весьма скудную информацию). Общий подход к этой проблеме рассмотрен в [16, 17]. Он основан на использовании специальной метрики, "склеивающей" пространства детерминированных и случайных функций. Это позволяет при наличии у отображения f, задающего правую часть уравнения (1), абсолютно непрерывной инвариантной меры указать для почти каждой начальной функции φ случайный процесс (его распределения описываются в терминах инвариантной меры), к которому асимптотически стремится решение $x_\varphi(t)$ (детальное изложение можно найти в [3]). Такое свойство решений, как уже отмечалось, получило название *автостохастичность.* Согласно известной теореме Якобсона среди отображений, близких к квадратичным, отображения, имеющие гладкую инвариантную меру, не являются исключением. Следовательно, автостохастичность также не является исключением как для разностных уравнений вида (1), так и для сводящихся к ним краевых задач.

5. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ

Наряду с аттрактором важной "внешней" характеристикой динамических систем является топологическая энтропия.

Определение 2. Под *топологической энтропией* $\operatorname{ent} S_f$ ДС (27) будем понимать топологическую энтропию расширенной ДС (32).

Теорема 3. *Если отображение f имеет циклы только периодов 2^i, $0 \le i < \infty$, то $\operatorname{ent} S_f = 0$. Если отображение f имеет цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, то $\operatorname{ent} S_f = \infty$.*

Так как существование у отображения f цикла, период которого $\neq 2^i$, эквивалентно тому, что $\operatorname{ent} f > 0$, то вторую часть теоремы 3 можно сформулировать следующим образом: *если $\operatorname{ent} f > 0$, то $\operatorname{ent} S_f = \infty$.*

Следует еще заметить, что даже в том случае, когда $\operatorname{ent} f > 0$, при $f \in \mathcal{F}$ $\operatorname{ent} S_f\big|_{\mathcal{A}^{(1)}} = 0$, так как аттрактор ДС (27) в этом случае состоит из периодических траекторий.

Доказательство теоремы 3. Первая часть теоремы 3 сразу же вытекает из теоремы 1. Действительно, поскольку центр $\operatorname{Ce}(S_f)$ расширенной ДС (32) состоит только из периодических точек, то $\operatorname{ent} S_f\big|_{\operatorname{Ce}(S_f)} = 0$, а, с другой стороны, как известно, $\operatorname{ent} S_f = \operatorname{ent} S_f\big|_{\operatorname{Ce}(S_f)}$. Следовательно, $\operatorname{ent} S_f = 0$.

Для доказательства второй части теоремы 3 достаточно, например, предъявить функцию $\varphi_*\colon [0,1] \to I$ такую, что $\operatorname{ent} S_f\big|_{\omega[\varphi_*]} = \infty$. Опишем алгоритм построения такой функции.

Если мы имеем на $[0,1]$ последовательность замкнутых непересекающихся интервалов J_i, $i = 1, 2, \dots$, сходящуюся к некоторой точке из $[0,1]$, а также последовательность точек $c_i \in I$, $i = 1, 2, \dots$, сходящуюся к некоторой точке из I, то в качестве функции φ_* можно взять любую непрерывную функцию из $C^0([0,1], I)$, но такую, что $\varphi_*(t) = c_i$ при $t \in J_i$, $i = 1, 2, \dots$ Покажем, что c_i можно выбрать так, что $\operatorname{ent} S_f\big|_{\omega[\varphi_*]} = \infty$.

Если f имеет цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, \dots$, можно считать, не ограничивая общности, что f имеет цикл нечетного периода. Тогда найдется канторовское множество $K \subset I$, инвариантное относительно f, с $\operatorname{ent} f\big|_K > 0$, содержащее счетное множество плотных на K траекторий, “независимых” по Иванику [1]. Последнее означает, что существует счетное множество точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset K$ такое, что для прямого произведения отображений $f \times f \times \dots$, действующего на $K \times K \times \dots$, траектория, проходящая через точку $(x_1, x_2, \dots)$, плотна на $K \times K \times \dots$ Сам факт существования такого множества “независимых” траекторий следует хотя бы из того, что для некоторого $l > 0$ отображение f^l, как известно, полусопряжено с отображением сдвига на пространстве односторонних последовательностей с двумя символами. Теперь, чтобы получить искомую функцию φ_*, достаточно выбрать $c_i \in K$ так, чтобы их траектории были “независимыми” и последовательность c_i сходилась. Покажем это.

Лемма 3. *Для любого набора $a_i \in K$, $i = 1, 2, \dots$, существует $\zeta \in \omega[\varphi_*]$ такая, что $\zeta(t) \equiv a_i$ при $t \in J_i$, $i = 1, 2, \dots$*

Доказательство. Так как точки $c_i \in K$, $i = 1, 2, \dots$, выбраны независимыми, то траектория точки $c = (c_1, c_2, \dots)$ при отображении $f \times f \times \dots$ плотна в $K \times K \times \dots$ Поэтому для любого набора $a_i \in K$, $i = 1, 2, \dots$, найдется последовательность $n_1 < n_2 < \dots$ такая, что $f^{n_s}(c_i) \to a_i$ при $s \to \infty$. Это, в частности, означает, что для каждой сходящейся (в $C^{\Delta}([0,1], I)$) подпоследовательности последовательности $S_f^{n_s}[\varphi_*]$ ее предел $\zeta \in \omega[\varphi_*]$ обладает требуемым свойством $\zeta(t) \equiv a_i$ при $t \in J_i$, $i = 1, 2, \dots$

Лемма 4. *Каково бы ни было $E > 0$, справедливо неравенство*

$$\operatorname{ent} S_f\big|_{\omega[\varphi_*]} > E. \tag{37}$$

Доказательство. Согласно определению топологической энтропии

$$\operatorname{ent} S_f\big|_{\omega[\varphi_*]} = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\ln N(n, \varepsilon)}{n} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{ent} f\big|_K = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\ln M(n, \varepsilon)}{n}, \tag{38}$$

где $N(n, \varepsilon)$ — максимальное количество (n, ε)-разделенных $\zeta \in \omega[\varphi_*]$, т.е. таких, для которых

$$D_{n, S_f}(\zeta', \zeta'') := \max_{0 \le j \le n} \rho\big(S_f^j[\zeta'], S_f^j[\zeta'']\big) > \varepsilon,$$

и $M(n, \varepsilon)$ — максимальное количество (n, ε)-разделенных точек в K, т.е. точек, для которых

$$D_{n,f}(a', a'') := \max_{0 \le j \le n} |f^j(a') - f^j(a'')| > \varepsilon.$$

Нам потребуется также величина $N_J(n, \varepsilon)$, которая определяется как максимальное количество $\zeta \in \omega[\varphi_*]$, для любых двух из которых

$$D_{n, S_f, J}(\zeta', \zeta'') := \max_{0 \le j \le n} \Delta\big(\operatorname{gr} S_f^j[\zeta']\big|_J, \operatorname{gr} S_f^j[\zeta'']\big|_J\big) > \varepsilon, \qquad J \text{ — подмножество } [0,1].$$

Оценим величину $N(n, \varepsilon)$. Зафиксируем целое $r > E / \operatorname{ent} f\big|_K$ (напомним, что $\operatorname{ent} f\big|_K \ne 0$). Положим $\varepsilon_* = \frac{1}{2} \min_{1 \le i \le r} \operatorname{diam} J_i$. Для любого $\varepsilon < \varepsilon_*$ определим множество

$$J^{\varepsilon} = \bigcup_{i=1}^{r} J_{i,\varepsilon}, \qquad \text{где} \quad J_{i,\varepsilon} = [d_i' + \varepsilon, d_i'' - \varepsilon], \quad \text{если} \quad J_i = [d_i', d_i''].$$

При $\varepsilon < \varepsilon_*$ $D_{n, S_f}(\zeta', \zeta'') > \varepsilon$, как только $D_{n, S_f, J^{\varepsilon}}(\zeta', \zeta'') > \varepsilon$. Поэтому при $\varepsilon < \varepsilon_*$ любые две точки из $\omega[\varphi_*]$, (n, ε)-разделенные на J^{ε}, будут (n, ε)-разделенными и на $[0,1]$. Следовательно,

$$N(n, \varepsilon) \ge N_{J^{\varepsilon}}(n, \varepsilon) \qquad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_*. \tag{39}$$

Из леммы 3 вытекает, что

$$N_{J^{\varepsilon}}(n, \varepsilon) = \prod_{i=1}^{r} N_{J_{i,\varepsilon}}(n, \varepsilon). \tag{40}$$

Так как для любых $\zeta', \zeta'' \in \omega[\varphi_*]$

$$D_{n,S_f,J_{i,\varepsilon}}(\zeta', \zeta'') = D_{n,f}(\zeta'(t), \zeta''(t)) \qquad \text{при} \quad t \in J_{i,\varepsilon},$$

когда $\varepsilon < \varepsilon_*$ и $i \le r$, то из леммы 3 также следует, что при этом

$$N_{J_{i,\varepsilon}}(n, \varepsilon) = M(n, \varepsilon). \tag{41}$$

Из (39)–(41) заключаем, что

$$N(n, \varepsilon) \ge [M(n, \varepsilon)]^r \qquad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_*,$$

откуда ввиду (38) и выбора r следует (37).

Таким образом, для выбранной нами функции φ_* $\operatorname{ent} S_f\big|_{\omega[\varphi_*]} = \infty$, что и доказывает теорему 3.

Сделаем несколько замечаний.

1. Выбор точек $c_i \in K$, который был предложен для построения функции φ_*, позволяет, варьируя интервалы J_i, $i = 1, 2, \dots$, получить функцию φ_* класса C^k с любым $k \le \infty$.

2. Если ДС (32) имеет асимптотически периодические траектории, доказательство теоремы 3 можно несколько упростить. Пусть интервалы J_i, $i = 1, 2, \dots$, на $[0, 1]$ и точки c_i, $i = 1, 2, \dots$, в K, а также функция $\varphi \in C^0([0, 1], I)$, для которой $\varphi([0, 1]) \supset K$, уже выбраны. Если зафиксировать $r \ge 1$ и взять произвольную непрерывную функцию h, отображающую $[0, 1]$ на $[0, 1]$, монотонно возрастающую всюду, кроме интервалов J_i, где она постоянна и равна $\varphi^{-1}(c_i)$ (или одному из этих значений, если их несколько), то можно построить функцию

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} \varphi(h(t)), & t \in [0, 1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{r} \operatorname{int} J_i, \\ c_i, & t \in J_i, \ i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Поведение траектории $S_f^j[\varphi_r]$, рассматриваемой только для $t \in [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^r \operatorname{int} J_i$, эквивалентно поведению траектории $S_f^j[\varphi]$, а на каждом из интервалов J_i, $i = 1, \dots, r$, совпадает с поведением траектории $f^j(c_i)$ отображения f. В частности, если $\omega[\varphi]$ состоит для простоты из одной (неподвижной) точки, то тогда отображение S_f на $\omega[\varphi_r]$ топологически сопряжено с прямым произведением r экземпляров отображения f на $K \times \ldots \times K$ и, следовательно, $\operatorname{ent} S_f\big|_{\omega[\varphi_r]} = r \cdot \operatorname{ent} f\big|_K$.

3. Вне рассмотрения остался только один (исключительный) случай, когда $\operatorname{ent} f = 0$, но f имеет циклы периодов 2^k с любым $k \ge 0$. В остальных случаях топологическая энтропия динамической системы (27) может принимать только два значения 0 и ∞ и, следовательно, она малоинформативна. Поэтому вместо топологической энтропии, видимо, целесообразно привлекать другие понятия, характеризующие разнообразие поведения траекторий, например такие, как ε-энтропия, ε-емкость, используемые для описания массивности множеств в функциональных пространствах.

4. Если бы мы рассмотрели на пространстве полунепрерывных сверху функций динамическую систему, задаваемую не одномерным, а, например, двумерным отображением таким, как отображения Хенона или Лози, то, очевидно, рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3, позволили бы доказать, что топологическая энтропия такой динамической системы также будет равна ∞, когда у отображения имеется странный аттрактор.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Что же дают редукция краевых задач к разностным уравнениям и последующий переход к динамической системе, какие выводы позволяют сделать? Коль скоро связь между решениями краевой задачи и разностного уравнения известна, то перенесение на исходную задачу свойств соответствующего разностного уравнения обычно не встречает существенных трудностей. В простейших случаях все сводится к чисто технической процедуре переформулировки результатов, хотя при этом выявляется немало интересных особенностей. Примерами таких простейших случаев как раз и служат приведенные в разд. 2 краевые задачи, за исключением, возможно, задачи для волнового уравнения (задачи из примеров 1 и 4 в несколько более общей постановке исследованы в [6, 7]).

Отметим некоторые особенности упомянутых краевых задач, вытекающие из свойств соответствующих динамических систем. Для задачи, рассмотренной в примере 1, из теоремы 2 сразу же следует такой результат:

Решение почти всегда (т.е. для почти всех f и φ) является асимптотически периодическим (по t); точнее, при $f \in \mathcal{F}_p$ решение $w_\varphi(x,t)$ краевой задачи (4), (5), *удовлетворяющее начальному условию* (7) *с* $\varphi \in \Phi(f)$, *стремится к периодической полунепрерывной сверху функции*

$$P_\varphi(x,t) = f^{i(x,t)} \circ f^\Delta \circ \varphi(x,t), \qquad \text{где} \quad i(x,t) = [x+t] \bmod 2p \quad \text{и} \quad f^\Delta(z) = Q_{f^{2p}}(z),$$

в том смысле, что

$$\Delta\big(\operatorname{gr} w_\varphi(x,T), \operatorname{gr} P_\varphi(x,T)\big) \to 0 \qquad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Этот результат говорит, в частности, об определенной однотипности в поведении решений задачи (4), (5), поскольку оно (поведение) определяется одним и тем же отображением f (хотя, конечно, и зависит от начальных данных). Этот факт особенно четко проявляется в случае, когда f — унимодальное отображение. Тогда независимо от $\varphi \in \Phi(f)$ предельные функции соответствующих решений имеют один и тот же период (равный p или $2p$); генератор асимптотических скачков $\varphi^{-1}(D(f))$ обладает одной и той же геометрической структурой (например, имеет одинаковую фрактальную размерность для всех φ); каждое решение $w_\varphi(x,t)$ "отслеживает" весь спектр скачков $\mathcal{L}^*(f)$, задаваемый отображением f; если у f существует гладкая инвариантная мера, то все решения являются автостохастическими; если обратиться к более детальному описанию свойств решений, то это перечисление можно продолжить.

Теорема 2 также без труда переносится на краевые задачи из примеров 2 и 4. Но при этом в соответствующей формулировке для второй из них роль отображения f, общего для всех начальных функций $\varphi \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, будет играть отображение $f_{[\varphi]}\colon z \mapsto f(z) + \gamma_{[\varphi]}$, которое уже зависит от начальной функции и будет одним и тем же только на подмножествах $\Phi_\gamma = \{\varphi \in C^1([0,1],\mathbb{R})\colon \varphi(1) - f(\varphi(0)) = \gamma\}$. Поэтому асимптотическое поведение решений задачи (4), (14), вообще говоря, не будет однотипным и даже при унимодальном f задача (4), (14) обладает всем богатством решений от асимптотически постоянных до автостохастических. Более того, бифуркации решений при изменении начальных условий характеризуются теми же универсальными свойствами, что и бифуркации в однопараметрических семействах одномерных отображений (см., в частности, [12, 18]).

При рассмотрении краевой задачи из примера 3, сводящейся к неавтономному разностному уравнению, уже нельзя напрямую применить теоремы 1 и 2. Однако их можно очевидным образом использовать, если функция $d(t)$, задающая неавтономность, является периодической с целочисленным периодом.

Здесь мы рассмотрели только в самых общих чертах подход к исследованию краевых задач, основанный на изложенном выше методе редукции и привлечении теории динамических систем. На простейших примерах мы попытались показать его широкие возможности, позволяющие не только описывать очень сложную пространственно-временную динамику, но и понять, какие математические механизмы "ответственны" за те или иные "нестандартные" эффекты, возникающие в задачах. Этот подход ожидает своего развития для краевых задач, сводящихся к уравнениям более сложным, нежели уравнения вида (1) (разностным или "родственным" им уравнениям, скажем дифференциально-функциональным), а также для краевых задач, близких к сводимым. Дальнейшие усилия, направленные на развитие теории краевых задач такого типа, в частности на создание "стандартной" теории возмущений, позволят предложить новые перспективные подходы к исследованию и существенно более сложных эволюционных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Iwanik A.* Independent sets of transitive points // Dynamical systems and ergodic theory. Warszawa: Pol. Sci. Publ., 1989. P. 277–282. (Banach Center Publ.; V. 23).
2. *Milnor J.* On the concept of attractor // Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 177–195.
3. *Romanenko E.Yu.* On chaos in continuous difference equations // Dynamical systems and applications. Singapore: World Sci., 1995. P. 617–630. (World Sci. Ser. Appl. Anal.; V. 4).
4. *Romanenko E.Yu.* On attractors of continuous difference equations // Comput. Math. Appl. 1999. V. 36, N 10/12. P. 377–390.
5. *Романенко Е.Ю., Шарковский А.Н.* От одномерных к бесконечномерным динамическим системам: идеальная турбулентность // Укр. мат. журн. 1996. Т. 48, №12. С. 1604–1627 (на укр. яз.). Пер. на англ.: Ukr. Math. J. 1996. V. 48, N 12. P. 1817–1842.
6. *Романенко Е.Ю., Шарковский А.Н.* Динамика решений простейших нелинейных краевых задач // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, №6. С. 810–826.
7. *Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N.* From boundary value problems to difference equations: A method of investigation of chaotic vibrations // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1999. V. 9, N 7. P. 1285–1306.
8. *Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N., Vereikina M.B.* Self-structuring and self-similarity in boundary value problems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1995. V. 5, N 5. P. 1407–1418; Thirty years after Sharkovskii's theorem: New perspectives. Singapore: World Sci., 1995. P. 145–156.
9. *Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N., Vereikina M.B.* Structural turbulence in boundary value problems // Control of oscillations and chaos. St. Petersburg, 1997. P. 492–497.
10. *Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N., Vereikina M.B.* Self-structuring and self-stochasticity in difference equations and some boundary value problems // Self-similar systems: Proc. workshop. Dubna: JINR, 1999. P. 237–250.
11. *Sharkovsky A.N.* Ideal turbulence in an idealized time-delayed Chua's circuit // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1994. V. 4, N 2. P. 303–309.
12. *Sharkovsky A.N.* Universal phenomena in some infinite-dimensional dynamical systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1995. V. 5, N 5. P. 1419–1425; Thirty years after Sharkovskii's theorem: New perspectives. Singapore: World Sci., 1995. P. 157–164.
13. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989. 216 с. Пер. на англ.: *Sharkovsky A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G., Fedorenko V.V.* Dynamics of one-dimensional mappings. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 262 p. (Math. and Appl.; V. 407).
14. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наук. думка, 1986. 280 с. Пер. на англ.: *Sharkovsky A.N., Maistrenko Yu.L., Romanenko E.Yu.* Difference equations and their applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. 358 p. (Math. and Appl.; V. 250).
15. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Асимптотическая периодичность решений разностных уравнений с непрерывным временем // Укр. мат. журн. 1987. Т. 39, №1. С. 123–129.
16. *Sharkovsky A.N., Romanenko E.Yu.* Ideal turbulence: Attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2, N 1. P. 31–36.
17. *Шарковский А.Н., Романенко Е.Ю.* Автостохастичность: аттракторы детерминированных задач могут содержать случайные функции // Доп. НАН Укр. 1992. №10. С. 33–37 (на укр. яз.).
18. *Sharkovsky A.N., Sivak A.G.* Universal phenomena in solution bifurcations of some boundary value problems // J. Nonlin. Math. Phys. 1994. V. 1, N 2. P. 147–157.
19. *Федоренко В.В.* Топологический предел траекторий интервала простейших одномерных динамических систем // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, №3. С. 425–430.