V. A. Talyzin, O. A. Kedun, Управление товарными запасами на двух складах при переменной цене товара в условиях дефицита,
*Issled. Inform.*, 2007, Issue 12, 177–186

https://www.mathnet.ru/eng/ipi198

# УПРАВЛЕНИЕ ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ НА ДВУХ СКЛАДАХ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ЦЕНЕ ТОВАРА В УСЛОВИЯХ ДЕФИЦИТА

**В. А. Талызин, О. А. Кедун**

## Постановка задачи

В работах [1, 2] сформулированы и решены задачи управления одно-номенклатурными товарными запасами на нескольких складах при неизменной цене товара независимо от объема завозимой на склады партии товара. Для практики представляет интерес случай, когда при закупке товара у поставщиков больше определенного количества вводятся скидки, т.е. стоимость единицы товара зависит от приобретенного объема товара. В таких условиях иногда выгоднее превысить оптимальный размер партии, определяемый в классических моделях, чтобы воспользоваться преимуществами предоставляемой скидки.

Рассмотрим постановку такой задачи на примере двух складов в условиях, когда допускается дефицит товара.

В течение некоторого периода $T$ на склады должен быть поставлен товар в объеме $Q$ единиц, исходя из прогнозируемого спроса на товар, который в этот период предполагается стабильным. Завоз товара от поставщиков на любой склад осуществляется мгновенно партиями объема $s$ единиц с постоянным интервалом поставок $\tau < T$ (рис. 1).

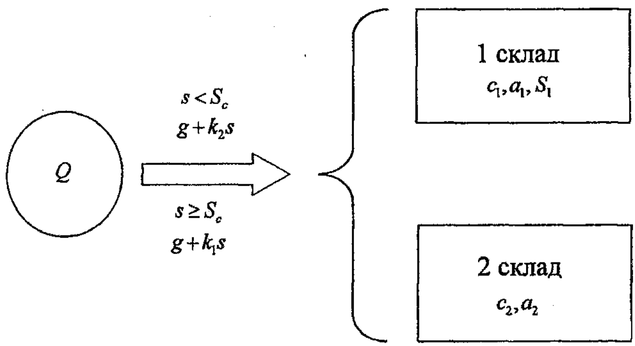


Рис. 1

Издержки хранения одной единицы товара в единицу времени (удельные издержки) равны $c_1$ денежных единиц на первом складе и $c_2$ -

на втором складе. Считается, что выполняется условие: $c_1 < c_2$. Имеются также фиксированные расходы на хранение товара, не зависящие от объема хранимого товара (например, плата за аренду помещений). Они составляют $a_1$ и $a_2$ денежных единиц для первого и второго склада соответственно.

Емкость первого склада ограничена $S_1$ единицами товара, а суммарный объем двух складов считается достаточным для решения задачи. При реализации товара склады могут освобождаться от него только поочередно.

Расходы, связанные с заказом и доставкой товара на склады, зависят от объема $s$ завозимой партии:

$$f(s)=\begin{cases} g+k_1 s, & \textit{при} \quad 0<s<S_c, \\ g+k_2 s, & \textit{если} \quad s \geq S_c. \end{cases}$$

Здесь $g$ - фиксированные затраты на поставку товара, не зависящие от объема $s$ партии, $k_1, k_2$ $(k_1 > k_2)$ - различные стоимости единицы товара, $S_c$ - пороговое значение объема партии, при котором изменяется цена единицы товара.

Удельные потери из-за отсутствия товара на складах составляют $c_\partial$ денежных единиц. Считается, что накопленный дефицит товара "погашается" мгновенно после поставки очередной партии товара.

Требуется найти объем $s$ завозимой партии товара так, чтобы суммарные издержки, связанные с заказом, доставкой, хранением и потерями из-за дефицита за весь период $T$, были минимальны.

**Математическая модель**

Сформулированные допущения задачи позволяют найти издержки, связанные с хранением товара объема $s$ на двух складах при условии, что вначале освобождается от товара первый склад, а затем – второй (рис. 2):

$$I_1=\left(c_1(2S_1 z-S_1^2)+c_2(z-S_1)^2\right)\frac{T}{2s},$$

где $z$ - максимальный объем товара на двух складах.

При другом порядке освобождения складов указанные издержки определятся по формуле:

$$I_2=\left(c_1 S_1^2+c_2(z^2-S_1^2)\right)\frac{T}{2s}.$$

После несложных преобразований можно получить

$$I_1-I_2=2S_1(z-S_1)(c_1-c_2).$$

Поскольку по условию $c_1 - c_2 < 0$ и верно неравенство $z - S_1 > 0$, то доказано следующее утверждение: при условии $c_1 < c_2$ минимальные издержки хранения за время $T$ будут в том случае, когда вначале освобождается от товара второй склад, а затем – первый.

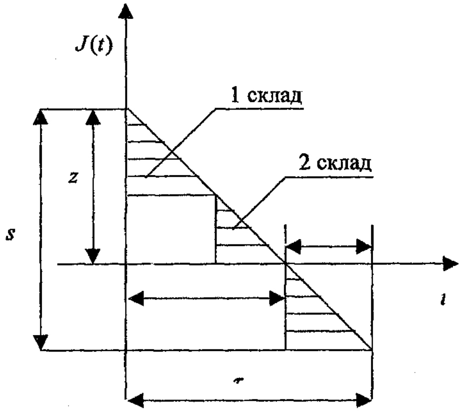


Рис. 2

После формализации содержательной постановки задачи при указанном порядке освобождения складов суммарные затраты за время $T$ будут выражаться разрывной функцией двух переменных $s, z$, вид которой зависит от соотношения величин $S_1$ и $S_c$.

Если выполняется неравенство $S_1 < S_c$, то данная функция имеет две точки разрыва по переменной $s$:

$$C(s,z) = \begin{cases} C_1(s,z) & \textit{для} \quad s \le S_1, \\ C_2(s,z) & \textit{для}\ S_1 < s < S_c, \\ C_3(s,z) & \textit{для}\ s \ge S_c, \end{cases}$$

где

$$C_1(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_1 Q + a_1 + c_1\frac{z^2 T}{2s} + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s},$$

$$C_2(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_1 Q + a_1 + c_1\frac{(2z - S_1)S_1 T}{2s} + c_2\frac{(z-S_1)^2 T}{2s} + a_2 + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s},$$

$$C_3(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1\frac{(2z - S_1)S_1 T}{2s} + a_2 + c_2\frac{(z-S_1)^2 T}{2s} + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s}.$$

При условии $S_1 = S_c$ целевая функция имеет одну точку разрыва первого рода:

$$C(s,z) = \begin{cases} C_1(s,z) & \text{для} \quad s < S_1 = S_c, \\ C_2(s,z) & \text{для}\ s = S_c, \\ C_3(s,z) & \text{для}\ s > S_c, \end{cases}$$

где

$$C_1(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_1 Q + a_1 + c_1\frac{z^2 T}{2s} + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s},$$

$$C_2(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1\frac{z^2 T}{2s} + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s},$$

$$C_3(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1\frac{(2z-S_1)S_1 T}{2s} + a_2 + c_2\frac{(z-S_1)^2 T}{2s} + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s}.$$

Наконец, для случая, когда выполняется условие $S_1 > S_c$, целевая функция вновь имеет две точки разрыва:

$$C(s,z) = \begin{cases} C_1(s,z) & \text{для} \quad s < S_1, \\ C_2(s,z) & \text{для}\ S_1 \le s \le S_c, \\ C_3(s,z) & \text{для}\ s > S_c, \end{cases}$$

где

$$C_1(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_1 Q + a_1 + c_1\frac{z^2 T}{2s} + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s},$$

$$C_2(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1\frac{z^2 T}{2s} + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s},$$

$$C_3(s,z) = g\frac{Q}{s} + k_2 Q + a_1 + c_1\frac{(2z-S_1)S_1 T}{2s} + a_2 + c_2\frac{(z-S_1)^2 T}{2s} + c_\partial\frac{(s-z)^2 T}{2s}.$$

Наименьшие значения данных функций достигаются либо в точках разрыва $S_1, S_c$, либо в двух стационарных точках отдельных ветвей функций $(s^o, z^o)$, $(s^*, z^*)$, координаты которых определяются из следующих выражений:

$$s^o = \sqrt{\frac{2gQ}{c_1\rho_1 T}}, \qquad z^o = \rho_1 s^o,$$

$$s^* = \sqrt{\frac{2gQ}{c_2 \rho_2 T} + c_\delta S_1^2}, \quad z^* = \rho_2 (c_\delta S_1 + s^*).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\rho_1 = \frac{c_\partial}{c_\partial + c_1}, \qquad \rho_2 = \frac{c_\partial}{c_\partial + c_2}, \qquad c_\delta = \frac{c_2 - c_1}{c_\partial} > 0.$$

В зависимости от сочетания числовых значений исходных данных возможны различные варианты решения задачи.

Для геометрической интерпретации выразим целевую функцию как функцию одной переменной $s$ путем подстановки зависимости $z = \rho_1 s$ в ветвь $C_1(s,z)$, а $z = \rho_2(c_\delta S_1 + s)$ - в ветви $C_2(s,z)$ и $C_3(s,z)$. Тогда полученную разрывную функцию $C(s)$ можно будет изобразить графически в двух плоскостях $\pi_1$ и $\pi_2$ (рис. 3), задаваемых уравнениями $z = \rho_1 s$ и $z = \rho_2(c_\delta S_1 + s)$ соответственно. Например, один из возможных вариантов, когда $S_1 < S_c$, представлен на рис. 4.

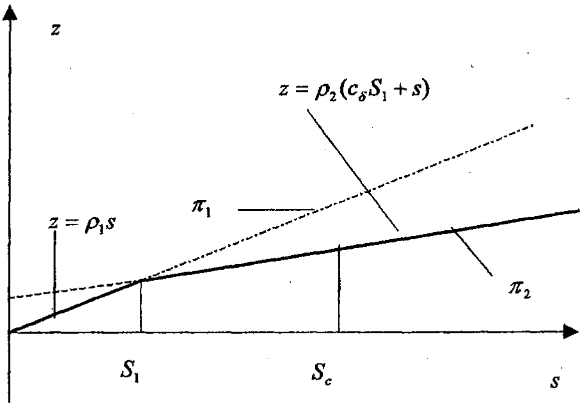


Рис. 3

В данном случае наилучший объем партии $s_{onm} = s^o$, т.е. для хранения товара используется только часть первого склада и товар закупается по цене $k_1$.

## Алгоритм решения задачи

Рассмотрим вначале случай, когда выполняется условие $S_1 < S_c$. По известным исходным данным $g, Q, T, c_1, c_2, c_\partial, a_1, a_2, k_1, k_2, S_1, S_c$ оптимальное решение задачи находится в следующей последовательности.

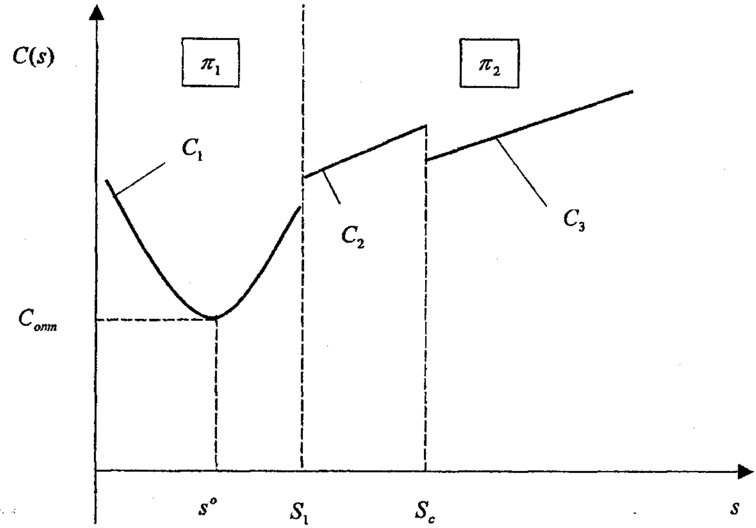


Рис. 4

1. Вычисляются величины:

$$f_1 = s^o = \sqrt{\frac{2gQ}{c_1\rho_1 T}},\quad f_2 = s^* = \sqrt{\frac{2gQ}{c_2\rho_2 T} + c_\delta S_1^2},\quad f_3 = C_1(s^o, z^o),$$

$$f_4 = C_2(s^*, z^*),\quad f_5 = C_3(s^*, z^*),\quad f_6 = C_1(S_1, z_1),\quad f_7 = C_3(S_c, z_c),$$

где $z_1 = \rho_1 S_1$, $z_c = \rho_2(c_\delta S_1 + S_c)$, а значения функций $C_1(s,z), C_2(s,z), C_3(s,z)$ определяются по формулам для случая $S_1 < S_c$.

2. Если $f_1 \le S_1$, то при выполнении неравенства $f_3 \le f_7$ оптимальным решением является: $s_{опт} = s^o, z_{опт} = z^o$. Минимальные суммарные затраты $C_{опт} = f_3$ будут при частичной загрузке первого склада, а товар приобретается по цене $k_1$ за единицу товара.

При выполнении неравенства $f_3 > f_7$ решением будет $s_{опт} = S_c, z_{опт} = z_c$. В этом случае первый склад загружается полностью, часть товара для хранения размещается во втором складе и товар приобретается по цене $k_2$. Минимальные суммарные затраты равны $C_{опт} = f_7$.

3. Если $f_1 > S_1$ и $f_2 \le S_1$, то при справедливости неравенства $f_6 \le f_7$ наилучшим решением будет $s_{опт} = S_1, z_{опт} = z_1, C_{опт} = f_6$. Первый склад загружается полностью, второй склад не используется и товар

закупается по цене $k_1$. В противном случае, когда $f_6 > f_7$, оптимальным решением является $s_{опт} = S_c, z_{опт} = z_c, C_{опт} = f_7$.

4. В случае, когда $f_1 > S_1$ и $S_1 \le f_2 < S_c$, проверяется условие $f_6 \le f_4$. Если оно верно и справедливо неравенство $f_4 \le f_7$, то наилучшим решением будет $s_{опт} = S_1, z_{опт} = z_1, C_{опт} = f_6$. В противном случае, когда верно неравенство $f_4 > f_7$ при справедливости условия $f_6 \le f_7$, решением является $s_{опт} = S_1, z_{опт} = z_1$, $C_{опт} = f_6$, а при $f_6 > f_7$ оптимальным решением будет $s_{опт} = S_c, z_{опт} = z_c, C_{опт} = f_7$.

5. Если $f_1 > S_1$, $S_1 \le f_2 < S_c$ и верно условие $f_6 > f_4$, то проверяется неравенство $f_4 \le f_7$. При его выполнении наилучшим решением является $s_{опт} = s^*, z_{опт} = z^*$ с суммарными затратами $C_{опт} = f_4$. Если же $f_4 > f_7$, то в качестве решения берется $s_{опт} = S_c, z_{опт} = z_c, C_{опт} = f_7$.

6. Наконец, если $f_1 > S_1$ и $f_2 > S_c$, то следует проверить условие $f_6 \le f_5$. При его выполнении решением задачи является $s_{опт} = S_1, z_{опт} = z_1, C_{опт} = f_6$, а в противном случае $s_{опт} = s^*, z_{опт} = z^*$, $C_{опт} = f_5$. В последнем случае первый склад загружается полностью, второй – частично, и товар покупается по цене $k_2$.

Рассмотрим второй случай, когда $S_1 = S_c$ и целевая функция имеет только одну точку разрыва. По-прежнему будем использовать ранее вычисленные постоянные величины $f_i, i = \overline{1,7}$.

1. При выполнении неравенства $f_1 \le S_1$ проверяется условие $f_3 \le f_7$. Если оно выполняется, то в качестве решения берется $s_{опт} = s^o, z_{опт} = z^o, C_{опт} = f_3$. В противном случае решением является $s_{опт} = S_c, z_{опт} = z_c, C_{опт} = f_7$.

2. Если $f_1 > S_1$ и $f_2 \ge S_1$, то проверяется выполнение неравенства $f_6 \le f_5$. Когда оно верно, решением задачи будет $s_{опт} = S_1, z_{опт} = z_1, C_{опт} = f_6$, а когда не выполняется - $s_{опт} = s^*, z_{опт} = z^*$ $, C_{опт} = f_5$.

3. При справедливости неравенств $f_1 > S_1$, $f_2 < S_1$ оптимальным решением всегда будет $s_{опт} = S_1, z_{опт} = z_1$. Остается проверить условие $f_6 \le f_7$ для определения минимальных суммарных затрат. Если последнее неравенство выполняется, то $C_{опт} = f_6$, а в противном случае $C_{опт} = f_7$.

Наконец, рассмотрим третий случай, когда выполняется условие $S_1 > S_c$. Заметим, что в этом случае функции $C_1, C_2$ имеют общую точку минимума $(s^o, z^o)$. Дополнительно к ранее вычисленным постоянным определяем величины:

$$f_8 = C_2(S_c, z_c), \quad f_9 = C_2(s^o, z^o), \quad f_{10} = C_3(s^*, z^*), \quad f_{11} = C_2(S_1, z_1).$$

1. Если выполняется условие $f_1 \le S_c$, то осуществляется проверка неравенства $f_2 \le S_c$.

2. В случае, когда оно верно, тестируется условие $f_3 \le f_8$. При справедливости этого неравенства в качестве решения принимается $s_{опт} = s^o, z_{опт} = z^o$, $C_{опт} = f_3$, а в противном случае $s_{опт} = S_c, z_{опт} = z_c, C_{опт} = f_8$.

3. В том случае, когда $f_2 > S_c$, проверяется неравенство $f_2 \le S_1$. Если оно выполняется, то тестируется условие $f_3 \le f_8$. При его справедливости в качестве решения принимается $s_{опт} = s^o, z_{опт} = z^o$, $C_{опт} = f_3$, а иначе $s_{опт} = S_c, z_{опт} = z_c, C_{опт} = f_8$.

4. Если выполняется условие $f_2 > S_1$, то проверяется условие $f_3 \le f_{10}$. При его справедливости оптимальным решением является $s_{опт} = s^o, z_{опт} = z^o, C_{опт} = f_3$, а в противном случае $s_{опт} = s^o, z_{опт} = z^o$, $C_{опт} = f_{10}$.

5. Если $f_1 > S_c$ и $f_1 \le S_1$, то проверяется условие $f_2 \le S_1$ и при его выполнении решением будет $s_{опт} = s^o, z_{опт} = z^o, C_{опт} = f_9$. В противном случае тестируется неравенство $f_9 \le f_{10}$. Если оно верно, то решением является $s_{опт} = s^o, z_{опт} = z^o$, $C_{опт} = f_9$, а если оно не выполняется, то за решение задачи берется $s_{опт} = s^*$, $z_{опт} = z^*$, $C_{опт} = f_{10}$.

6. Если при $f_1 > S_c$ справедливо $f_1 > S_1$, то выполняется проверка неравенства $f_2 \le S_1$. В случае его справедливости оптимальным решением задачи будет $s_{опт} = S_1, z_{опт} = z_1, C_{опт} = f_{11}$. В противном случае, т.е. при $f_2 > S_1$, проверяется условие $f_{11} \le f_{10}$. Если оно выполняется, то решение $s_{опт} = S_1, z_{опт} = z_1, C_{опт} = f_{11}$, а иначе $s_{опт} = s^*, z_{опт} = z^*$, $C_{опт} = f_{10}$.

### Численные примеры

**Задача 1**. Имеются следующие исходные данные по управлению запасами на двух складах: $T$ = 2 года, $Q$ =480 тонн, $g$ = 1000 руб, $k_1$ = 10 руб, $k_2$ =9 руб, $c_1$ =20 руб, $c_2$ =30 руб, $c_д$ =25 руб, $a_1$ =1000 руб, $a_2$ =1500 руб, $S_1$ =6000 кг, $S_c$ =10000 кг.

В данном случае $S_1 < S_c$ и реализуется первая схема описанного алгоритма. С этой целью вычисляются следующие величины: $\rho_1 = 0{,}555$, $\rho_2 = 0{,}454$, $c_\delta = 0{,}400$, $f_1 = s^o = 6572{,}67$ (кг), $z^o = 3651{,}45$ (кг), $z_c = 5636{,}36$ (кг), $f_2 = s^* = 7042{,}73$ (кг), $z^* = 4292{,}15$ (кг), $f_3 = 4947059$ (руб), $f_4 = 4939057$ (руб), $f_6 = 4947666$ (руб), $f_7 = 4433772$ (руб).

Поскольку выполняются неравенства $f_1 = 6572{,}67 > S_1 = 6000$, $S_1 < f_2 < S_c = 10000$ и $f_6 > f_4$, то в соответствии с п. 5 алгоритма проверяется неравенство $f_4 \le f_7$. Так как оно не выполняется, то в качестве оптимального решения берется $s_{опт} = S_c = 10000$ (кг), $z_{опт} = z_c = 5636{,}36$ (кг), $C_{опт} = f_7 = 4433772$ (руб). Здесь нужно воспользоваться преимуществами предоставляемой скидки и партию товара приобрести в объеме порогового значения $S_c = 10000$ (кг).

**Задача 2.** Рассмотрим задачу управления товарными запасами на двух складах для следующих исходных данных: $T$ = 3 года, $Q = 360$ тонн, $g = 2000$ руб, $k_1 = 1$ руб, $k_2 = 0{,}9$ руб, $c_1 = 80$ руб, $c_2 = 90$ руб, $c_\partial = 70$ руб, $a_1 = 2500$ руб, $a_2 = 3000$ руб, $S_1 = S_c = 3000$ кг.

Выполняется условие $S_1 = S_c$ и используется вторая схема описанного алгоритма. Для этого вычисляются следующие величины: $\rho_1 = 0{,}467$, $\rho_2 = 0{,}437$, $c_\delta = 0{,}1428$, $f_1 = s^o = 3585{,}69$ (кг), $z^o = 1673{,}32$ (кг), $z_c = 1500{,}00$ (кг), $f_2 = s^* = 3670{,}99$ (кг), $z^* = 1793{,}56$ (кг), $f_3 = 764096$ (руб), $f_5 = 737551$ (руб), $f_6 = 771250$ (руб).

В данном случае верны неравенства $f_1 > S_1 = 3000$ и $f_2 > S_1$. Поэтому по п. 2 второй схемы алгоритма проверяется неравенство $f_6 \le f_5$. Оно не выполняется, отсюда наилучшим решением является $s_{опт} = s^* = 3670{,}99$ (кг), $z_{опт} = z^* = 1793{,}56$ (кг), $C_{опт} = f_5 = 737551$ (руб). Для хранения товара используются оба склада и товар приобретается по цене 0,9 руб за единицу товара.

**Задача 3.** Имеются следующие исходные данные в задаче управлении запасами на двух складах: $T$ = 2 года, $Q = 200$ тонн, $g = 2000$ руб, $k_1 = 2$ руб, $k_2 = 1{,}9$ руб, $c_1 = 100$ руб, $c_2 = 120$ руб, $c_\partial = 130$ руб, $a_1 = 2500$ руб, $a_2 = 3000$ руб, $S_1 = 2800$ кг, $S_c = 2500$ кг.

В этом случае требуется воспользоваться третьей схемой алгоритма, поскольку выполняется условие $S_1 > S_c$.

Вычисляются следующие величины: $\rho_1 = 0{,}565$, $\rho_2 = 0{,}520$, $c_\delta = 0{,}1428$, $f_1 = s^o = 2660{,}25$ (кг), $z^o = 1508{,}62$ (кг), $z_c = 1524{,}00$ (кг), $f_2 = s^* = 2759{,}78$ (кг), $z^* = 1659{,}09$ (кг), $f_3 = 703223{,}8$ (руб),

$f_4 = 684246{,}9$ (руб), $f_5 = 696680{,}2$ (руб), $f_6 = 704397{,}1$ (руб), $f_7 = 667237{,}1$ (руб), $f_9 = 592094{,}9$ (руб), $f_{10} = 683223{,}8$ (руб), $f_{11} = 696680{,}2$ (руб), $f_{12} = 684397{,}1$ (руб).

Из приведенных данных видно, что выполняются неравенства:

$$f_1 > S_c,\ f_1 < S_1,\ f_2 < S_1.$$

В соответствие с п. 5 третьей схемы алгоритма оптимальным решением является $s_{опт} = s^o = 2660{,}25$ (кг), $z_{опт} = z^o = 1508{,}62$ (кг), $C_{опт} = f_9 = 592094$ (руб).

В данном случае для хранения товара используется только часть первого склада, и товар приобретается по цене 1,9 руб.

## Литература

1. Талызин В.А. Модель управления товарными запасами с центральным складом // Материалы межвуз. научно-практ. конф. «Современная торговля: теория и практика», ч. 2. - Казань: КИ РГТЭУ, 2005. - С. 227-229.

2. Талызин В.А., Кедун О.А. Управление товарными запасами на нескольких складах при переменной цене товара // Материалы межвуз. научно- практ. конф. «Современная торговля: теория и практика». - Казань: КИ РГТЭУ, 2006. - С. 265-267