Н. И. Казимиров, Ю. Л. Павлов, Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 47–59

DOI: 10.4213/dm320

Дискретная математика

том 12 выпуск 1 * 2000

УДК 519.2

Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона

© 2000 г. Н.И. Казимиров, Ю.Л. Павлов

Показано, что для справедливости предельных теорем об основных характеристиках случайного леса Гальтона–Ватсона, доказанных ранее, достаточно существования второго момента распределения числа потомков одной частицы генерирующего лес критического ветвящегося процесса.

В работах [1–5] рассматривались леса Гальтона–Ватсона, состоящие из N корневых деревьев и содержащие n некорневых вершин. При $N, n \to \infty$ получено полное описание предельного поведения важнейших характеристик таких лесов: высоты, максимального объема дерева, числа деревьев заданного объема, числа вершин в слоях леса. Для доказательства этих результатов распределение числа прямых потомков каждой частицы генерирующего лес ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона G, начинающегося с N частиц, удобно представлять следующим образом. Пусть ξ — вспомогательная случайная величина, для которой

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

с максимальным шагом d и производящей функцией

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \tag{2}$$

причем $p_0 > 0$, $\mathbf{M}\xi = 1$, $\mathbf{D}\xi < \infty$. Будем считать, что число прямых потомков каждой частицы ветвящегося процесса G имеет распределение

$$p_k(\lambda) = \lambda^k p_k / F(\lambda), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где $0 < \lambda \leqslant 1$.

Результаты, приведенные в [1–3], были получены при условии $F'''(1) < \infty$. Это ограничение использовалось в соответствующих доказательствах и было обусловлено особенностями используемого аналитического аппарата. В настоящей статье мы покажем, что для справедливости доказанных в [1–3] теорем достаточно только условия $F''(1) < \infty$.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathscr{F}_{N,n}$ — множество рассматриваемых лесов. Под объемом дерева в лесе будем понимать число вершин, содержащихся в этом дереве. Как известно, высотой вершины корневого дерева называется число дуг, составляющих путь из корня в эту вершину (подразумевается, что дуги ориентированы от корней). Высотой дерева называется максимальная высота вершин этого дерева, а высота леса — это максимальная высота деревьев леса. Обозначим η, μ_r и τ соответственно максимальный объем дерева, число деревьев с r некорневыми вершинами и высоту леса из $\mathcal{F}_{N,n}$.

При доказательстве результатов о предельном поведении η, μ_r, τ в [1–3] предполагалось, что в случае, когда $N, n \to \infty$ так, что $n/N^2 \to 0$, параметр λ является решением уравнения

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N+n}, \tag{4}$$

а в случае, когда $n \to \infty$ так, что $n/N^2 \geqslant C > 0$, рассматривался критический ветвящийся процесс с параметром $\lambda = 1$. Нетрудно убедиться, что при $\lambda = 1$ в [1–3] использовалось только условие существования конечного второго момента распределения (1), поэтому все полученные там теоремы в случае $n/N^2 \geqslant C > 0$ остаются справедливыми, если $F''(1) < \infty$. Таким образом, нам достаточно рассмотреть докритическую ситуацию, возникающую при выполнении соотношения (4).

Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N^2 \to 0$. Обозначим $F_\lambda(z)$ производящую функцию распределения (3), следовательно,

$$F_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z)^k p_k / F(\lambda). \tag{5}$$

При доказательстве предельных теорем в [1–3] существенно использовалось ограничение $F_\lambda'''(1) \leqslant C_1 < \infty$, являющееся очевидным следствием условия $F'''(1) < \infty$. Если $n/N \leqslant C_2 < \infty$, то, как нетрудно получить из (4), справедлива оценка $\lambda \leqslant C_3 < 1$. Поскольку $F(1) = 1$, из (5) легко получаем, что в этом случае раавномерно по λ выполняется нерваенство $F_\lambda'''(1) \leqslant C_4 < \infty$, и условие $F'''(1) < \infty$ не является необходимым. Отсюда следует, что нам осталось рассмотреть случай $N, n \to \infty$, $n/N \to \infty$, $n/N^2 \to 0$. Для того чтобы сформулировать и доказать приведенные ниже результаты, введем необходимые обозначения.

Ясно, что ветвящийся процесс G состоит из независимых процессов $G^{(1)}, \ldots, G^{(N)}$, каждый из которых начинается с одной частицы. Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(N)}$, равные числу частиц, существовавших соответственно в процессах $G^{(1)}, \ldots, G^{(N)}$ до их вырождения, и пусть

$$\nu_N = \nu^{(1)} + \ldots + \nu^{(N)}.$$

Введем обозначения

$$q_r = \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = r+1\}, \quad a = \mathbf{M}\nu^{(1)}, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\nu^{(1)}.$$

В [1, 3] показано, что

$$a = 1/(1-m), \qquad \sigma^2 = B_\lambda/(1-m)^3, \tag{6}$$

где m и B_λ — математическое ожидание и дисперсия распределения (3) соответственно. Из (4) следует, что

$$m = \frac{n}{N+n}. \tag{7}$$

Пусть

$$\sigma_{rr}^2 = q_r\left(1 - q_r - \frac{(a-r-1)^2}{\sigma^2}q_r\right), \tag{8}$$

$$\beta = \beta(\lambda) = -\ln(\lambda/F(\lambda)), \tag{9}$$

а $\alpha = \alpha(\lambda)$ выбрано так, что

$$N\beta^{1/2}\alpha^{-3/2}e^{-\alpha} = \sqrt{2\pi B}. \tag{10}$$

В доказанных ниже теоремах и леммах о предельном поведении η, μ_r, τ предполагается, что

$$N, n \to \infty, \quad n/N \to \infty, \quad n/N^2 \to 0, \quad F'(1) = 1, \quad F''(1) = B < \infty,$$

а параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ является решением уравнения (4). Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого фиксированного* x

$$\mathsf{P}\{\beta\eta - \alpha \leqslant x\} \to e^{-e^{-x}}.$$

Теорема 2. *При любом фиксированном* r *для целых неотрицательных* k *равномерно относительно* $u_r = (k - Nq_r)/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ *в любом конечном интервале*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1}e^{-u_r^2/2}(1 + o(1)).$$

Теорема 3. *Пусть* $r \to \infty$. *Тогда для целых неотрицательных* k *равномерно относительно* $(k - Nq_r)/\sqrt{Nq_r}$ *в любом конечном интервале*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Nq_r)^k}{k!}e^{-Nq_r}(1 + o(1)).$$

Теорема 4. *Для любого фиксированного* x

$$\mathsf{P}\{\tau\ln(1 + N/n) - \ln(2N^2/(Bn)) \leqslant x\} \to e^{-e^{-x}}.$$

Для доказательства этих результатов ниже приводится ряд вспомогательных утверждений (леммы 1–10), с помощью которых будет установлена справедливость сформулированных теорем.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные величины $\nu_{(r)}^{(1)}, \ldots, \nu_{(r)}^{(N)}$, для которых

$$\mathsf{P}\{\nu_{(r)}^{(1)} = k\} = \mathsf{P}\{\nu^{(1)} = k \mid \nu^{(1)} \leqslant r + 1\}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Введем также обозначения

$$\nu_N^{(r)} = \nu_{(r)}^{(1)} + \ldots + \nu_{(r)}^{(N)}, \qquad P_r = \mathsf{P}\{\nu^{(1)} > r + 1\}.$$

В [1, 2] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Для всех* N, n *таких, что* $\mathsf{P}\{\nu_N = N + n\} > 0$,

$$\mathsf{P}\{\eta \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathsf{P}\{\nu_N^{(r)} = N + n\}}{\mathsf{P}\{\nu_N = N + n\}}.$$

Пусть $\nu_{[r]}^{(1)}, \ldots, \nu_{[r]}^{(N)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathsf{P}\{\nu_{[r]}^{(1)} = k\} = \mathsf{P}\{\nu^{(1)} = k \mid \nu^{(1)} \neq r+1\}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Лемма 2 ([2]). *Для всех N, n таких, что $\mathsf{P}\{\nu_N = N+n\} > 0$,*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = C_N^k q_r^k (1-q_r)^{N-k} \frac{\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{[r]} = N+n-k(r+1)\}}{\mathsf{P}\{\nu_N = N+n\}},$$

где

$$\zeta_{N-k}^{[r]} = \nu_{[r]}^{(1)} + \ldots + \nu_{[r]}^{(N-k)}.$$

Пусть $\mu^{(i)}(t)$ — число частиц t-го поколения ветвящегося случайного процесса $G^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu(t)$ — число частиц t-го поколения процесса G. Ясно, что

$$\mu(t) = \mu^{(1)}(t) + \ldots + \mu^{(N)}(t).$$

Обозначим $\nu^{(1)}(t), \ldots, \nu^{(N)}(t)$ независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)}(t) = k\} = \mathsf{P}\{\nu^{(1)} = k \mid \mu^{(1)}(t) > 0\}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Лемма 3 ([1]). *Для всех N, n таких, что $\mathsf{P}\{\nu_N = N+n\} > 0$,*

$$\mathsf{P}\{\tau < t\} = \mathsf{P}\{\mu(t) = 0\} \frac{\mathsf{P}\{\zeta_N(t) = N+n\}}{\mathsf{P}\{\nu_N = N+n\}}.$$

Из лемм 1–3 следует, что для получения предельных распределений случайных величин η, μ_r, τ достаточно рассмотреть асимптотику вероятностей и выражений, стоящих в правых частях утверждений этих лемм, что и будет сделано далее. Во всех приводимых ниже доказательствах символы $C_1, C_2, \ldots$ обозначают некоторые положительные постоянные.

Обозначим $f(z)$ производящую функцию распределения случайной величины $\nu^{(1)}$, т. е.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\nu^{(1)} = k\} z^k. \tag{11}$$

Лемма 4. *Пусть $x = \exp\{iv\sqrt{N}/(\sigma\sqrt{n})\}$. Тогда равномерно по v в любом конечном интервале выполняется предельное соотношение*

$$f(x) = 1 + (1 - Re^{iw} + o(1))(1-\lambda),$$

где

$$R = R(v) = (1 + 4v^2 B)^{1/4}, \qquad w = w(v) = 2^{-1} \operatorname{arctg}(2v\sqrt{B}).$$

Доказательство. Известно (см., например, [6, 7]), что для производящей функции $f(z)$ справедливо соотношение

$$f(z) = zF_\lambda(f(z)). \tag{12}$$

Используя формулу Тейлора для $F(z)$ в окрестности точки $z = 1$, получаем, что

$$F(z) = z + 2^{-1}(B + \varepsilon(z))(z-1)^2, \tag{13}$$

где $\varepsilon(z) \to 0$ при $z \to 1$. Поскольку $F_\lambda(z) = F(\lambda z)/F(\lambda)$, из (12) и (13) следует, что

$$f(z) = \frac{z}{F(\lambda)}\left(\lambda f(z) + \frac{B + \varepsilon(\lambda f(z))}{2}(\lambda f(z) - 1)^2\right).$$

Решая это квадратное уравнение и выбирая ветвь корня так, чтобы при $z \in [0,1]$ имели место неравенства $0 \leqslant f(z) \leqslant 1$, находим, что

$$f(z) = -(E + \sqrt{D})/(2A), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} E &= \frac{\lambda z}{F(\lambda)}(1 - B - \varepsilon(\lambda f(z))) - 1,\\ D &= \left(1 - \frac{\lambda z}{F(\lambda)}\right)\left(1 - \frac{\lambda z}{F(\lambda)}(1 - 2B + 2\varepsilon(\lambda f(z)))\right),\\ A &= \frac{\lambda^2 z}{2F(\lambda)}(B + \varepsilon(\lambda f(z))). \end{aligned}$$

Используя (4), нетрудно получить, что $\lambda \to 1$, $B_\lambda \to B$, поэтому из (6), (7) следует соотношение

$$\sigma^2 = B(n/N)^3(1 + o(1)). \tag{15}$$

Из (13) вытекает, что

$$(1 - \lambda/F(\lambda))/(1-\lambda)^2 \to B/2. \tag{16}$$

Отсюда и из (4) получаем равенство

$$1 - \lambda = N/(Bn)(1 + o(1)). \tag{17}$$

Комбинируя соотношения (15)–(17), нетрудно получить, что равномерно по v

$$\begin{aligned} &\arg(1 - x) \to -(\pi/2)\operatorname{sign} v,\\ &(1 - x)/(1-\lambda)^2 \to -ivB^{3/2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Используя (16) и (18), находим, что

$$\left|\frac{1 - \lambda x/F(\lambda)}{(1-\lambda)^2}\right| = \left|\frac{1 - \lambda/F(\lambda)}{(1-\lambda)^2} + \frac{\lambda}{F(\lambda)}\frac{1 - x}{(1-\lambda)^2}\right| \to \sqrt{\frac{B^2}{4} + v^2B^3}, \tag{19}$$

$$\arg\sqrt{1 - \lambda x/F(\lambda)} \to 2^{-1}\operatorname{arctg}(2v\sqrt{B}), \tag{20}$$

следовательно,

$$\frac{1}{1-\lambda}\sqrt{1 - \lambda x/F(\lambda)} \to (B^4/4 + v^2B^3)^{1/4}\exp\left\{-\frac{i}{2}\operatorname{arctg}(2v\sqrt{B})\right\}. \tag{21}$$

Поскольку

$$1-(\lambda x/F(\lambda))(1-2B-2\varepsilon(\lambda f(x)))\to 2B, \qquad 2A\to B,$$

из (21) получаем, что

$$-\sqrt{D}/(2A(1-\lambda))\to -Re^{iw}. \tag{22}$$

Из равенства

$$-\frac{E}{2A}=\frac{1-\lambda x/F(\lambda)}{\lambda^2 x(B+\varepsilon(\lambda f(x)))/F(\lambda)}+\frac{1}{\lambda}$$

и соотношения (21) получаем, что

$$(-E/(2A)-1)/(1-\lambda)\to 1. \tag{23}$$

Из (14), (22) и (23) получаем,что

$$(f(x)-1)(1-\lambda)^{-1}\to 1-Re^{iw},$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Обозначим $\varphi_N(u)$ характеристическую функцию величины $(\nu_N-Na)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 5. *Равномерно по u в любом конечном интервале $\varphi_N(u)\to e^{-u^2}$.*

Доказательство. Для получения утверждения леммы воспользуемся теоремой Линдеберга о слабой сходимости к нормальному закону, которая требует, чтобы при каждом $b>0$ выполнялось соотношение

$$L_N(b)=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{M}\left(\frac{(\nu^{(k)}-a)^2}{\sigma^2 N};\ \frac{|\nu^{(k)}-a|}{\sigma\sqrt{N}}>b\right)\to 0. \tag{24}$$

Для любого $\delta>0$

$$L_N(b)\leqslant\left(b^\delta N^{\delta/2}\sigma^{2+\delta}\right)^{-1}\mathbf{M}|\nu^{(1)}-a|^{2+\delta}. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{M}|\nu^{(1)}-a|^{2+\delta}=S_1+S_2, \tag{26}$$

где

$$S_1=\sum_{k=1}^{[a]}|k-a|^{2+\delta}\mathbf{P}\{\nu^{(1)}=k\},$$

$$S_2=\sum_{k=[a]+1}^{\infty}|k-a|^{2+\delta}\mathbf{P}\{\nu^{(1)}=k\},$$

$[a]$ — целая часть числа a. Из (6) и (7) следует, что

$$S_1\leqslant C_1(n/N)^{3+\delta}. \tag{27}$$

Используя соотношение (2.2.15) и лемму 2.1.4 книги [1], получаем, что при любом натуральном k имеет место неравенство

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)} = k\} \leqslant C_2 k^{-3/2}.$$

Полагая $\delta = 1/2$ и учитывая, что в силу (4) $\lambda < F(\lambda)$, получаем оценки

$$S_2 \leqslant C_3 \sum_{k=[a]+1}^{\infty} k(\lambda/F(\lambda))^k \leqslant C_3 \frac{\lambda/F(\lambda)}{(1-\lambda/F(\lambda))^2},$$

поэтому из (16) и (17) находим, что

$$S_2 \leqslant C_4 (n/N)^4.$$

Отсюда и из (26), (27) видно, что

$$\mathsf{M}|\nu^{(1)} - a|^{5/2} \leqslant C_5 (n/N)^4.$$

Используя эту оценку, (6), (7) и (25), находим, что

$$L_N(b) \leqslant C_6 b^{-1/2} (n/N^2)^{1/4} \to 0,$$

следовательно, соотношение (24) справедливо, и лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для целых неотрицательных h, кратных d, равномерно по $(h-n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом конечном интервале*

$$\mathsf{P}\{\nu_N = N + h\} = \frac{d(1+o(1))}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(h-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}.$$

Доказательство. Мы будем следовать обычной схеме доказательства локальных предельных теорем. Используя формулы обращения, получаем, что

$$\mathsf{P}\{\nu_N = N + h\} = \frac{d}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-d^{-1}\pi\sigma\sqrt{N}}^{d^{-1}\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izu} \varphi_N(u)\,du,$$

$$(2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-izu - u^2/2\}\,du.$$

Используя эти равенства для $z = (h-n)/(\sigma\sqrt{N})$, представим разность

$$R_N = 2\pi(d^{-1}\sigma\sqrt{N}\mathsf{P}\{\nu_N = N+h\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2})$$

в виде суммы четырех интегралов

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-izu}(\varphi_N(u) - e^{-u^2/2})\,du,$$

$$I_2 = \int_{A<|u|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-izu}\varphi_N(u)\,du,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}<|u|\leqslant d^{-1}\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izu}\varphi_N(u)\,du,$$

$$I_4 = -\int_{A<|u|} \exp\{-izu - u^2/2\}\,du,$$

где положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее. Понятно, что для доказательства леммы достаточно показать, что каждый из этих интегралов может быть сделан сколь угодно близким к нулю выбором достаточно больших A, N, n и достаточно малого ε.

Из леммы 5 следует, что $I_1 \to 0$ при любом фиксированном A. Легко видеть, что величину $|I_4|$ можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно большого A. Для оценки интеграла I_3 заметим, что

$$|\varphi_N(u)| \leqslant |f(\exp\{iu/(\sigma\sqrt{N})\})|^N, \tag{28}$$

где производящая функция $f(z)$ определена равенством (11). В силу известного свойства характеристических функций решетчатых распределений для достаточно больших N, n и $\varepsilon < |u| \leqslant \pi/d$ существует такое C_1, что $|f(\exp\{iu\})| \leqslant e^{-C_1}$. Отсюда и из (6), (7), (28) получаем, что

$$|I_3| \leqslant 2\pi d^{-1}\sigma\sqrt{N}e^{-C_1 N} \leqslant C_2 N^2 e^{-C_1 N} \to 0.$$

Осталось оценить интеграл I_2. Представим его в виде суммы $I_2 = I_2' + I_2''$, где области интегрирования I_2' и I_2'' равны соответственно

$$\{u\colon A < |u| \leqslant \varepsilon_1 N/\sqrt{n}\}, \qquad \{u\colon \varepsilon_1 N/\sqrt{n} < |u| \leqslant \varepsilon\sigma\sqrt{N}\},$$

где $\varepsilon_1 > 0$. Проведя замену переменной $v = u\sqrt{n}/N$ и используя (28), получаем оценку

$$|I_2'| \leqslant \frac{N}{\sqrt{n}} \int_{A\sqrt{n}/N<|v|\leqslant\varepsilon_1} \left| f\left(\exp\left\{\frac{iv}{\sigma}\sqrt{\frac{N}{n}}\right\}\right)\right|^N dv. \tag{29}$$

Из леммы 4 следует, что

$$\left| f\left(\exp\left\{\frac{iv}{\sigma}\sqrt{\frac{N}{n}}\right\}\right)\right|^N \leqslant \exp\{C_3 N(1-\lambda)(1-R\cos w)\}. \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что $(1-R\cos w)_v' < 0$ при $0 < v < \varepsilon_1$ и $1-R\cos w = -Bv^2/2+o(v^2)$ при $v \to 0$, поэтому существует постоянная C_4 такая, что $1 - R\cos w \leqslant -C_4 v^2$. Отсюда и из (29), (30) следует, что

$$|I_2'| \leqslant 2(N/\sqrt{n}) \int_{A\sqrt{n}/N}^{\varepsilon_1} \exp\{-C_4 N(1-\lambda)v^2\}dv.$$

Поэтому из (17) находим, что

$$|I_2'| \leqslant C_5 \int_{A/\sqrt{B}}^{\infty} \exp\{-C_6 y^2\}dy,$$

а последний интеграл может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Оценим интеграл I_2''. Из леммы 6 в [5] следует, что при $|u/(\sigma\sqrt{N})| < \varepsilon$

$$|f(\exp\{iu/(\sigma\sqrt{N})\})| \leqslant \exp\left\{-C_7\sqrt{|u|/(\sigma\sqrt{N})}\right\}, \tag{31}$$

поэтому в силу (6), (7)

$$|I_2''| \leqslant 2 \int_{\varepsilon_1 N/\sqrt{n}}^{\infty} \exp\{-C_7\sqrt{|u|}(N^2/n)^{3/4}\}du, \tag{32}$$

а последнее выражение стремится к нулю, поскольку $N/\sqrt{n} \to \infty$.

Лемма 6 позволяет оценить асимптотику вероятности $\mathsf{P}\{\nu_N = N+n\}$, входящей в утверждения лемм 1–3. Рассмотрим теперь числители этих выражений.

Лемма 7. *Пусть $r \to \infty$ и пробегает значения, кратные d, так, что $NP_r \to \gamma$, где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда для целых неотрицательных h, кратных d, равномерно по $(h-n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом конечном интервале*

$$\mathsf{P}\{\nu_N^{(r)} = N+h\} = \frac{d(1+o(1))}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(h-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}.$$

Доказательство. Пусть

$$L_N^{(r)}(b) = \sum_{k=1}^{N} \mathsf{M}\left(\frac{(\nu_{(r)}^{(1)}-a)^2}{\sigma^2 N};\ \frac{|\nu_{(r)}^{(1)}-a|}{\sigma\sqrt{N}} > b\right).$$

Легко видеть, что $L_N^{(r)}(b) \leqslant C_1 L_N(b)$ при достаточно больших N, поэтому из (24) в силу теоремы Линдеберга следует слабая сходимость распределения $\nu_N^{(r)}$ к нормальному закону.

Обозначим $\varphi_N^{(r)}(u)$ характеристическую функцию величины $(\nu_N^{(r)} - Na)/(\sigma\sqrt{N})$. Тогда

$$\varphi_N^{(r)}(u) = \exp\left\{-\frac{i(N+n)u}{\sigma\sqrt{N}}\right\}(1-P_r)^{-N}$$
$$\times\left(f\left(\exp\left\{\frac{iu}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\nu^{(1)} = r+kd+1\}\exp\left\{\frac{iu(r+kd+1)}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\right)^N.$$

Отсюда и из условия $NP_r \to \gamma$ нетрудно получить, что при достаточно больших N

$$\left|\varphi_N^{(r)}(u)\right| \leqslant C_2\,|\varphi_N(u)|\,.$$

Используя это неравенство, утверждение леммы 7 легко вывести, следуя доказательству леммы 6.

Рассмотрим сумму $\zeta_{N-k}^{[r]}$. Введем обозначения

$$f^{[r]}(u) = \mathsf{M}\exp\{iu\nu_{[r]}^{(1)}\} = \frac{f(\exp\{iu\}) - q_r\exp\{iu(r+1)\}}{1-q_r},$$
$$a_r = \mathsf{M}\nu_{[r]}^{(1)}, \qquad \sigma_r^2 = \mathsf{D}\nu_{[r]}^{(1)}. \tag{33}$$

Нетрудно проверить, что

$$a_r = (a-(r+1)q_r)/(1-q_r),$$
$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{(1-q_r)^2}\left(1-q_r-\frac{(a-r-1)^2}{\sigma^2}q_r\right). \tag{34}$$

Лемма 8. *При* $S = N(1-q_r)(1+o(1))$ *для целых неотрицательных* h, *кратных* d, *равномерно относительно* $u_r = (N+h-Sa_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ *в любом конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = N+h\} = d(\sigma_r\sqrt{2\pi S})^{-1}\exp\{-u_r^2/2\}(1+o(1)).$$

Это утверждение остается в силе и при $r \to \infty$.

Доказательство. Слабую сходимость распределения рассматриваемой суммы к нормальному закону нетрудно установить с помощью теоремы Линдеберга по аналогии с доказательством леммы 7. Обозначим $\varphi_S^{[r]}(u)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_S^{[r]} - Sa_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$. Следуя доказательству леммы 6, получаем, что достаточно установить сходимость к нулю следующих четырех интегралов:

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-iu_r u}(\varphi_S^{[r]}(u) - e^{-u^2/2})du,$$
$$I_2 = \int_{A<|u|\leqslant\varepsilon\sigma_r\sqrt{S}} e^{-iu_r u}\varphi_S^{[r]}(u)du,$$
$$I_3 = \int_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{S}<|u|\leqslant d^{-1}\pi\sigma_r\sqrt{S}} e^{-iu_r u}\varphi_S^{[r]}(u)du,$$
$$I_4 = \int_{A<|u|} \exp\{-iu_r u - u^2/2\}du,$$

в которых выбор положительных постоянных A и ε будет ясен из дальнейшего.

Выше мы установили, что $\varphi_S^{[r]}(u) \to e^{-u^2/2}$, поэтому $I_1 \to 0$. Величина $|I_4|$ может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого A. Интеграл I_3 оценивается так же, как и одноименный интеграл в лемме 6.

Нам осталось рассмотреть интеграл I_2. В доказательстве леммы 3.2.2 в [1] показано, что если u достаточно мало и $|u|(r+1)^2 \leqslant 2$, то существует такая постоянная C_1, что

$$|f^{[r]}(u)| \leqslant |f(\exp\{iu\})|^{C_1}. \tag{35}$$

Используя эту оценку, нетрудно установить, что $I_2 \to 0$ при любом фиксированном r, подобно тому, как это соотношение было получено при доказательстве леммы 6. Пусть $r \to \infty$. Представим интеграл I_2 в виде суммы $I_2 = I_2' + I_2''$, где области интегрирования I_2' и I_2'' соответственно равны

$$S_1 = \{u\colon A < |u| \leqslant 2\sigma_r\sqrt{S}/(r+1)^2\},$$
$$S_2 = \{u\colon 2\sigma_r\sqrt{S}/(r+1)^2 < |u| < \varepsilon\sigma_r\sqrt{S}\}.$$

Понятно, что область S_1 может оказаться пустой. В области S_1 выполняется неравенство (35), поэтому I_2' оценивается аналогично I_2 при фиксированных r. Согласно лемме 2.1.4 из [6] справедливо соотношение $q_r = O(r^{-3/2})$, поэтому из (6), (7), (31), (33), (34) следует, что

$$|\varphi_S^{[r]}(u)| \leqslant \exp\left\{N\left(-C_2\sqrt{\frac{|u|}{\sigma\sqrt{N}}} + \frac{C_3}{r^{3/2}}\right)\right\}. \tag{36}$$

Нетрудно видеть, что при $r \to \infty$ и $|u| > 2\sigma_r\sqrt{S}/(r+1)^2$ справедливо соотношение

$$r^{-3/2} = o((|u|/(\sigma\sqrt{N}))^{1/2}),$$

поэтому из (31) и (36) следует, что для I_2'' справедливо соотношение (32), что и завершает доказательство леммы 8.

Найдем теперь асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{\mu(t)=0\}$. Введем обозначение $Q(t) = \mathbf{P}\{\mu^{(1)}(t) > 0\}$.

Лемма 9. *Пусть $t \to \infty$ так, что $m^t \to 0$. Тогда $Q(t) = (2/B)m^t(1-m)(1+o(1))$.*

Доказательство. Обозначим $G_t(z)$ производящую функцию распределения случайной величины $\mu^{(1)}(t)$. Известно [7], что

$$G_{t+1}(z) = F_\lambda(G_t(z)), \qquad t = 0, 1, \ldots \tag{37}$$

Разлагая правую часть этого равенства по формуле Тейлора и подставляя $z = 0$, $Q(t) = 1 - G_t(0)$, получаем равенство

$$Q(t+1) = mQ(t) - R_t Q^2(t), \tag{38}$$

где в силу того, что $F_\lambda''(1) \to B$ и $Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$,

$$R_t \to B/2. \tag{39}$$

Разделив обе части равенства (38) на $mQ(t)Q(t+1)$, находим, что

$$\frac{1}{Q(t+1)} = \frac{1}{Q(t)} + R_t\frac{Q(t)}{Q(t+1)}. \tag{40}$$

Учитывая, что $Q(t) \to 0$, из (38) получаем оценки

$$\left|\frac{Q(t+1)}{Q(t)} - m\right| \leqslant C_3 Q(t), \qquad \left|\frac{Q(t)}{Q(t+1)} - \frac{1}{m}\right| \leqslant C_4 Q(t), \tag{41}$$

и из (40) следует, что

$$\frac{m^{t+1}}{Q(t+1)} = \frac{m^t}{Q(t)} + \frac{R_t m^t}{m} + h_t, \tag{42}$$

где

$$|h_t| \leqslant C_5 m^t Q(t). \tag{43}$$

Отсюда и из равенства $Q(0) = 1$ нетрудно получить, что

$$\frac{m^t}{Q(t)} = 1 + \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{t-1} m^k R_k + \sum_{k=0}^{t-1} h_k. \tag{44}$$

Из (43) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое t_0, что

$$\left|\sum_{k=0}^{t-1} h_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{t_0-1} |h_k| + \varepsilon \sum_{k=t_0}^{t-1} m^k, \tag{45}$$

откуда,

$$\sum_{k=0}^{t-1} h_k = o\left(\frac{m^t - 1}{m - 1}\right). \tag{46}$$

Поскольку $(m^t - 1)/(m - 1) \to \infty$, из (39), (44), (46) нетрудно получить, что

$$m^t(1 - m)/Q(t) \to B/2.$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть* $t = (x + \ln(2N^2/(Bn)))/\ln(1 + N/n)$, *где* x *— фиксированное число. Тогда*

$$\mathsf{P}\{\mu(t) = 0\} \to e^{-e^{-x}}.$$

Доказательство. Из (7) получаем, что

$$m^t = e^{-x}(Bn/(2N^2)) \to 0.$$

Отсюда, из (7) и леммы 9 находим, что

$$Q(t) = e^{-x}N^{-1}(1 + o(1)).$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что

$$\mathsf{P}\{\mu(t) = 0\} = (1 - Q(t))^N.$$

Теперь мы можем доказать теоремы 1–4. Из лемм 6 и 7 следует, что при выполнении условий теоремы 1

$$\mathsf{P}\{\nu_N^{(r)} = N + n\}/\mathsf{P}\{\nu_N = N + n\} \to 1. \tag{47}$$

Согласно лемме 4 из [2] $NP_r \to e^{-x}$ для r кратных d и таких, что $r = (\alpha+x)/\beta+O(1)$, где x — фиксированное число, а α и β определены в (9) и (10) соответственно. Отсюда, из леммы 1 и (47) следует утверждение теоремы 1.

Теорему 2 нетрудно получить, используя леммы 2, 6, 8, соотношение (8) и нормальное приближение для биномиального распределения при $Nq_r(1 - q_r) \to \infty$.

В случае $r \to \infty$ легко находим, что $q_r \to 0$. Опять используя леммы 2, 6, 8, соотношение (8) и пуассоновское приближение для биномиального распределения, получаем утверждение теоремы 3.

Для доказательства теоремы 4 заметим, что локальная предельная теорема для суммы $\zeta_N(t)$ доказана в [1]. Эта теорема остается в силе при условии $F''(1) < \infty$, поскольку ограничение $F'''(1) < \infty$ использовалось в [1] только для установления соотношения $\varphi_N(u) \to e^{-u^2/2}$. Справедливость этого соотношения в случае, когда $F''(1) < \infty$, показана в лемме 5. Следовательно, из лемм 4.2.4 [1] и 6 получаем, что

$$\mathsf{P}\{\zeta_N(t) = N + n\}/\mathsf{P}\{\nu_N = N + n\} \to 1.$$

Отсюда и из лемм 3, 10 приходим к утверждению теоремы 4.

Список литературы

1. Павлов Ю.Л., *Случайные леса.* Карельский НЦ РАН, Петрозаводск, 1996.
2. Павлов Ю.Л., Предельные распределения максимального объема дерева в случайном лесе. *Дискретная математика* (1995), **7**, №3, 19–32.
3. Павлов Ю.Л., Предельные распределения числа деревьев заданного объема в случайном лесе. *Дискретная математика* (1996), **8**, №2, 31–47.
4. Pavlov Yu.L., Random Forests. *Proc. 4th Intern. Petrozavodsk Conf. Probabilistic Methods in Discrete Math.* VSP, Utrecht, 1997, 11–18.
5. Павлов Ю.Л., Чеплюкова И.А., Предельные распределения числа вершин в слоях просто генерируемого леса. *Дискретная математика* (1999), **11**, №1, 97–112.
6. Колчин В.Ф., *Случайные отображения.* Наука, Москва, 1984.
7. Севастьянов Б.А., *Ветвящиеся процессы.* Наука, Москва, 1971.

Статья поступила 20.12.1999.