С. В. Буяло, Коллапсирующие многообразия неположительной кривизны. I, *Алгебра и анализ*, 1989, том 1, выпуск 5, 74–94

С. В. Буяло

КОЛЛАПСИРУЮЩИЕ МНОГООБРАЗИЯ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ. I

Семейство римановых метрик g_δ на многообразии M коллапсирует, если радиусы инъективности этих метрик $\to 0$ равномерно на M, а секционные кривизны ограничены при $\delta \to 0$. Вводится понятие Cr-структуры: это дифференциально-топологическая структура на гладком многообразии, которая близка, с одной стороны, к F-структуре в смысле Чигера и Громова (РЖмат, 1987, 3А704), а с другой – к понятию графа многообразий. Грубо говоря, если на M^n есть Cr-структура, то M^n является объединением своих частей M_i, каждая из которых похожа на произведение $N^{n-k_i} \times T^{k_i}$, где $k_i > 0$, T^k – k-мерный тор, причем эти части прилегают друг к другу согласовано со структурой произведения. Основной результат состоит в следующем. Для $n = 2, 3, 4$ существует такая постоянная $\epsilon(n) > 0$, что если радиус инъективности n-мерного замкнутого риманова многообразия M с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ всюду $< \epsilon(n)$, то метрика M локально содержит евклидов сомножитель и на M существует Cr-структура. В частности, на M существует семейство римановых метрик, коллапсирующее с объемом $\to 0$, и равны нулю следующие инварианты M: эйлерова характеристика, симплициальный объем, минимальный объем, числа Понтрягина.

Введение

Говорят, что семейство римановых метрик g_δ на многообразии M^n коллапсирует с ограниченной кривизной, если радиусы инъективности i_{g_δ} этих метрик равномерно сходятся к нулю при $\delta \to 0$, а секционные кривизны K_δ остаются ограниченными. (Напомним, что значение радиуса инъективности $i_g : M^n \to \mathbf{R}$ римановой метрики g в точке $x \in M^n$ равно супремуму тех $r > 0$, при которых сужение экспоненциального отображения $\exp_x | B_r$ является диффеоморфизмом на свой образ, где B_r – шар радиуса r с центром в нуле в касательном пространстве $T_x M^n$. В случае, когда секционные кривизны полной метрики g неположительны, $i_g(x)$ – это половина длины кратчайшей геодезической петли с вершиной в x).

Ключевые слова: радиус инъективности, коллапсирующее семейство римановых метрик, Cr-структура, градуированное симплициальное пространство, евклидова k-плоскость, действие пучка групп, насыщенное множество.

Риманово многообразие M^n с радиусом инъективности, всюду не превосходящим ϵ, выглядит в масштабе $\gg\epsilon$, как имеющее размерность $<n$. Коллапсирующие семейства метрик естественно возникают при изучении пределов последовательностей римановых многообразий с теми или иными ограничениями на их геометрические характеристики, например, совокупности $\mathfrak{M}(n,D)$ n-мерных римановых многообразий с секционными кривизнами $|K|\leqslant 1$ и диаметром $\leqslant D$ (см. [1–3]). В работе [4] Чигером и Громовым введена топологическая структура (так называемая F-структура положительного ранга), предназначенная для описания коллапсирующих многообразий: если гладкое многообразие допускает F-структуру положительного ранга, то оно допускает также семейство римановых метрик, коллапсирующее с ограниченной кривизной. Там же анонсировано и обратное утверждение, причем в более сильной форме: для каждого натурального n существует такой критический радиус $\epsilon(n)>0$, что если радиус инъективности риманова многообразия M^n всюду $\leqslant\epsilon(n)$, а секционные кривизны $|K|\leqslant 1$, то M^n допускает F-структуру положительного ранга. В частности, на M^n существует семейство метрик, коллапсирующее с ограниченной кривизной. Насколько известно автору, доказательство этого обратного утверждения пока не опубликовано.

Оказывается, что коллапсирующие многообразия неположительной секционной кривизны (по крайней мере, невысоких размерностей) допускают более детальное описание, чем то, которое дается F-структурой. В случае $n=3$ это сделано в работе [5]. В настоящей работе вводится понятие Cr-структуры. Это дифференциально-топологическая структура на гладком многообразии, наличие которой, с одной стороны, влечет существование F-структуры положительного ранга в смысле Чигера и Громова (теорема B, п. 1.7.4) и, более того, существование семейства метрик, коллапсирующего с ограниченной кривизной и объемом $\to 0$ (следствие 1.7.6), а с другой стороны, понятие этой структуры близко к понятиям графа многообразий и граф-произведения многообразий (см., например, [6]).

Графовы многообразия являются простейшими примерами многообразий, несущих нетривиальную Cr-структуру. Они могут быть описаны так (см. [4], пример 0.2). Пусть $\{F_i\}$ – конечный набор поверхностей, край каждой из которых $\partial F_i=\bigcup_j S^1_{i,j}$ – конечное дизъюнктное объединение окружностей. Произведение $M_i=F_i\times S^1$ имеет край, состоящий из торов $S^1_{i,j}\times S^1$. Разобьем все такие торы на пары и отождествим торы каждой пары с помощью элементов группы $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$. Трехмерное многообразие M^3, полученное указанным склеиванием из набора $\{M_i\}$, и является графовым.

Основной результат работы состоит в том, что если радиус инъективности замкнутого риманова многообразия $M^n, n\leqslant 4$, с секционными кривизнами $-1\leqslant K\leqslant 0$ всюду $<\epsilon(n)$, где $\epsilon(n)>0$ зависит только от n, то на M^n существует Cr-структура и метрика M^n устроена весьма специальным образом (теорема A, п. 1.7.1). Грубо говоря, такое M^n составлено из кусков, каждый из которых похож на произведение $F_i^{n-k_i}\times T^{k_i}$, где T^k есть k-мерный тор, и эти куски прилегают друг к другу согласовано со структурой произведения.

Работа состоит из двух частей. Часть I содержит описание Cr-структуры, ее связи с F-структурой в смысле Чигера и Громова (теорема B, п. 1.7.4), формулировку основного результата (теорема A, п. 1.7.1) и теоремы C (п. 3.1) и описание средств, с помощью которых эти теоремы получены – симплициальных пространств, построенных по многообразию Адамара и группе его изометрий (см. § 2). Кроме того, здесь содержатся вывод основного результата работы из теоремы C (см. § 3) и доказательство теоремы B (см. § 4). Часть II будет посвящена доказательству теоремы C.

§ 1. Cr-структуры на многообразиях

В работе [4] введена топологическая структура (F-структура), с помощью которой описывается коллапс многообразий. К сожалению, ее определение слишком громоздко, чтобы быть приведенным здесь полностью. Однако некоторые понятия, связанные с ней и необходимые для определения Cr-структуры, приводятся ниже.

1.1. Будем говорить, что биекция $\gamma : Y \to Y$ индуцирует *автоморфизм действия* $\xi : G \times Y \to Y$ группы G на множестве Y, если существует такой автоморфизм $\gamma_* : G \to G$, что $\gamma \circ \xi = \xi \circ (\gamma_* \times \gamma)$.

1.1.1. В качестве примера рассмотрим замкнутое плоское риманово многообразие V^n. По теореме Бибербаха существует конечное нормальное накрытие $\psi : T^n \to V^n$. Тор T^n действует на себе левыми сдвигами, и преобразования накрытия ψ индуцируют автоморфизмы этого действия.

1.2. *Локальное действие* группы Ли G на гладком многообразии M определяется как непрерывный гомоморфизм алгебры Ли группы G в алгебру Ли векторных полей на M.

1.2.1. Пусть V^n – такое же, как в п. 1.1.1, $x \in V^n$, U – правильно накрытая окрестность точки x, $\psi | \widetilde{U} : \widetilde{U} \to U$ – гомеоморфизм, где $\widetilde{U} \subset T^n$. Действие тора T^n на себе индуцирует локальное действие T^n на $\widetilde{U}$, а значит, и на U. В терминах работы [4] это означает, что на V^n задано действие локально постоянного пучка групп Ли со слоями, изоморфными T^n.

1.3. Симплициальное пространство S будем называть *градуированным*, если каждой его вершине s приписано натуральное число $\mathrm{rk}(s)$ – ее *ранг*, причем симплексы из S не содержат различных вершин одного ранга. В этом случае соотношение $\mathrm{rk}(s) \leqslant \mathrm{rk}(s')$ для вершин s, s' одного симплекса превращает S в упорядоченное симплициальное пространство: полагаем $s \preccurlyeq s'$. Более того, в определение градуированного симплициального пространства включаем следующее требование: если $s_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq s_k$, то $s_1, \ldots, s_k$ – вершины одного симплекса.

Через $\mathrm{ske}_m(S)$ будем обозначать m-остов пространства S; в частности, $\mathrm{ske}_0(S)$ – множество вершин S.

1.4. Пусть M – гладкое многообразие размерности n. Допустим, что для каждой вершины s градуированного симплициального пространства S задано гладкое погружение $\varphi_s : V_s \to M$ компактного связного n-мерного многообразия V_s с краем (возможно, пустым). Пространство S вместе с набором $\{\varphi_s : s \in \mathrm{ske}_0(S)\}$ будем называть Cr-структурой на многообразии M, если выполняются следующие условия 1.4.1–1.4.7.

1.4.1. *Локальная конечность покрытия:* образы U_s внутренностей многообразий V_s при отображениях φ_s покрывают M, и это покрытие является локально конечным.

1.4.2. *Структура чистых поляризаций:* заданы такое конечнолистное нормальное накрытие $\psi_s : \widetilde{V}_s \to V_s$ и такая гладкая тривиализация $\widetilde{V}_s \cong V_s' \times T^{\mathrm{rk}(s)}$ расслоения $\widetilde{V}_s$ на торы размерности $\mathrm{rk}(s)$, что преобразования накрытия ψ_s индуцируют автоморфизмы естественного действия тора $T^{\mathrm{rk}(s)}$ на $\widetilde{V}_s$.

В терминах работы [4] это означает, что каждое многообразие V_s обладает F-структурой с чистой поляризацией P_s ранга $\mathrm{rk}(s)$. Действие локально постоянного пучка групп P_s на V_s индуцировано действием тора $T^{\mathrm{rk}(s)}$ на $\widetilde{V}_s$, и орбиты этого действия образуют гладкое слоение $\mathcal{T}_s$ на V_s. Распределение $\{t_y : y \in V_s\}$ касательных пространств к его слоям можно отождествить с пучком алгебр Ли, ассоциированных с пучком P_s. Естественная структура векторного пространства t_y и является структурой алгебры Ли $R_y \cong R^{\mathrm{rk}(s)}$ группы $(P_s)_y \cong T^{\mathrm{rk}(s)}$ – слоя пучка P_s.

Через $\tau_{s,y}$ будем обозначать подпространство касательного пространства T_xM вида $d\varphi_s(t_y)$, где $x=\varphi_s(y)$.

1.4.3. *Инъективность относительно слоения:* если $\tau_{s,y}=\tau_{s,y'}$, то $y=y'$.

Для точки $x\in M$ обозначим через $ti(x)$ совокупность всех подпространств $\tau_{s,y}\subset T_xM$, где $y\in \mathrm{Int}(V_s)$, $s\in \mathrm{ske}_0(S)$.

1.4.4. *Максимальность:* любой набор подпространств из $ti(x)$ лежит в некотором подпространстве из $ti(x)$.

1.4.5. *Локальная согласованность:* включение $\tau_{s,y}\subset\tau_{s',y'}$ влечет $s \preccurlyeq s'$, и для внутренних точек $y\in V_s$, $y'\in V_{s'}$ гомеоморфизм $\varphi_s^{-1}\circ\varphi_{s'}|W' : W'\to W$ их подходящих окрестностей индуцирует вложение $\xi_y^{y'} : (P_s)_y\to(P_{s'})_{y'}$ слоев соответствующих F-структур, причем если $\tau_{s,y}\subset\tau_{s',y'}\subset\tau_{s'',y''}$, то $\xi_{y'}^{y''}\circ\xi_y^{y'}=\xi_y^{y''}$.

Подчеркнем, что отображение $\xi_y^{y'}$ является гомоморфизмом не только групп $(P_s)_y$, $(P_{s'})_{y'}$, но и их локальных действий на окрестностях W, W'.

1.4.6. *Глобальная согласованность:* из $s\preccurlyeq s'$ следует $U_{s'}\subset U_s$, и образ каждого слоя слоения $\mathcal{T}_{s'}$, задевающий U_s, лежит в U_s. (Напомним, что $U_s=\varphi_s(\mathrm{Int}(V_s))$).

1.4.7. *π_1-инъективность:* каждое отображение φ_s индуцирует мономорфизм фундаментальных групп.

1.5. Требование к гладкости края и сужению отображений на край, предъявляемые в определении Cr-структуры, можно ослабить: будем считать, что край ∂V_s и отображение $\varphi_s|\partial V_s$ являются гладкими вдоль слоев слоения $\mathcal{T}_s$.

1.6. Примеры.

1.6.1. Замкнутое плоское риманово многообразие M^n обладает Cr-структурой, у которой симплициальное пространство состоит из единственной вершины s ранга n, $V_s=M^n$ и $\varphi_s=\mathrm{id}$ (см. п. 1.1.1). Всякое замкнутое многообразие вида $N\times T^k$ обладает очевидной Cr-структурой, симплициальное пространство которой состоит из единственной вершины ранга k.

1.6.2. Более обще, если фундаментальная группа замкнутого риманова многообразия M неположительной секционной кривизны содержит нормальную свободную абелеву группу ранга $k\geqslant 1$, то на M существует Cr-структура с единственной вершиной ранга $\geqslant k$ (см. [7] и п. 3.4).

1.6.3. На графовом многообразии M^3, составленном из произведений $M_i = F_i\times S^1$ (см. Введение), имеется Cr-структура, симплициальное пространство S которой содержит вершины ранга 1 и 2 и является одномерным: каждому куску M_i сопоставим связное градуированное симплициальное пространство S_i, содержащее одну вершину ранга 1 и вершины ранга 2 по одной на каждую компоненту края ∂M_i. Склеивание многообразия M^3 из набора $\{M_i\}$ показывает, какие симплексы из $\{S_i\}$ следует отождествить, чтобы получить S. Для вершины $s\in S$ многообразие V_s является замыканием регулярной трубчатой окрестности соответствующего тора $T^2\subset M^3$ в случае $\mathrm{rk}(s)=2$ (такие V_s выбираются дизъюнктными) и объединением образа $M_i\to M^3$ соответствующего куска и всех $V_{s'}$ с $s\prec s'$ – в случае $\mathrm{rk}(s)=1$. Все отображения $\varphi_s : V_s\to M^3$ – включения. Условие 1.4.7 обеспечено, если набор $\{F_i\}$ не содержит дисков.

1.6.4. Нетрудно построить пример многообразия M^6 с Cr-структурой, для которой многообразия V_s являются многообразиями с углами и эти углы нельзя сгладить. Возьмем компактные многообразия F^2, F^3 с краями $\partial F^2 = S^1$, $\partial F^3 = T^2$, на внутренности которых имеется полная гиперболическая структура. Их произведение имеет край $\partial(F^2 \times F^3) = S^1 \times F^3 \cup F^2 \times T^2$ и является многообразием с углами. Многообразие M^6 состоит из 4 экземпляров M_i, $i = 1, 2, 3, 4$, произведения $F^2 \times F^3 \times S^1$, склеенных следующим образом. M_1 склеивается с M_2 в соответствии с отождествлением части $(\partial F^2) \times F^3 \times S^1 = S^1 \times F^3 \times S^1$ края ∂M_1 с такой же частью края ∂M_2, переставляющим 1-й и 3-й сомножители. Также склеивается M_3 с M_4. M_2 склеивается с M_3 в соответствии с отождествлением части $F^2 \times \partial F^3 \times \times S^1 = F^2 \times (S^1 \times S^1) \times S^1$ края ∂M_2 с такой же частью края ∂M_3, циклически переставляющим последние 3 сомножителя: $2 \to 3 \to 4 \to 2$. Также склеивается M_4 с M_1. Здесь симплициальное пространство S содержит одну вершину ранга 4, по две вершины ранга 3 и 2 и четыре вершины ранга 1.

1.7. **Формулировки результатов.** Будем говорить, что риманова метрика на многообразии M *локально содержит евклидов сомножитель*, если существует такое открытое всюду плотное подмножество $M' \subset M$, что для любой точки $x \in M'$ найдется ее окрестность $U \subset M'$, изометричная произведению $V \times D^k$, где D^k – шар в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$, $k = k(x) > 0$.

Основной результат работы состоит в следующем.

1.7.1. Теорема А. *Для* $n = 2, 3, 4$ *существует такая постоянная* $\epsilon(n) > 0$, *что если* n*-мерное замкнутое* C^∞*-гладкое риманово многообразие* M *с секционными кривизнами* $-1 \leqslant K \leqslant 0$ *имеет всюду радиус инъективности* $< \epsilon(n)$, *то на* M *существует* Cr*-структура и метрика* M *локально содержит евклидов сомножитель.*

1.7.2. Замечание. Расщепление $U = V \times D^k$ окрестности каждой точки $x \in M' \subset M$, существование которого утверждается в теореме А, согласовано с Cr-структурой в том смысле, что каждый слой $v \times D^k$, $v \in V$, лежит в некотором слое $\varphi_s(q)$, где q – слой слоения $\mathcal{T}_s$, $\mathrm{rk}(s) = k$ (см. п. 1.4.2).

1.7.3. Следствие. *Пусть* M – n*-мерное замкнутое риманово многообразие с секционными кривизнами* $-1 \leqslant K \leqslant 0$, $n = 2, 3, 4$. *Если хотя бы в одной точке кривизны Риччи отрицательны по всем направлениям, то у* M *максимум радиуса инъективности* $\geqslant \epsilon(n)$. *В частности, объем* $\mathrm{Vol}(M) \geqslant c(n) > 0$.

Понятие Cr-структуры на многообразии тесно связано с понятием F-структуры (в смысле Чигера и Громова) и ее поляризации (см. [4]).

1.7.4. Теорема В. *Каждая* Cr*-структура на гладком многообразии* M *определяет некоторую* F*-структуру на* M *положительного ранга, которая допускает поляризацию.*

1.7.5. Замечание. Свойство 1.4.7 (π_1-инъективность) в доказательстве теоремы В не используется. Однако оно включено в определение Cr-структуры по двум причинам. Во-первых, им обладают многообразия из теоремы А, а во-вторых, оно позволяет восстановить симплициальное пространство S по фундаментальной группе многообразия. Это дает основание предположить, что Cr-структура является гомотопическим инвариантом по крайней мере для многообразий из теоремы А (см. также п. 1.6.2).

Из теорем А, В и [4], теорема 3.1 получаем

1.7.6. Следствие. *Пусть многообразие* M – *такое же, как в теореме* А. *Тогда на* M *существует семейство метрик* g_δ, *коллапсирующее при* $\delta \to 0$ *с ограниченной кривизной и объемом* $\to 0$. *В частности, равны нулю следующие инварианты* M: *эйлерова характеристика, симплициальный объем, минимальный объем и числа Понтрягина (см.* [3, 4]).

1.7.7. Замечание. В случае $n = 2$ многообразие M в условиях теоремы А является либо плоским тором, либо плоской бутылкой Кляйна (см. предложение 2.5.1). Для $n=3$ теорема А (в другой форме) и следствия 1.7.3, 1.7.6 доказаны в работе [5], причем последнее – в более сильном варианте: метрики g_δ имеют неположительную секционную кривизну. Теорема А и ее следствия 1.7.3, 1.7.6 справедливы, по-видимому, в любой размерности $n \geqslant 2$.

§ 2. Симплициальные пространства, связанные с многообразием Адамара и группой его изометрий

Этот параграф содержит описание средств, с помощью которых будет доказана теорема А (п. 1.7.1).

Всюду в дальнейшем X – n-мерное, $n \geqslant 2$, многообразие Адамара с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$, группа Γ действует на X дискретно, свободно и равномерно. В этом случае каноническая проекция $\pi: X \to X/\Gamma$ является универсальным накрытием замкнутого многообразия $M = X/\Gamma$ с фундаментальной группой, изоморфной Γ. Все необходимые здесь сведения о многообразиях Адамара и группах их изометрий можно найти в [8].

2.1. Евклидовы k-плоскости и кристаллографические группы.

2.1.1. Вполне геодезическое подпространство $E \subset X$, изометричное евклидову пространству $\mathbf{R}^k$, $k \geqslant 0$, будем называть *евклидовой k-плоскостью*. Подгруппа $a \subset \Gamma$ называется *кристаллографической* ранга k, если X содержит a-инвариантную евклидову k-плоскость, на которой a действует равномерно.

Каждая нетривиальная изометрия группы Γ является гиперболической (см. [8], п. 8.2). Поэтому каждая почти нильпотентная подгруппа в Γ является кристаллографической (см. [9], предложение 2.3).

2.1.2. Для выпуклого подмножества $A \subset X$ через $\partial_\infty A$ будем обозначать совокупность классов асимптотических лучей, лежащих в A.

Если E – евклидова k-плоскость в X, $k > 0$, то $\partial_\infty E$ изометрично в метрике Титса на $\partial_\infty X$ (см. [8], § 4) единичной евклидовой сфере в $\mathbf{R}^k$. Пусть $x \in E$. Тогда в качестве такой изометрии можно взять отображение $f: S^{k-1} \to \partial_\infty E$, сопоставляющее единичному касательному к E вектору v в точке x геодезический луч $f(v)$ с начальным вектором скорости v.

2.1.3. Предельное множество $L(a) \subset \partial_\infty X$ подгруппы $a \subset \Gamma$ определяется как множество точек сгущения орбиты $a(x)$ точки $x \in X$ (в стандартной конической топологии на $X \cup \partial_\infty X$ (см. [8], п. 3.2)). Оно не зависит от выбора точки x, и если a – нетривиальная кристаллографическая группа, то $L(a) = \partial_\infty E$, где E – инвариантная для a евклидова k-плоскость, на которой a действует равномерно.

2.2. Симплициальные схемы и симплициальные пространства. Все необходимые здесь сведения о симплициальных пространствах можно найти в [10].

Напомним, что *симплициальной схемой* называется пара (M, S), первым элементом которой служит множество, а вторым – покрытие этого множества подмножествами, содержащее вместе с каждым множеством все его части (см. [10], п. 2.2.3).

Всякая симплициальная схема является схемой некоторого симплициального пространства, и при этом симплициальные пространства с изоморфными схемами симплициально гомеоморфны.

Симплициальная схема (M, S) называется *упорядоченной*, если множества из S упорядочены и упорядочение каждого из этих множеств согласовано с упорядочением его подмножеств.

2.2.1. Пусть Cr – совокупность всех нетривиальных кристаллографических подгрупп в группе Γ. Рассмотрим покрытие S множества Cr, состоящее из всевозможных конечных упорядоченных наборов $\{a_i\}_{i=1}^m$ подгрупп из Cr таких, что $a_1 \subset \ldots \subset a_m$. Это покрытие, очевидно, удовлетворяет требованию, предъявляемому к симплициальной схеме, и тем самым возникает упорядоченная симплициальная схема sh Cr = (Cr, S). Соответствующее упорядоченное симплициальное пространство будем обозначать через sp Cr. Множество Cr отождествляется с множеством вершин пространства sp Cr. Каждой вершине $a \in$ Cr соответствует натуральное число rk(a) – ее ранг как кристаллографической группы. Ясно, что $1 \leqslant \mathrm{rk}(a) \leqslant n$.

2.2.2. Обозначим через E_s совокупность всех подмножеств в $\partial_\infty X$ вида $\partial_\infty E$, где E – евклидова плоскость в X положительной размерности. Покрытие множества Es, состоящее из всевозможных конечных упорядоченных наборов $\{l_i\}_{i=1}^m$ подмножеств из Es таких, что $l_1 \subset \ldots \subset l_m$ определяет упорядоченную симплициальную схему sh Es и тем самым упорядоченное симплициальное пространство sp Es. Каждой вершине $l \in$ Es соответствует натуральное число rk(l) = dim$E$, где E – евклидова плоскость в X с $\partial_\infty E = l$. Ясно, что $1 \leqslant \mathrm{rk}(l) \leqslant n$. Согласно п. 2.1.2, симплексы пространства sp Es не содержат вершин одинакового ранга. Поэтому размерность каждого симплекса $\leqslant n-1$.

2.2.3. Обозначим через Pl совокупность всех подмножеств в X, каждое из которых является объединением всех евклидовых подпространств E в X с одним и тем же краем $\partial_\infty E \subset \partial_\infty X$. Покрытие множества Pl, состоящее из всевозможных конечных упорядоченных наборов $\{p_i\}_{i=1}^m$ подмножеств из Pl таких, что $p_1 \supset \ldots \supset$ $\supset p_m$, определяет упорядоченную симплициальную схему sh Pl и тем самым упорядоченное симплициальное пространство sp Pl. Подчеркнем, что порядок, определяемый отношением включения, здесь противоположный, чем в п. 2.2.1 и 2.2.2.

Каждое множество $p \in$ Pl замкнуто и изометрично произведению $D \times \mathbf{R}^k$, где D выпукло и не содержит евклидовых сомножителей (см. [8], п. 2.4). *Рангом* rk(p) вершины $p \in$ Pl будем называть число k из такого разложения. Ясно, что $1 \leqslant \mathrm{rk}(p) \leqslant n$ и что p является объединением всех евклидовых rk(p)-плоскостей в X с одним и тем же краем в $\partial_\infty X$.

2.2.4. Для $\epsilon > 0$ и $x \in X$ положим $\widetilde{\Gamma}_\epsilon(x) = \{\gamma \in \Gamma : \delta_\gamma(x) \leqslant \epsilon\}$, где $\delta_\gamma(x) =$ $= \rho(x, \gamma(x))$ – функция смещения изометрии γ, ρ – расстояние в X, а через $\Gamma_\epsilon(x)$ обозначим подгруппу в Γ, порожденную множеством $\widetilde{\Gamma}_\epsilon(x)$. Для любой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность $U_\epsilon(x)$, что для всех $x' \in U_\epsilon(x)$ выполняется $\widetilde{\Gamma}_\epsilon(x') \subset \widetilde{\Gamma}_\epsilon(x)$, а значит, $\Gamma_\epsilon(x') \subset \Gamma_\epsilon(x)$. Совокупность $\{U_\epsilon(x) : x \in X\}$ образует открытое покрытие многообразия X.

Покрытие X, элементами которого являются, во-первых, все точки из X и, во-вторых, всевозможные пары (x, x') точек из X, для которых или $x' \in U_\epsilon(x)$, или $x \in U_\epsilon(x')$, определяют симплициальную схему sh$X$, а значит, и симплициальное пространство sp$X$. Ясно, что пространство sp$X$ одномерно и связно: путь в sp$X$, соединяющий две его вершины $x, x' \in X$, легко построить, выбирая конечное подпокрытие из покрытия множествами вида $U_\epsilon(x'')$ пути в X, соединяющего точки x и x' (подробнее об этом см. ч. II).

2.3. Отображения симплициальных пространств.

2.3.1. Напомним (см. [10], п. 2.2.3), что отображение (φ, Φ) упорядоченной симплициальной схемы (M, S) в упорядоченную симплициальную схему (M', S') называется *монотонным*, если из $a \preccurlyeq b$ следует $\varphi(a) \preccurlyeq \varphi(b)$. Такое отображение однозначно определяет монотонное симплициальное отображение соответствующих симплициальных пространств.

2.3.2. Согласно п. 2.1.3, определено отображение $L:\mathrm{Cr}\to\mathrm{Es}$, сопоставляющее группе $a\in\mathrm{Cr}$ ее предельное множество $L(a)\in\mathrm{Es}$. При этом если $a\subset a'$, то $L(a)\subset\subset L(a')$. Поэтому L определяет монотонное симплициальное отображение $\mathrm{sp}L:\mathrm{sp}\,\mathrm{Cr}\to\mathrm{sp}\,\mathrm{Es}$. Из определений вытекает, что $\mathrm{sp}L$ сохраняет ранги вершин.

2.3.3. Для множества $l\in\mathrm{Es}$ обозначим через $\mathrm{Conv}(l)$ объединение всех евклидовых подпространств E в X с $\partial_\infty E=l$. Тогда $\mathrm{Conv}(l)\in\mathrm{Pl}$ и оно изометрично произведению $D\times\mathbf{R}^k$, где D выпукло, $k=\mathrm{rk}(l)$. Отображение $\mathrm{Conv}:\mathrm{Es}\to\mathrm{Pl}$ удовлетворяет условию: если $l\subset l'$, то $\mathrm{Conv}(l)\supset\mathrm{Conv}(l')$. Действительно, каждая евклидова плоскость $E'\subset X$ с $\partial_\infty E'=l'$ содержит некоторую плоскость E с $\partial_\infty E=l$ и, более того, исчерпывается такими плоскостями. Поэтому $\mathrm{Conv}(l)\supset\mathrm{Conv}(l')$. Таким образом, функция Conv определяет монотонное симплициальное отображение $\mathrm{sp}\,\mathrm{Conv}:\mathrm{sp}\,\mathrm{Es}\to\mathrm{sp}\,\mathrm{Pl}$. При этом sp Conv не уменьшает ранги вершин: множество $\mathrm{Conv}(l)=D\times\mathbf{R}^k$, $k=\mathrm{rk}(l)$, допускает представление $D'\times R^{k'}$, где D' не содержит евклидовых сомножителей, и поэтому $\mathrm{rk}(\mathrm{Conv}(l))=k'\geqslant k$.

2.3.4. Содержательная часть излагаемой здесь теории основана на принадлежащем Г. А. Маргулису следующем утверждении (см. [8], п. 9.5).

Предложение. *Существует такая постоянная $\mu(n)>0$, зависящая только от n, что для любого числа $\epsilon\in(0,\mu(n)]$ и любой точки $x\in X$ группа $\Gamma_\epsilon(x)$ почти нильпотентна.*

Постоянную $\mu(n)$ будем называть *постоянной Маргулиса*. Обозначим через $\delta_\Gamma:X\to\mathbf{R}$ функцию $\delta_\Gamma(x)=\min\{\delta_\gamma(x):\gamma\in\Gamma\setminus\mathrm{id}\}$. Функция δ_Γ является Г-инвариантной, и $\frac{1}{2}\delta_\Gamma=\mathrm{Inj\,Rad}\circ\pi$, где $\mathrm{Inj\,Rad}:M\to\mathbf{R}$ — радиус инъективности многообразия $M=X/\Gamma$.

Пусть $0<\epsilon\leqslant\mu(n)$ и $X_\epsilon=\{x\in X:\delta_\Gamma(x)\leqslant\epsilon\}$. Тогда для каждого $x\in X_\epsilon$ группа $\Gamma_\epsilon(x)$ нетривиальна и почти нильпотентна. Поэтому, согласно п. 2.1.1, соответствие $x\mapsto\Gamma_\epsilon(x)$ определяет отображение $\Gamma_\epsilon:X_\epsilon\to\mathrm{Cr}$.

Лемма. *Отображение $\Gamma_\epsilon:X_\epsilon\to\mathrm{Cr}$ продолжается до симплициального отображения* $\mathrm{sp}\,\Gamma_\epsilon:\mathrm{sp}\,X_\epsilon\to\mathrm{sp}\,\mathrm{Cr}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{sh}\,\mathrm{Cr}=(\mathrm{Cr},S)$, $\mathrm{sh}\,X_\epsilon=(X_\epsilon,U)$ — симплициальные схемы из п. 2.2.1 и 2.2.4. Достаточно убедиться, что Γ_ϵ переводит элементы покрытия U в элементы покрытия S. Для одноточечных элементов из U это вытекает из выбора постоянной $\epsilon\leqslant\mu(n)$. Пусть (x,x') — двухточечный элемент из U. Это означает, что или $x'\in U_\epsilon(x)$, или $x\in U_\epsilon(x')$. Пусть для определенности $x'\in\in U_\epsilon(x)$. Тогда $\Gamma_\epsilon(x')\subset\Gamma_\epsilon(x)$. Поэтому пара $(\Gamma_\epsilon(x'),\Gamma_\epsilon(x))$ является элементом покрытия S. Лемма доказана.

2.3.5. Возникает диаграмма симплициальных отображений симплициальных пространств

$$\mathrm{sp}\,X_\epsilon\xrightarrow{\mathrm{sp}\,\Gamma_\epsilon}\mathrm{sp}\,\mathrm{Cr}\xrightarrow{\mathrm{sp}\,L}\mathrm{sp}\,\mathrm{Es}\xrightarrow{\mathrm{sp}\,\mathrm{Conv}}\mathrm{sp}\,\mathrm{Pl}.$$

При этом отображения $\mathrm{sp}L$, sp Conv являются монотонными, $\mathrm{sp}L$ сохраняет ранги вершин, а sp Conv не уменьшает их.

2.4. Действия группы Г.

2.4.1. Группа Г действует на множестве Cr сопряжениями: $(\gamma,a)\mapsto\gamma\cdot a\cdot\gamma^{-1}$, где $\gamma\in\Gamma$, $a\in\mathrm{Cr}$. Это действие продолжается до действия на упорядоченном симплициальном пространстве sp Cr монотонными гомеоморфизмами.

2.4.2. Группа Г действует на X: $(\gamma,x)\mapsto\gamma(x)$. Это действие сохраняет множество X_ϵ, $\epsilon>0$, и при этом $\tilde\Gamma_\epsilon(\gamma(x))=\gamma\cdot\tilde\Gamma_\epsilon(x)\cdot\gamma^{-1}$. Поэтому Г действует на симплициальном пространстве $\operatorname{sp} X_\epsilon$ симплициальными гомеоморфизмами, и при $\epsilon \leqslant \mu(n)$ отображение $\operatorname{sp}\Gamma_\epsilon : \operatorname{sp} X_\epsilon \to \operatorname{sp}\mathrm{Cr}$ эквивариантно относительно указанных действий.

2.4.3. Каждая изометрия $\gamma \in \Gamma$ продолжается до автогомеоморфизма пространства $X \cup \partial_\infty X$, сужение которого на $\partial_\infty X$ является изометрией в метрике Титса. Поэтому группа Γ действует на множестве $\mathrm{Es} : (\gamma, l) \mapsto \gamma(l)$. При этом для любой группы $a \in \mathrm{Cr}$ выполняется равенство $\gamma(L(a)) = L(\gamma \cdot a \cdot \gamma^{-1})$. Таким образом, группа Γ действует на упорядоченном симплициальном пространстве $\operatorname{sp}\mathrm{Es}$ монотонными гомеоморфизмами, и отображение $\operatorname{sp} L : \operatorname{sp}\mathrm{Cr} \to \operatorname{sp}\mathrm{Es}$ эквивариантно относительно указанных действий.

2.4.4. Аналогично группа Γ действует на упорядоченном симплициальном пространстве $\operatorname{sp}\mathrm{Pl}$ монотонными гомеоморфизмами, и отображение $\operatorname{sp}\mathrm{Conv}$ эквивариантно относительно указанных действий.

Для подмножества A пространства, на котором действует группа Γ, через $\mathrm{Stab}(A)$ мы обозначаем его стабилизатор $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(A) = A\}$.

2.5. П р е д л о ж е н и е. *Орбита $\Gamma(l)$ какого-либо элемента $l \in \mathrm{Es}$ конечна тогда и только тогда, когда X изометрично произведению $D \times \mathbf{R}^k$. При этом $k \geqslant \mathrm{rk}(l)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если орбита элемента $l \in \mathrm{Es}$ конечна, то группа $\mathrm{Stab}(l)$ имеет конечный индекс в Γ и поэтому действует на X равномерно. Тогда X не имеет собственных выпуклых $\mathrm{Stab}(l)$-инвариантных множеств (см. [8], п 8.2(iv)). Поэтому выпуклое $\mathrm{Stab}(l)$-инвариантное множество $\mathrm{Conv}(l)$ совпадает с X. Но $\mathrm{Conv}(l)$ изометрично произведению $D \times \mathbf{R}^k$, где $k \geqslant \mathrm{rk}(l)$ (см. п. 2.3.3).

Обратно, если X изометрично произведению $D \times \mathbf{R}^k$, где $k \geqslant 1$ и D не содержит евклидовых сомножителей, то группа Γ сохраняет это расщепление, а значит, и сферу $l = \partial_\infty (d \times R^k)$, $d \in D$. При этом $\mathrm{rk}(l) = k$. Предложение доказано.

Теперь можно рассмотреть случай $n = 2$.

2.5.1. П р е д л о ж е н и е. *Допустим, что $X_\epsilon = X$ для некоторого $\epsilon \in (0, \mu(n)]$, $n = 2$. Тогда X изометрично евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$, и многообразие $M = X/\Gamma$ является либо плоским тором, либо плоской бутылкой Кляйна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если множество Es содержит элемент ранга 2, то $X = \mathbf{R}^2$ и утверждение очевидно. Допустим, что каждый элемент множества $L \circ \Gamma_\epsilon(X_\epsilon) \subset \mathrm{Es}$ имеет ранг 1. Тогда полное в $\operatorname{sp}\mathrm{Es}$ подпространство Es_ϵ с множеством вершин $L \circ \Gamma_\epsilon(X_\epsilon)$ нульмерно. Так как $X_\epsilon = X$, то симплициальное пространство $\operatorname{sp} X_\epsilon$ связно. Поэтому симплициальное отображение $\operatorname{sp}\Gamma_\epsilon : \operatorname{sp} X_\epsilon \to \mathrm{Es}_\epsilon$ постоянно и $L \circ \Gamma_\epsilon(X) = l_0$. Так как отображение $L \circ \Gamma_\epsilon$ эквивариантно относительно действий группы Γ, то Γ сохраняет элемент $l_0 \in \mathrm{Es}$. Утверждение теперь вытекает из предложения 2.5.

2.5.2. З а м е ч а н и е. Если одно из множеств Cr, Es, Pl содержит элемент ранга n, то X изометрично $\mathbf{R}^n$ и многообразие $M = X/\Gamma$ плоское. В дальнейшем считаем, что M неплоское, поэтому множества Cr, Es, Pl не имеют элементов ранга n. В частности, размерность каждого симплекса пространства $\operatorname{sp}\mathrm{Es}$ не превосходит $n-2$.

§ 3. Существование Cr-структуры

Этот параграф содержит вывод теоремы A, п. 1.7.1, из следующей теоремы C, доказательству которой будет посвящена II часть работы.

Пусть a – кристаллографическая группа ранга k, E – евклидова k-плоскость, на которой a действует равномерно. По теореме Бибербаха существует такая зависящая от k постоянная $I(k) \geqslant 1$, что группа a содержит состоящую из сдвигов k-плоскости E нормальную подгруппу индекса $\leqslant I(k)$, изоморфную $\mathbf{Z}^k$. Постоянную $I(k)$ будем называть *постоянной Бибербаха*. Можно считать, что $I(k) \leqslant I(k+1)$ для всех натуральных k.

3.1. Теорема C. *Допустим, что* $X_{\epsilon'} = X$ *для некоторого* $\epsilon' > 0$, *где* $8\,(I(n))^4 \times \epsilon' < \mu(n)$, $n \leqslant 4$. *Тогда симплициальное пространство* $\mathrm{sp}E$ *содержит полное* Γ*-инвариантное подпространство* E_G, *которое обладает следующими свойствами:*

3.1.1. *Для любой вершины* $l \in E_G$ *свободная абелева группа* a_l, *состоящая из всех изометрий группы* $\mathrm{Stab}(l) \subset \Gamma$, *которые действуют на множестве* $\mathrm{Conv}(l) = D \times \mathbf{R}^k$, $k = \mathrm{rk}(l)$, *как* (id, сдвиг), *имеет ранг* k.

3.1.2. *Для любой вершины* $l \in E_G$ *группа* $\mathrm{Stab}(l)$ *действует на множестве* $\mathrm{Conv}(l)$ *равномерно, и это множество содержит евклидову* $(n-1)$*-плоскость, если только* $\mathrm{Conv}(l) \neq X$.

3.1.3. *Совокупность* $\left\{\mathrm{Conv}(l)\colon l\right.$ – *вершина* $\left.E_G\right\}$ *замкнута относительно пересечений: если для набора* $\{l_a\}$ *вершин пространства* E_G *множество* $\bigcap_a \mathrm{Conv}(l_a)$ *непусто, то существует такая вершина* $l \in E_G$, *что* $\bigcup_a l_a \subset l$ *и* $\bigcap_a \mathrm{Conv}(l_a) = \mathrm{Conv}(l)$.

3.1.4. $X = \cup\left\{\mathrm{Conv}(l)\colon l\right.$ – *вершина* $\left.E_G\right\}$, *это покрытие многообразия* X *является локально конечным.*

3.2. Пусть M – n-мерное замкнутое C^∞-гладкое риманово многообразие с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$. Тогда $M = X/\Gamma$, где X – многообразие Адамара, а группа $\Gamma = \pi_1(M)$ действует изометриями на X дискретно, свободно и равномерно. Условие того, что $\mathrm{Inj\,Rad}\,(p) \leqslant \epsilon L/2$ для всех $p \in M$, будет эквивалентно условию $X_\epsilon = X$ (см. п. 2.3.4).

Для $n = 2, 3, 4$ положим $\epsilon(n) = \mu(n)/[16(I(n))^4]$. Пусть радиус инъективности многообразия M удовлетворяет условию $\mathrm{Inj\,Rad}(p) < \epsilon(n)$ для всех $p \in M$. Тогда $X_{\epsilon'} = X$ для некоторого ϵ', $8\,(I(n))^4 \cdot \epsilon' < \mu(n)$, а значит, многообразие X и группа Γ удовлетворяют условиям теоремы C. Покажем, что на M существует Cr-структура.

По теореме C существует полное Γ-инвариантное подпространство $E_G \subset \mathrm{sp\,Es}$ (полнота означает, что если вершины симплекса $\sigma \subset \mathrm{sp\,Es}$ лежат в E_G, то и $\sigma \subset E_G$). Поэтому, согласно п. 2.2.2, подпространство E_G является градуированным. Градуированное симплициальное пространство Cr-структуры на M определяется как $S = E_G/\Gamma$.

Множество вида $\mathrm{Conv}(l)$, l – вершина E_G, будем называть *вырожденным*, если его размерность $< n$. В этом случае, согласно 3.1.2, оно является евклидовой $(n-1)$-плоскостью. Для простоты считаем, что каждое множество $\mathrm{Conv}(l)$, l – вершина E_G, является невырожденным. Общий случай требует незначительных изменений, и они будут рассмотрены в п. 3.9.

Для вершин $l \in E_G$ и $s = \Gamma(l) \in S$ будем писать $l \in s$. В этом случае полагаем $V_s = \mathrm{Conv}(l)/\mathrm{Stab}(l)$. Согласно 3.1.2 и предположению о невырожденности, V_s является компактным n-мерным многообразием с краем (возможно, пустым, тогда $V_s = X$). Погружение $\varphi_s\colon V_s \to M$ индуцировано включениями $\mathrm{Conv}(l) \subset X$, $\mathrm{Stab}(l) \subset \Gamma$ и является π_1-инъективным. (Для различных $l, l' \in s$ изометрия $\gamma \in \Gamma$

с $\gamma(l)=l'$ переводит $\mathrm{Conv}(l)$ в $\mathrm{Conv}(l')$, и $\mathrm{Stab}(l')=\gamma\cdot\mathrm{Stab}(l)\cdot\gamma^{-1}$. Поэтому γ индуцирует изометрию между многообразиями $\mathrm{Conv}(l)/\mathrm{Stab}(l)$ и $\mathrm{Conv}(l')/\mathrm{Stab}(l')$, согласованную с их погружениями в M).

3.3. Локальная конечность покрытия. Покажем, что внутренности множеств $\mathrm{Conv}(l)$, l – вершина E_G, покрывают X. Тогда образы внутренностей многообразий V_s при отображениях φ_s покрывают M, и, согласно 3.1.4, это покрытие является локально конечным.

Пусть $x\in X$, и пусть A – совокупность всех вершин $l\in E_G$, для которых $x\in\mathrm{Conv}(l)$. Согласно 3.1.4, множество A непусто, и, поскольку множества вида $\mathrm{Conv}(l)$ замкнуты, объединение $\cup\{\mathrm{Conv}(l):l\in A\}$ содержит некоторую окрестность точки x. Согласно 3.1.3 и предположению о невырожденности, существует точка x', лежащая внутри всех множеств $\mathrm{Conv}(l)$, $l\in A$. Так как такие множества выпуклы и их объединение содержит окрестность точки x, то x лежит внутри одного из этих множеств.

3.4. Структура чистых поляризаций. Покажем, что каждое многообразие $V_s=\mathrm{Conv}(l)/\mathrm{Stab}(l)$ обладает свойством 1.4.2.

Изометрии группы $\mathrm{Stab}(l)$ сохраняют расщепление $\mathrm{Conv}(l)=D\times\mathbf{R}^k$, $k=\mathrm{rk}(l)$, поэтому определены гомоморфизмы $p':\mathrm{Stab}(l)\to\mathrm{Iso}(D)$ и $p'':\mathrm{Stab}(l)\to\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^k)$. Для $\gamma\in\mathrm{Stab}(l)$ и $x=(d,r)\in D\times\mathbf{R}^k$ имеем $\gamma(x)=(p'(\gamma)(d),p''(\gamma)(r))$.

3.4.1. Так как, согласно 3.1.1, группа a_l состоит из всех изометрий $\gamma\in\mathrm{Stab}(l)$ вида (id, сдвиг), то она является нормальной подгруппой в $\mathrm{Stab}(l)$. Поэтому группа $\mathrm{Stab}(l)$ действует на a_l сопряжениями: $(\gamma,\alpha)\mapsto\gamma\cdot\alpha\cdot\gamma^{-1}$ для $\gamma\in\mathrm{Stab}(l)$ и $\alpha\in a_l$. Пусть K – ядро этого действия. Тогда $a_l\subset K$, и каждый элемент вида $\gamma\cdot\alpha\cdot\gamma^{-1}\in a_l$, где $\gamma\in\mathrm{Stab}(l)$, является сдвигом в сомножителе $\mathbf{R}^k$ на то же расстояние, что и α. Поэтому из дискретности действия группы Γ на многообразии X вытекает, что ядро K имеет конечный индекс в группе $\mathrm{Stab}(l)$.

3.4.2. Все элементы группы K коммутируют с любым элементом из a_l. Согласно 3.1.1, группа a_l действует на сомножителе $\mathbf{R}^k$ равномерно. Поэтому группа K действует на множестве $\mathrm{Conv}(l)$ изометриями вида $(\gamma',\text{сдвиг})$, и $a_l=\mathrm{Ker}(p'|K)$. Тогда корректно определен гомоморфизм $q:p'(K)\to T^k$, $q(p'(\gamma))=P(p''(\gamma))$, где $P:\mathbf{R}^k\to T^k$ – проекция пространства $\mathbf{R}^k$ на тор $T^k=\mathbf{R}^k/a_l$.

Рассуждая, как в [7], с. 26, находим нормальную в K подгруппу K^* конечного индекса, для которой группа $p'(K^*)$ не содержит нетривиальных эллиптических изометрий множества D (группа K^* может быть описана как $(q\circ p')^{-1}(F)$, где в разложении $F\oplus\mathrm{Tors}$ абелевой группы $q\circ p'(K)\subset T^k$ группа F – свободная абелева, а Tors – кручение). При этом $a_l\subset K^*$. Группа K^* не является, вообще говоря, нормальной в группе $\mathrm{Stab}(l)$. Однако группа $\widetilde{K}=\bigcap\limits_{\gamma\in\mathrm{Stab}(l)}\gamma\cdot K^*\cdot\gamma^{-1}$ лежит в K^*, является нормальной в $\mathrm{Stab}(l)$ и имеет конечный индекс в K, а значит, и в $\mathrm{Stab}(l)$. Последнее следует из того, что группа K^* – нормальная в K, группа K имеет конечный индекс в $\mathrm{Stab}(l)$ и пересечение конечного числа подгрупп, имеющих конечный индекс в K, само имеет конечный индекс в K. Так как a_l – нормальная в $\mathrm{Stab}(l)$ подгруппа, то $a_l\subset\widetilde{K}$.

33.4.3. Полагаем $\widetilde{V}_s=\mathrm{Conv}(l)/\widetilde{K}$. Тогда накрытие $\psi_s:\widetilde{V}_s\to V_s$, определяемое включением $\widetilde{K}\subset\mathrm{Stab}(l)$, является конечнолистным и нормальным.

На произведении $D\times T^k=\mathrm{Conv}(l)/a_l$ имеются два изометрических действия группы $p'(\widetilde{K})$: $\Phi_1(\gamma,(d,t))=(\gamma(d),t)$ и $\Phi_2(\gamma,(d,t))=(\gamma(d),q(\gamma)t)$. При этом $D\times T^k/\Phi_1$ изометрично произведению $V_s'\times T^k$, где $V_s'=D/p'(\widetilde{K})$ – компактное

$(n-k)$-мерное многообразие, и нетрудно видеть, что $D\times T^k/\Phi_2$ изометрично $\widetilde{V}_s$ (см. [7]).

Действие Φ_2 сохраняет сомножители произведения $D\times T^k$, поэтому $\widetilde{V}_s$ является расслоением, каждый вполне геодезический слой которого изометричен тору T^k. То, что это расслоение является тривиальным, доказывается так же, как в [7]. Именно, согласно [7], лемма 4, существует такое C^∞-гладкое отображение $f:D\to T^k$, что $f(\gamma(d))=q(\gamma)\cdot f(d)$ для всех $d\in D$ и всех $\gamma\in p'(\widetilde{K})$. Диффеоморфизм $W:D\times T^k\to D\times T^k$, $W(d,t)=(d,t\cdot f(d))$, эквивариантен относительно действий Φ_1 и Φ_2 и является изометрией на каждом слое $d\times T^k\subset D\times T^k$. Поэтому он индуцирует диффеоморфизм $w: V_s'\times T^k\to\widetilde{V}_s$, который изометрично переводит каждый слой $v\times T^k\subset V_s'\times T^k$ в соответствующий вполне геодезический слой расслоения $\widetilde{V}_s$.

Остается убедиться, что преобразования накрытия $\psi_s:\widetilde{V}_s\to V_s$ из группы $G=\operatorname{Stab}(l)/\widetilde{K}$ индуцируют автоморфизмы естественного действия $(t,(v,a))\mapsto$ $\mapsto(v,t\cdot a)$ тора T^k на $V_s'\times T^k$. Ясно, что относительно этого действия эквивариантны как проекция $D\times T^k\to V_s'\times T^k$, так и диффеоморфизм W. Поэтому достаточно показать, что группа G индуцирует автоморфизм действия тора T^k на $D\times T^k$. На самом деле этим свойством обладает более обширная группа $\operatorname{Stab}(l)/a_l$. Действительно, это следует из того, что изометрии из группы $\operatorname{Stab}(l)$ индуцируют автоморфизмы естественного действия группы $\mathbf{R}^k$ на $D\times\mathbf{R}^k=\operatorname{Conv}(l)$: пусть $\gamma\in$ $\in\operatorname{Stab}(l)$, пусть $r(\gamma)\in\mathbf{O}(k)$ – ортогональная часть изометрии $p''(\gamma):\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^k$ и пусть $t\in\mathbf{R}^R$. Тогда $\gamma\circ t=r(\gamma)(t)\circ\gamma$, где t рассматривается как изометрия $t((d,a))=(d,t+a)$ произведения $D\times\mathbf{R}^k$.

Таким образом, каждое многообразие V_s обладает свойством 1.4.2.

3.4.4. З а м е ч а н и е. Край выпуклого множества $\operatorname{Conv}(l)=D\times\mathbf{R}^k$, вообще говоря, негладкий. Однако он изометричен произведению $\partial D\times\mathbf{R}^k$. Поэтому края многообразий V_s, $\widetilde{V}_s$, $V_s'\times T^k$ и сужения на них отображений φ_s, ψ_s, w являются гладкими вдоль слоев соответствующих слоений. Именно в этом смысле понимается гладкость отображений в этом пункте.

3.5. Инъективность относительно слоения. Подпространство $\tau_{s,y}\subset T_xM$ является образом при дифференциале $d(\varphi_s\circ\pi_s)$ касательного пространства к евклидовой k-плоскости $d\times\mathbf{R}^k\subset D\times\mathbf{R}^k=\operatorname{Conv}(l)$ в точке $z\in d\times\mathbf{R}^k$, где $y\in V_s$, $\varphi_s(y)=x$, $l\in s$, $\pi_s:\operatorname{Conv}(l)\to V_s=\operatorname{Conv}(l)/\operatorname{Stab}(l)$ – каноническая проекция, $\pi_s(z)=y$.

Пусть $\tau_{s,y}=\tau_{s,y'}$. Это означает, что существует изометрия $\gamma\in\Gamma$, для которой $\gamma(z)\in\operatorname{Conv}(l)$, $\pi_s\circ\gamma(z)=y'$ и $\gamma(d\times R^k)$ – евклидова k-плоскость в $\operatorname{Conv}(l)$ вида $d'\times R^k$. Поэтому $\gamma(l)=l$, а значит, $\gamma\in\operatorname{Stab}(l)$ и $y=y'$. Таким образом, имеет место свойство 1.4.3.

3.6. Максимальность. Пусть $x\in M$, пусть $\operatorname{ti}(x)$ – совокупность всех подпространств вида $\tau_{s,y}$ касательного пространства T_xM, где $y\in\operatorname{Int}(V_s)$, $s\in\operatorname{ske}_0(S)$, и пусть $\left\{\tau_{s_a,y_a}\right\}$ – некоторый набор подпространств из $\operatorname{ti}(x)$. Это означает, что точка $z\in X$ с $\pi(z)=x$ лежит в пересечении $\bigcap\limits_a\operatorname{Int}(\operatorname{Conv}(l_a))$ для подходящих $l_a\in s_a$. По свойству 3.1.3 существует такая вершина $l_0\in E_G$, что $\bigcup\limits_a l_a\subset l_0$ и $\bigcap\limits_a\operatorname{Conv}(l_a)=\operatorname{Conv}(l_0)$. Но тогда, используя 3.3, получаем, что $z\in\operatorname{Int}(\operatorname{Conv}(l_0))$. Поэтому $\bigcup\limits_a\tau_{s_a,y_a}\subset\tau_{s_0,y_0}$, где $s_0=\Gamma(l_0)\in\operatorname{ske}_0(S)$, $y_0=\pi_{s_0}(z)\in\operatorname{Int}(V_{s_0})$. Таким образом, $\tau_{s_0,y_0}\in\operatorname{ti}(x)$, и свойство максимальности 1.4.4 выполняется.

3.7. Локальная согласованность. Пусть $\tau_{s,y} \subset \tau_{s',y'}$ для вершин $s, s' \in S$, точек $y \in V_s$, $y' \in V_{s'}$. Тогда $\varphi_s(y) = \varphi_{s'}(y') = x$. Это означает, что точка $z \in X$ с $\pi(z) = x$ лежит в евклидовых плоскостях $d \times \mathbf{R}^k \subset d' \times \mathbf{R}^{k'}$, где $d \times \mathbf{R}^k \subset D \times \mathbf{R}^k = \mathrm{Conv}(l)$, $k = \mathrm{rk}(l)$, $d' \times \mathbf{R}^{k'} \subset D' \times \mathbf{R}^{k'} = \mathrm{Conv}(l')$, $k' = \mathrm{rk}(l')$ для подходящих вершин $l \in s$, $l' \in s'$. Поэтому $l \subset l'$, а значит, $s \lessdot s'$. Если точки y, y' являются внутренними в V_s, $V_{s'}$, то точка z лежит внутри множеств $\mathrm{Conv}(l)$ и $\mathrm{Conv}(l')$. Гомеоморфизм $\varphi_s^{-1} \circ \varphi_{s'} | W'$, о котором идет речь в 1.4.5, индуцирован тождественным отображением соответствующей окрестности $\widetilde{W}$ точки z, $\pi(\widetilde{W}) = \varphi_s(W) = \varphi_{s'}(W')$. Локальные действия групп $\mathbf{R}^k$, $\mathbf{R}^{k'}$ на $\widetilde{W}$ согласованы с включениями $d \times \mathbf{R}^k \subset d' \times \mathbf{R}^{k'}$ соответствующих евклидовых плоскостей, проходящих через точки окрестности $\widetilde{W}$.

3.7.1. Так как $l \subset l'$, то $\mathrm{Conv}(l) \supset \mathrm{Conv}(l')$ и $\mathrm{Conv}(l') = D' \times \mathbf{R}^{k'-k} \times \mathbf{R}^k$, где $D' \times \mathbf{R}^{k'-k} \subset D$. Поскольку группа a_l действует на $D \times \mathbf{R}^k$ изометриями вида (id, сдвиг), то она сохраняет вершину l' и лежит в группе $a_{l'}$.

Если изометрия $\gamma \in a_{l'}$ сохраняет плоскость $d \times \mathbf{R}^k \subset d' \times \mathbf{R}^{k'}$, то $\gamma \in \mathrm{Stab}(l)$ и γ действует на $\mathrm{Conv}(l) = D \times R^k$ как (γ', сдвиг), где $\gamma'(d) = d$. Поскольку множество $\mathrm{Conv}(l')$ имеет размерность $n = \dim X$, то голономия изометрии γ на $\mathrm{Conv}(l')$ тривиальна. Поэтому $\gamma' = \mathrm{id}$ и $\gamma \in a_l$. Таким образом, гомоморфизм $T^k = d \times \mathbf{R}^k / a_l \to T^{k'} = d \times \mathbf{R}^{k'} / a_{l'}$, индуцированный вложениями $d \times \mathbf{R}^k \subset d' \times \mathbf{R}^{k'}$ и $a_l \subset a_{l'}$, является инъективным. На уровне многообразий V_s, $V_{s'}$ этот гомоморфизм является вложением $\xi_y^{y'} : (P_s)_y \to (P_{s'})_{y'}$ слоев пучков групп $P_s, P_{s'}$.

С учетом п. 3.4 и того, что сказано о локальных действиях в п. 3.7, свойство 1.4.5 теперь очевидно.

3.8. Глобальная согласованность. Пусть $s \lessdot s'$. Найдутся вершины $l \in s$, $l' \in s'$ с $l \subset l'$. Тогда $\mathrm{Conv}(l') \subset \mathrm{Conv}(l)$, в частности, $\mathrm{Int}(\mathrm{Conv}(l')) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Conv}(l))$. Поскольку $\varphi_s \circ \pi_s = \pi | \mathrm{Conv}(l)$, то $\varphi_{s'}(\mathrm{Int}(V_{s'})) \subset \varphi_s(\mathrm{Int}(V_s))$.

Пусть $\mathrm{Conv}(l') = D \times R^{k'}$, $k' = \mathrm{rk}(l')$. Множество $\mathrm{Conv}(l)$ выпукло. Поэтому если евклидова k'-плоскость $d' \times \mathbf{R}^{k'} \subset D \times \mathbf{R}^{k'}$ имеет точку внутри $\mathrm{Conv}(l)$, то она вся лежит внутри $\mathrm{Conv}(l)$. Отсюда следует свойство 1.4.6.

3.9. Рассмотрим теперь общий случай, когда некоторые множества вида $\mathrm{Conv}(l)$, где l – вершина пространства E_G, могут иметь размерность $< n$.

3.9.1. Пусть l_0 – такая вершина. Тогда, согласно 3.1.2, множество $p_0 = \mathrm{Conv}(l_0)$ является евклидовой $(n-1)$-плоскостью в X. Обозначим через L_0 совокупность всех вершин $l \in E_G$, для которых пересечение $p_0 \cap \mathrm{Conv}(l)$ непусто. Согласно 3.1.3 и 3.1.2, $p_0 \subset \bigcap_{l \in L_0} \mathrm{Conv}(l)$. Из 3.1.4 и равномерности действия группы $\mathrm{Stab}(l_0)$ на p_0 следует, что объединение $\bigcup_{l \in L_0} \mathrm{Conv}(l)$ содержит множество p_0 вместе с некоторой его замкнутой метрической δ-окрестностью $\mathrm{Conv}_\delta(l_0)$. Более того, можно считать, что если $\mathrm{Conv}_\delta(l_0)$ не лежит внутри множества $\mathrm{Conv}(l)$, $l \in L_0$, то либо $\mathrm{Conv}(l) = p_0$, либо p_0 – компонента края $\partial(\mathrm{Conv}(l))$ и $\mathrm{Conv}(l)$ содержит все точки множества $\mathrm{Conv}_\delta(l_0)$, лежащие по ту же сторону от p_0.

Совокупность таких $l \in L_0$, что гиперплоскость p_0 не лежит внутри $\mathrm{Conv}(l)$, обозначим через L_0'. Для $l \in L_0'$ полагаем $C_{l_0}(l) = \mathrm{Conv}(l) \cup \{\gamma(\mathrm{Conv}_\delta(l_0)) : \gamma \in \mathrm{Stab}(l)\}$.

3.9.2. Пусть ν – непрерывное вдоль p_0 поле единичных векторов, ортогональных к p_0. Диффеоморфизм $f : D_0 \times p_0 \to \mathrm{Conv}_\delta(l_0)$, $f(d, x) = \exp_x(d \cdot \nu)$, где

$D_0 = [-\delta, \delta]$, переводит каждый слой $d \times p_0$, $d \in D_0$, в эквидистанту к гиперплоскости p_0 и является изометрией на $0 \times p_0$. С помощью f изометрическое расщепление $\mathrm{Conv}(l) = D \times \mathbf{R}^k$, $l \in L_0'$, $k = \mathrm{rk}(l)$ продолжается до диффеоморфизма $\widetilde{D} \times \mathbf{R}^k \to$ $\to C_{l_0}(l)$, где $D \subset \widetilde{D}$, эквивариантного относительно изометрических действий группы $\mathrm{Stab}(l)$ на $C_{l_0}(l)$ и на $\widetilde{D} \times \mathbf{R}^k$, причем последнее продолжает уже имеющееся действие на $D \times \mathbf{R}^k$.

3.9.3. Для вершин $l_0 \in E_G$ с вырожденными множествами $\mathrm{Conv}(l_0)$ выберем их дизъюнктные замкнутые окрестности вида $C(l_0) = \mathrm{Conv}_\delta(l_0)$, как в п. 3.9.1, эквивариантно относительно действия группы Γ. Для любой другой вершины $l \in E_G$ обозначим через $C(l)$ объединение множеств вида $C_{l_0}(l)$, где $l_0 \in E_G$ и $\mathrm{Conv}(l_0)$ – компонента края $\partial(\mathrm{Conv}(l))$. Модифицированные таким образом множества $C(l)$ выпуклы, имеют размерность n, и с учетом п. 3.9.2 нетрудно видеть, что они обладают свойствами 3.1.1–3.1.4.

3.10. Заменяя в п. 3.3–3.8 соответствующие изометрии диффеоморфизмами, как в п. 3.9.2, получаем, что и в общем случае на многообразии M имеется Cr-структура.

Каждое множество $\mathrm{Conv}(l)$, где l – вершина E_G, изометрично произведению $D \times R^k$, $k = \mathrm{rk}(l)$. Согласно 3.9.1, те из этих множеств, которые имеют размерность $< n$, попарно не пересекаются. Поэтому из 3.1.4 получаем, что метрика многообразия X, а значит, и многообразия $M = X/\Gamma$ локально содержит евклидов сомножитель, причем соответствующее расщепление согласовано с Cr-структурой в смысле п. 1.7.2.

Таким образом, теорема A доказана при условии справедливости теоремы C.

§ 4. Cr-структура и *F*-структура

В этом параграфе рассматриваются некоторые свойства Cr-структуры и доказывается теорема B, п. 1.7.4.

Пусть $(S, \{\varphi_s : s \in \mathrm{ske}_0(S)\})$ есть Cr-структура на гладком многообразии M.

4.1. Предложение. *Симплициальное пространство S связно тогда и только тогда, когда связно многообразие M.*

4.1.1. Согласно свойствам 1.4.1 и 1.4.4, для каждой точки $x \in M$ совокупность $\mathrm{ti}(x)$ содержит единственное подпространство $\tau(x)$ такое, что все подпространства из $\mathrm{ti}(x)$ лежат в $\tau(x)$. Соответствие $x \mapsto \tau(x)$ определяет отображения $s : M \to$ $\to \mathrm{ske}_0(S)$ и $y : M \to \bigsqcup_{s \in \mathrm{ske}_0(S)} \mathrm{Int}(V_s)$ ($\bigsqcup$ – дизъюнктное объединение), где $\tau(x) =$ $= \tau_{s(x), y(x)}$. Действительно, существование отображения s следует из п. 1.4.5, а отображения y – из п. 1.4.3.

4.1.2. Для вершины $s \in S$ множество $U_s = \varphi_s(\mathrm{Int}(V_s))$ открыто в M. Для точки $x \in M$ положим $U(x) = U_{s(x)}$. Тогда $x \in U(x)$, поскольку $y(x) \in \mathrm{Int}(V_{s(x)})$ и $x = \varphi_{s(x)}(y(x))$.

Набор окрестностей $\{U(x) : x \in M\}$ позволяет отождествить многообразие M, как множество, с нульмерным остовом одномерного симплициального пространства $\mathrm{sp}M$: точки $x, x' \in M$ являются вершинами симплекса из $\mathrm{sp}M$, если либо $x' \in U(x)$, либо $x \in U(x')$. Так как окрестности $U(x)$ связны, то пространство $\mathrm{sp}M$ и многообразие M, очевидно, связны или нет одновременно.

4.1.3. Лемма. *Для каждой вершины $s \in S$ и каждой точки $x \in U_s$ выполняется $s \preccurlyeq s(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдется точка $y \in \mathrm{Int}(V_s)$ с $\varphi_s(y) = x$. Тогда $\tau_{s,y} \subset \subset \tau(x)$, и утверждение следует из п. 1.4.5.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 4.1. В силу леммы 4.1.3 отображение $s : M \to \mathrm{ske}_0(S)$ продолжается до симплициального отображения $\mathrm{sp}\, s : \mathrm{sp}\, M \to S$. Для каждой вершины $s_0 \in S$ и точки $y \in \mathrm{Int}(V_{s_0})$ имеем $\tau_{s_0, y} \subset \tau(x_0)$, где $x_0 = = \varphi_{s_0}(y)$. Поэтому $s_0 \preccurlyeq s(x_0)$, а значит, вершина s_0 лежит в одном симплексе с вершиной $s(x_0) \in s(M)$. Поэтому если многообразие M связано, то симплициальное пространство S его Cr-структуры связно. Обратное утверждение вытекает из п. п. 1.4.1, 1.4.6 и того, что S – градуированное симплициальное пространство. Предложение доказано.

Приступим теперь к доказательству теоремы В. Будет показано, что на многообразии M возникает пучок связных топологических групп, каждый слой которого является тором, задано действие этого пучка на M и проверено, что при этом выполняются все требования определений 1.1, 1.2 и 1.4 работы [4]. Такой пучок и его действие на M являются F-структурой.

4.2. Согласно 1.4.2, пучок P_s на многообразии V_s, $s \in \mathrm{ske}_0(S)$, является локально постоянным. Иначе говоря, P_s – плоское расслоение над V_s, каждый слой которого – группа, изоморфная тору $T^{\mathrm{rk}(s)}$, и голономия действует автоморфизмами на слое. Поэтому каждая точка $y \in \mathrm{Int}(V_s)$ обладает такой окрестностью $\widetilde{W}(y) \subset \subset \mathrm{Int}(V_s)$, что для всех $y' \in \widetilde{W}(y)$ канонически определен изоморфизм $\widetilde{\eta}_y^{y'} : (P_s)_y \to \to (P_s)_{y'}$, причем $\widetilde{\eta}_y^{y''} = \widetilde{\eta}_{y'}^{y''} \circ \widetilde{\eta}_y^{y'}$ для $y'' \in \widetilde{W}(y) \cap \widetilde{W}(y')$. Иначе он может быть описан как композиция $i_{y', \widetilde{W}(y)} \circ (i_{y, \widetilde{W}(y)})^{-1}$, где $i_{y', \widetilde{W}(y)} : P_s(\widetilde{W}(y)) \to (P_s)_{y'}$ – гомоморфизм ограничения, являющийся в данном случае изоморфизмом.

В дальнейшем считаем, что если $\widetilde{W}(y) \cap \widetilde{W}(y')$ непусто, то погружение φ_s инъективно на $\widetilde{W}(y) \cup \widetilde{W}(y')$.

Переходя к алгебрам Ли, заметим, что дифференциал $d\widetilde{\eta}_y^{y'}$ изоморфизма $\widetilde{\eta}_y^{y'}$ в единице можно рассматривать как изоморфизм $t_y \to t_{y'}$ соответствующих касательных пространств к слоям слоения $\mathcal{T}_s$ (см. 1.4.2). Локальное действие пучка P_s на связном открытом множестве $A \subset V_s$ может быть описано с помощью $\widetilde{\eta}$-инвариантных векторных полей на A, значения которых в каждой точке $y \in A$ лежат в t_y. Поле Z называется $\widetilde{\eta}$-инвариантным, если каждая точка $y \in A$ обладает такой окрестностью $A' \subset A$, что $Z(y') = d\widetilde{\eta}_y^{y'} \circ Z(y)$ для всех $y' \in A'$.

4.2.1. Л е м м а. *Пусть* $y'' \in \widetilde{W}(y') \subset \mathrm{Int}(V_s)$, $z'' \in \widetilde{W}(z') \subset \mathrm{Int}(V_{s'})$ *– такие точки, что* $\varphi_s(y') = \varphi_{s'}(z')$, $\varphi_s(y'') = \varphi_{s'}(z'')$ *и* $\tau_{s,y'} \subset \tau_{s',z'}$. *Тогда* $s \preccurlyeq s'$, $\tau_{s,y''} \subset \subset \tau_{s',z''}$ *и* $\xi_{y''}^{z''} \circ \widetilde{\eta}_{y'}^{y''} = \widetilde{\eta}_{z'}^{z''} \circ \xi_{y'}^{z'}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству 1.4.5 имеем $s \preccurlyeq s'$, и локальное действие подгруппы $\xi_{y'}^{z'}((P_s)_{y'}) \subset (P_{s'})_{z'}$ на $\widetilde{W}(z')$ совпадает с действием группы $(P_s)_{y'}$, индуцированным гомеоморфизмом $\varphi_s^{-1} \circ \varphi_{s'} : \widetilde{W}(z') \to \widetilde{W}(y')$. Доказываемые соотношения являются другой записью этого факта.

4.3. Положим $\mathcal{F} = \{\gamma \in T_x : x \in M\}$, где $T_x = (P_{s(x)})_{y(x)}$ – слой пучка $P_{s(x)}$ в точке $y(x)$ (таким образом, T_x – тор размерности $\mathrm{rk}(s(x))$). Имеется отображение $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to M$, $p_{\mathcal{F}}(\gamma) = x$, где $\gamma \in T_x$. Покажем, что $\mathcal{F}$ несет на себе естественную структуру пучка абелевых групп на M.

4.3.1. Пусть $x \in M$. Для каждой точки $x' \in M$, достаточно близкой к x, определим гомоморфизм $\eta_x^{x'} : T_x \to T_{x'}$, полагая

$$\eta_x^{x'} = \xi_{y'}^{y(x')} \circ \tilde{\eta}_{y(x)}^{y'},$$

где $y' \in \widetilde{W}(y(x))$ – единственная точка с $\varphi_{s(x)}(y') = x'$, а отображение $\xi_{y'}^{y(x')} : (P_{s(x)})_{y'} \to (P_{s(x')})_{y(x')}$ индуцировано включением $\tau_{s(x),y'} \subset \tau(x')$ (см. 1.4.5). Множество тех точек, для которых определен гомоморфизм $\eta_x^{x'}$, может быть описано как $W(x) = \varphi_{s(x)}(\widetilde{W}(y(x)))$.

4.3.2. Как непосредственно следует из определений, гомоморфизм $\eta_x^{x'}$ является инъективным.

4.3.3. Лемма. *Пусть $x \in M, x' \in W(x), x'' \in W(x) \cap W(x')$. Тогда*

$$\eta_x^{x''} = \eta_{x'}^{x''} \circ \eta_x^{x'}.$$

Доказательство. По лемме 4.1.3 имеем $s(x) \preccurlyeq s(x') \preccurlyeq s(x'')$. По выбору окрестностей (см. п. 4.2 и 4.3.1) однозначно определены точки $y'' \in \widetilde{W}(y(x)) \subset \subset \operatorname{Int}(V_{s(x)})$ и $z'' \in \widetilde{W}(y(x')) \subset \operatorname{Int}(V_{s(x')})$ с $\varphi_{s(x)}(y'') = \varphi_{s(x')}(z'') = x''$. Причем если $s(x) = s(x')$, то $y(x') \in \widetilde{W}(y(x))$ и $y'' = z''$. Поэтому, согласно лемме 4.2.1, $\tau_{s(x),y''} \subset \tau_{s(x'),z''}$ и в касательном пространстве $T_{x''}M$ имеем цепочку $\tau_{s(x),y''} \subset \subset \tau_{s(x'),z''} \subset \tau(x'')$ вложенных подпространств. Для точки $y' \in \widetilde{W}(y(x))$ с $\varphi_{s(x)}(y') = = x'$ по лемме 4.2.1 имеем

$$\xi_{y''}^{z''} \circ \tilde{\eta}_{y'}^{y''} = \tilde{\eta}_{y(x')}^{z''} \circ \xi_{y'}^{y(x')}.$$

По выбору окрестности $\widetilde{W}(y(x))$ имеем $\tilde{\eta}_{y'}^{y''} \circ \tilde{\eta}_{y(x)}^{y'} = \tilde{\eta}_{y(x)}^{y''}$ (см. п. 4.2). Утверждение теперь следует из п. 1.4.5. Лемма доказана.

4.4. Пусть $U \subset M$ – открытое множество, и пусть отображение $f : U \to \mathcal{F}$ удовлетворяет условию $p_{\mathcal{F}} \circ f = \mathrm{id}$, т.е. является сечением над U семейства $(\mathcal{F}, M, p_{\mathcal{F}})$. Сечение f будем называть η-инвариантным, если для каждой точки $x \in U$ существует такая ее окрестность $U' \subset U$, что $f(x') = \eta_x^{x'} \circ f(x)$ для всех $x' \in U'$.

Для открытого множества $U \subset M$ обозначим через $\mathcal{F}(U)$ множество всех η-инвариантных сечений над U семейства $(\mathcal{F}, M, p_{\mathcal{F}})$. Из п. 4.3.2 следует, что каждое η-инвариантное сечение однозначно определяется на каждой компоненте связности множества U своим значением в какой-либо точке. Поскольку каждый слой $p_{\mathcal{F}}^{-1}(x)$ является тором, то $\mathcal{F}(U)$ несет естественную структуру связной абелевой группы. Тем самым соответствие $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ определяет, как легко видеть, пучок связных абелевых групп на M. Этот пучок будем обозначать той же буквой $\mathcal{F}$.

4.4.1. Лемма. *В каждой точке $x \in M$ слой $\mathcal{F}_x$ пучка $\mathcal{F}$ совпадает с тором $T_x = p_{\mathcal{F}}^{-1}(x)$.*

Доказательство. Пусть U – окрестность точки x. Определим гомоморфизм $\beta_U : \mathcal{F}(U) \to T_x$, полагая для $f \in \mathcal{F}(U)$

$$\beta_U(f) = f(x).$$

Это определяет гомоморфизм $\beta : \mathcal{F}_x \to T_x$, который является, очевидно, инъективным. Пусть $\gamma \in T_x$, и пусть окрестность $U = W(x)$, см. п. 4.3.1. Для $x' \in U$ полагаем $f(x') = \eta_x^{x'}(\gamma)$. Ясно, что $f(x) = \gamma$, и для $x'' \in U \cap W(x')$ в силу леммы 4.3.3 имеем

$$f(x'') = \eta_x^{x''}(\gamma) = \eta_{x'}^{x''} \circ \eta_x^{x'}(\gamma) = \eta_{x'}^{x''} \circ f(x'),$$

т. е. сечение $f : U \to \mathcal{F}$ является η-инвариантным. Поскольку $\beta_U(f) = \gamma$, то гомоморфизм β сюръективен. Лемма доказана.

4.5. Действие пучка $\mathcal{F}$ на многообразии M. Чтобы определить действие пучка $\mathcal{F}$ на M, достаточно задать для каждого связного открытого множества $U \subset M$ локальное действие группы $\mathcal{F}(U)$ на U так, чтобы гомоморфизм ограничения $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ (для $U' \subset U$) совпадал с ограничением локального действия с U на U'. В рассматриваемой гладкой ситуации локальное действие является гомоморфизмом алгебры Ли группы $\mathcal{F}(U)$ в алгебру Ли векторных полей на U. Элементами алгебры Ли группы $\mathcal{F}(U)$ являются, очевидно, η-инвариантные поля на U со значениями в алгебрах Ли групп T_x, $x \in U$. Но каждая такая алгебра Ли отождествляется с помощью отображения $\varphi_{s(x)}$ с подпространством $\tau(x) = d\varphi_{s(x)}(t_{y(x)}) \subset T_x M$. Дифференциал гомоморфизма $\eta_x^{x'}$ в единице превращается теперь в линейное вложение $\tau(x) \to \tau(x')$. Тем самым элементы алгебры Ли группы $\mathcal{F}(U)$ отождествляются с η-инвариантными векторными полями на U, значения которых в каждой точке $x \in U$ лежат в подпространстве $\tau(x) \subset T_x M$. Ясно, что такие поля непрерывны. Это и задает действие пучка $\mathcal{F}$ на U.

4.6. Орбиты действия пучка $\mathcal{F}$. Для точки $y \in V_s$ обозначим через q_y слой слоения $\mathcal{T}_s$, проходящий через y. Другими словами, q_y – орбита действия пучка P_s на V_s, проходящая через y. При этом $t_{y'}$ – касательное пространство к q_y в точке $y' \in q_y$.

4.6.1. П р е д л о ж е н и е. *Для каждой точки $x \in M$ отображение $\varphi_{s(x)}$ является вложением $q_{y(x)} \to M$ на орбите $q_{y(x)}$ действия пучка P_s, и орбита O_x действия пучка $\mathcal{F}$ на M, проходящая через точку x, совпадает с образом $\varphi_{s(x)}(q_{y(x)})$.*

Для доказательства этого утверждения потребуются две леммы.

4.6.2. Л е м м а. *Если $\tau_{s,y} \subset \tau_{s',y'}$ для внутренних точек $y \in V_s$, $y' \in V_{s'}$, то $\varphi_s(q_y) \subset \varphi_{s'}(q_{y'})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество A точек $z \in q_y$, для которых пространство $\tau_{s,z} = d\varphi_s(t_z)$ лежит в $\tau_{s',z'}$, для некоторой точки $z' \in q_{y'}$ (z', конечно, зависит от z), замкнуто в q_y. Поскольку точки $y \in V_s$, $y' \in V_{s'}$ внутренние, то орбиты q_y, $q_{y'}$ лежат внутри V_s, $V_{s'}$, и в силу 1.4.5 для каждой точки $z \in A$ образ при φ_s части орбиты q_y, лежащей в некоторой окрестности точки z, лежит в $\varphi_{s'}(q_{y'})$. Поэтому A открыто в q_y. Поскольку орбиты пучка P_s связны, то $A = q_y$ и $\varphi_s(q_y) \subset \varphi_{s'}(q_{y'})$. Лемма доказана.

4.6.3. Л е м м а. *Для каждой точки $x \in M$ и каждой точки $y' \in q_{y(x)}$ имеем $\tau_{s(x),y'} = \tau(x')$, где $x' = \varphi_{s(x)}(y')$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $y' \in q_{y(x)} \subset \operatorname{Int}(V_{s(x)})$ и $\tau_{s(x),x'} \subset \tau(x')$, то $s(x) \preccurlyeq s(x')$, и по предыдущей лемме $\varphi_{s(x)}(q_{y(x)}) \subset \varphi_{s(x')}(q_{y(x')})$. Поэтому $x \in \varphi_{s(x')}(q_{y(x')})$. Пусть $y'' \in q_{y(x')}$ – такая точка, что $\varphi_{s(x')}(y'') = x$. Тогда $\tau_{s(x'),y''} \subset \tau(x)$ и $s(x') \preccurlyeq s(x)$. Поэтому $s(x) = s(x')$, размерности подпространств

$\tau_{s(x),y'}$ и $\tau(x')=\tau_{s(x'),y(x')}$ совпадают, а значит, и сами подпространства совпадают. Лемма доказана.

Доказательство предложения 4.6.1. Первое утверждение следует из леммы 4.6.3 и свойства 1.4.3, при этом касательное пространство к подмногообразию $\varphi_{s(x)}(q_{y(x)})$ в каждой его точке x' совпадает с $\tau(x')$. Тогда это подмногообразие является инвариантным для действия пучка $\mathcal{F}$. По лемме 4.4.1 это наименьшее инвариантное множество, проходящее через точку x. Поэтому $O_x=\varphi_{s(x)}(q_{y(x)})$. Предложение доказано.

Подмножество в M называется *насыщенным* (*относительно действия пучка* $\mathcal{F}$), если оно состоит из орбит действия пучка $\mathcal{F}$. Если бы каждое отображение φ_s было вложением, то доказательство теоремы B легко завершалось: в качестве окрестности $V(x)$ произвольной точки $x\in M$, которая участвует в определении F-структуры (см. [4]), можно было бы взять множество $U(x)=\varphi_{s(x)}(\operatorname{Int}(V_{s(x)}))$ (см. п. 4.1.2). Однако об отображении $\varphi_{s(x)}$ известно только, что оно является погружением. Поэтому приходится выбирать подмножество в $\operatorname{Int}(V_{s(x)})$, на котором $\varphi_{s(x)}$ инъективно, и при этом заботиться о том, чтобы его образ в M был открытым, насыщенным и содержал точку x.

4.7. Предложение. *Для каждой точки $x\in M$ существуют такая насыщенная (относительно действия пучка $\mathcal{F}$) ее окрестность $V(x)$ и такое открытое насыщенное (относительно действия пучка $P_{s(x)}$) подмножество $\underline{V}(x)\subset\operatorname{Int}(V_{s(x)})$, что $\varphi_{s(x)}:\underline{V}(x)\to V(x)$ – гомеоморфизм и $V(x')=V(x)$ для всех $x'\in O_x$.*

4.7.1. На каждом многообразии V_s существует метрика ρ_s, для которой локальное действие пучка P_s изометрично: достаточно взять какую-либо метрику на V_s, поднять ее на $\widetilde{V}_s$ и усреднить по действию группы $T^{\operatorname{rk}(s)}$ и конечной группы преобразований накрытия ψ_s.

Для такой метрики множество $A_s^\delta=\{y\in V_s:\rho_s(y,\partial V_s)>\delta\}$, $\delta>0$, насыщенно, т. е. состоит из орбит действия пучка P_s. Ясно, что $\bar{A}_s^\delta\subset A_s^{\delta'}$ для $\delta>\delta'$ и что $\bigcup_{\delta>0}\bar{A}_s^\delta=\operatorname{Int}(V_s)$. Обозначим через $U_s^\delta=\varphi_s(A_s^\delta)$ открытое (для достаточно малых δ) подмножество в M. Напомним, что $U_s=\varphi_s(\operatorname{Int}(V_s))$.

4.7.2. Лемма. *Для каждой вершины $s\in S$ и каждого $\delta>0$ существует такое число $\delta'>0$, что отображение φ_s инъективно на множестве*

$$A_s^\delta\setminus\varphi_s^{-1}\Big(\bigcup_{s'\succ s}\bar{U}_{s'}^{\delta'}\Big).$$

Доказательство. (1) Пусть $\{B_\delta\}$ – такой набор замкнутых в V_s подмножеств множества $\operatorname{Int}(V_s)$, что $B_{\delta'}\subset B_\delta$ для $\delta'<\delta$ и φ_s инъективно на пересечении $A=\bigcap_{\delta>0}B_\delta$. Тогда φ_s инъективно на некотором множестве B_δ, $\delta>0$.

Действительно, множества B_δ и A компактны. Если для каждого $\delta>0$ существуют различные точки $y_\delta, y'_\delta\in B_\delta$ с $\varphi_s(y_\delta)=\varphi_s(y'_\delta)$, то можно считать, что $y_\delta\to y_0$, $y'_\delta\to y'_0$ при $\delta\to 0$, где $y_0,y'_0\in A$. Поскольку φ_s погружение, то $y_0\neq y'_0$. Но по непрерывности $\varphi_s(y_0)=\varphi_s(y'_0)$, что противоречит предположению.

(2) Множество $A=\bar{A}_s^\delta\setminus\varphi_s^{-1}(\bigcup_{s'\succ s}U_{s'})$ замкнуто в V_s и лежит в $\operatorname{Int}(V_s)$. Покажем, что φ_s инъективно на A. Если для различных точек $y, y'\in A$ имеем $\varphi_s(y)=$

$=\varphi_s(y')=x$, то $s(x)\succ s$ по свойствам 1.4.3, 1.4.4 и 1.4.5. Поэтому $y,y'\in\varphi_s^{-1}(x)\subset$ $\subset\varphi_s^{-1}(U_{s(x)})\subset\varphi_s^{-1}(\underset{s'\succ s}{\cup}U_{s'})$, что противоречит определению множества A.

(3) Множество $B_{\delta'}=\bar{A}_s^{\delta}\setminus\varphi_s^{-1}(\underset{s'\succ s}{\cup}U_{s'}^{\delta'})$, $\delta'>0$, замкнуто в V_s и $B_{\delta''}\subset B_{\delta'}$ при $\delta''<\delta'$. При этом $A=\underset{\delta'>0}{\cap}B_{\delta'}$. Из (1) и (2) следует, что отображение φ_s инъективно на $B_{\delta'}$ при некотором $\delta'>0$. Но тогда тем более φ_s инъективно на $A_s^{\delta}\setminus\varphi_s^{-1}(\underset{s'\succ s}{\cup}\bar{U}_{s'}^{\delta'})$. Лемма доказана.

4.7.3. Лемма. *Замыкание $\bar{B}$ насыщенного подмножества $B\subset M$ насыщено.*

Доказательство. Пусть $x\in\bar{B}$. Покажем, что орбита $O_x\subset\bar{B}$. Для достаточно близкой к x точки $x'\in B$ найдется такая точка $y'\in\operatorname{Int}(V_{s(x)})$, что $\varphi_{s(x)}(y')=$ $=x'$. При этом $y'\to y(x)$ при $x'\to x$. Так как $\tau_{s(x),y'}\subset\tau(x')$, то по лемме 4.6.2 имеем $\varphi_{s(x)}(q_{y'})\subset O_{x'}\subset B$, поскольку B насыщено.

Для любой точки $x_0\in O_x$ точка $y(x)$ лежит, согласно лемме 4.6.3, на слое $q_{y(x)}\subset\operatorname{Int}(V_{s(x)})$. Так как $y'\to y(x)$ при $x'\to x$, то при этом $y_0'\to y(x_0)$ для подходящих точек $y_0'\in q_{y'}$. Тогда $x_0'=\varphi_{s(x)}(y_0')\to x_0$, а с другой стороны, $x_0'\in$ $\in\varphi_{s(x)}(q_{y'})\subset B$. Таким образом, $O_x\subset\bar{B}$. Лемма доказана.

Насыщением множества $U\subset M$ будем называть множество $O(U)=\underset{x\in U}{\cup}O_x$.

4.7.4. Лемма. *Допустим, что множество U лежит в U_s, $s\in\operatorname{ske}_0(S)$, вместе со своим замыканием. Тогда U_s содержит и замыкание $\overline{O(U)}$ его насыщения.*

Доказательство. Пусть $x_0'\in\overline{O(U)}$, и пусть последовательность точек $x_i'\in O(U)$ сходится к x_0'. Тогда $x_i'\in O_{x_i}$, где $x_i\in U$. Так как замыкание $\bar{U}$ компактно и лежит в U_s, то можно считать, что $x_i\to x_0\in U_s$. По свойству 1.4.1 можно считать, что вершина $s(x_i)=s_0$ не зависит от i а по лемме 4.1.1 – что $s\preccurlyeq s_0$. Тогда $y(x_i)\in V_{s_0}$, и можно считать, что $y(x_i)\to y_0$. По непрерывности $\varphi_{s_0}(y_0)=x_0$. Согласно предложению 4.6.1 и лемме 4.6.3, точки $y(x_i')$ лежат на слоях $q_{y(x_i)}\subset$ $\subset V_{s_0}$, и можно считать, что $y(x_i')\to y_0'$, где $y_0'\in q_{y_0}$. Поэтому точка $\varphi_{s_0}(y_0')=x_0'$ лежит на образе $\varphi_{s_0}(q_{y_0})$ слоя слоения $\mathcal{T}_{s_0}$. Хотя слой q_{y_0} может лежать на крае ∂V_{s_0}, его образ проходит через точку $x_0\in U_s$, а значит, по свойству 1.4.6 лежит в U_s. Поэтому $x_0'\in U_s$. Лемма доказана.

4.7.5. Лемма. *Насыщение открытого множества $U\subset M$ открыто в M.*

Доказательство. Для любой точки $x\in M$ множество $C=\underset{y'}{\cup}\varphi_{s(x)}(q_{y'})$, где точки $y'\in\operatorname{Int}(V_{s(x)})$ из окрестности точки $y(x)$, является окрестностью в M орбиты $O_x=\varphi_{s(x)}(q_{y(x)})$. По лемме 4.6.2 имеем $\varphi_{s(x)}(q_{y'})\subset O_{x'}$, где $x'=$ $=\varphi_{s(x)}(y')\in U$. Поэтому $C\subset O(U)$. Лемма доказана.

4.7.6. Доказательство предложения 4.7.

Пусть $x\in M$. Найдется такое число $\delta_0=\delta_0(x)>0$, что $y(x)\in A_{s(x)}^{\delta_0}\subset\operatorname{Int}(V_{s(x)})$ (см. п. 4.7.1). Обозначим через V_0 насыщение множества $U_{s(x)}^{\delta_0}$. По лемме 4.7.5 оно открыто, а по лемме 4.7.4 его замыкание $\bar{V}_0$ лежит в $U(x)$. Так как $\bar{V}_0$ компакт, а множества вида $U_{s(x)}^{\delta}$, $\delta>0$, образуют открытое покрытие множества $U(x)$, то найдется такое число $\delta_1>0$, что $\delta_1\leqslant\delta_0$ и $\bar{V}_0\subset U_{s(x)}^{\delta_1}$. По лемме 4.7.2 существует такое число $\delta'>0$, что отображение $\varphi_{s(x)}$ инъективно на множестве $\underline{\underline{V}}(x)=A_{s(x)}^{\delta_1}\setminus\varphi_{s(x)}^{-1}(\underset{s'\succ s}{\cup}\bar{U}_{s'}^{\delta'})$.

Обозначим через $Y_{s'}^{\delta'}$, $s' \succ s(x)$, замыкание насыщения множества $V_0 \cap \overline{U}_{s'}^{\delta'}$. По лемме 4.7.3 каждое множество $Y_{s'}^{\delta'}$ насыщено в M, а по лемме 4.7.4 оно лежит в $U_{s'}$. Согласно 1.4.1, компакт $\overline{V}_0$ пересекает только конечное число множеств $U_{s'}$ с $s' \succ s(x)$. Поэтому множество $V(x) = V_0 \setminus \bigcup_{s' \succ s(x)} Y_{s'}^{\delta'}$ открыто, насыщено и лежит в $V_0 \setminus \bigcup_{s' \succ s(x)} \overline{U}_{s'}^{\delta'} \subset \varphi_{s(x)}(\underline{\underline{V}}(x))$. При этом точка $x = \varphi_{s(x)}(y(x))$ принадлежит множеству $U_{s(x)}^{\delta_0} \subset V_0$ и не лежит ни в каком множестве $Y_{s'}^{\delta'}$, $s' \succ s(x)$, поскольку $Y_{s'}^{\delta'} \subset U_{s'}$ и для каждой точки $x' \in U_{s'}$ имеем $s(x') \succeq s' \succ s(x)$. Поэтому $x \in V(x)$.

Так как каждое множество A_s^{δ} насыщено относительно действия пучка P_s (см. п. 4.7.1), то построение множества $V(x)$ зависит только от слоя $q_{y(x)}$, и $V(x') = V(x)$ для всех $x' \in O_x$.

Положим $\underline{V}(x) = \underline{\underline{V}}(x) \cap \varphi_{s(x)}^{-1}(V(x))$. Тогда $\varphi_{s(x)} : \underline{V}(x) \to V(x)$ гомеоморфизм, и для завершения доказательства предложения 4.7 остается проверить, что множество $\underline{V}(x) \subset \operatorname{Int}(V_{s(x)})$ насыщено относительно действия пучка $P_{s(x)}$. По лемме 4.6.2 каждая орбита $O_{x'}, x' \in V(x)$, содержит образ $\varphi_{s(x)}(q_{y'})$ слоя слоения $\mathcal{T}_{s(x)}$, где $\varphi_{s(x)}(y') \in O_{x'}$, а значит, состоит из таких образов. Поэтому $\underline{V}(x)$ состоит из слоев слоения $\mathcal{T}_{s(x)}$. Предложение доказано.

4.8. Завершение доказательства теоремы B. Согласно предыдущему, действие пучка $\mathcal{F}$ на многообразии M обладает следующими свойствами: для каждой точки x имеется ее насыщенная окрестность $V(x)$, орбита O_x замкнута и имеет размерность $k = \operatorname{rk}(s(x)) > 0$, слой $\mathcal{F}_x$ является k-мерным тором, и $\varphi_{s(x)} : \underline{V}(x) \to V(x)$ – гомеоморфизм, где множество $\underline{V}(x) \subset \operatorname{Int}(V_{s(x)})$ открыто и насыщено относительно действия пучка $P_{s(x)}$. При этом $V(x') = V(x)$ для всех $x' \in O_x$.

Положим $\widetilde{V}(x) = \psi_{s(x)}^{-1}(\underline{V}(x)) \subset \widetilde{V}_{s(x)}$ (см. п. 1.4.2). Тогда композиция $\pi = \varphi_{s(x)} \circ \psi_{s(x)} : \widetilde{V}(x) \to V(x)$ является нормальным конечнолистным накрытием. Пусть $\tilde{x}' \in \widetilde{V}(x)$. Для точки $y' = \psi_{s(x)}(\tilde{x}') \in \underline{V}(x)$ имеется вложение $(P_{s(x)})_{y'} \to \mathcal{F}_{x'} = (P_{s(x')})_{y(x')}$, где $x' = \pi(\tilde{x}')$ (см. п. 1.4.5). Тогда слой в точке $\tilde{x}'$ пучка $\pi^*(\mathcal{F})$, индуцированного накрытием π, содержит группу $(P_{s(x)})_{y'} \cong T^k$, где $k = \operatorname{rk}(s(x))$. Поэтому для каждой открытой окрестности $W \subset \widetilde{V}(x)$ точки $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ гомоморфизм ограничения $\pi^*(\mathcal{F})(W) \to (\pi^*(\mathcal{F}))_{\tilde{x}} = \mathcal{F}_x$, будучи инъективным, является изоморфизмом.

Поскольку множество $\underline{V}(x)$ состоит из орбит действия пучка $P_{s(x)}$, то множество $\widetilde{V}(x)$ состоит из орбит действия группы T^k. Поэтому локальное действие группы $\pi^*(\mathcal{F})(\widetilde{V}(x)) \cong T^k$ на множестве $\widetilde{V}(x)$ является полным, т. е. индуцировано действием этой группы.

Таким образом, выполняются все требования определений 1.1, 1.2 и 1.4 работы [4], и действие пучка $\mathcal{F}$ на M является F-структурой $\mathcal{Y}$ положительного ранга. Структура $\mathcal{Y}$ обладает тем свойством, что в каждой точке $x \in M$ ее ранг, равный $\dim O_x = \operatorname{rk}(s(x))$, совпадает с размерностью слоя $\mathcal{F}_x$. Поэтому для любого открытого связного множества $U \subset M$ и для любой чистой подструктуры $\mathcal{Y}'' \subset \mathcal{Y} | U$ ранг $\mathcal{Y}''$ в точках U одно и то же число. Тогда любая подструктура $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$ положительного ранга, допускающая атлас, является поляризацией (см. [4]), определения 1.6, 1.7). С другой стороны, в [4] показано, что всякая F-структура положительного ранга содержит подструктуру положительного ранга, имеющую атлас. Поэтому построенная F-структура $\mathcal{S}$ на M допускает поляризацию. Теорема В доказана.

Список литературы

[1] *Gromov M., Lafontaine J., Pansu P.* Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Paris: Cedic, *1981.* 152 p.

[2] *Fukaya K.* On a compactification of the set of Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters // Lect. Notes Math. *1986.* Vol. 1201. P. 89–107.

[3] *Pansu P.* Effondrement des variétés remanniennes. D'après J. Cheeger et M. Gromov // Astérisque. *1985.* Vol. 121–122. P. 63–82.

[4] *Cheeger J., Gromov M.* Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded. I. // J. Differ. Geom. *1986.* Vol. 23. P. 309–346.

[5] *Бородин В. Г.* Трехмерные многообразия неположительной кривизны с малым радиусом инъективности. Деп. в ВИНИТИ 30.06.88, № 5264-В88. Ленингр. гос. пед. ин-т, *1988.* 20 с.

[6] *Hempel J.* Residual finiteness for 3-manifolds // An. Math. Stud. *1987.* Vol. 111. P. 379–396.

[7] *Eberlein P.* A canonical form for compact nonpositively curved manifolds whose fundamental groups have nontrivial center // Math.-An. *1982.* Bd 260. S. 23–29.

[8] *Ballmann W., Gromov M., Schroeder V.* Manifolds of Nonpositive Curvature. Boston etc.: Birkhäuser, *1985.* 266 p.

[9] *Буяло С. В.* Объем и фундаментальная группа многообразия неположительной кривизны // Мат. сб. *1983.* Т. 122 (164). С. 142–156.

[10] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, *1977.* 488 с.

Ленинградский педагогический
институт им. А. И. Герцена
191186, Ленинград, наб. р. Мойки, 48

Поступило 12 апреля 1989 г.