



A. I. Kalinin, L. I. Lavrinovich, Small parameter method in optimization problems of singularly perturbed dynamical systems,  
*Tr. Inst. Mat.*, 2021, Volume 29, Number 1, 85–93

<https://www.mathnet.ru/eng/timb346>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

April 19, 2025, 02:38:19



УДК 517.977

## МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**А. И. Калинин, Л. И. Лавринович**

*Белорусский государственный университет  
e-mail: kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by  
Поступила 15.10.2021*

Приводится обзор результатов, полученных для задач оптимизации сингулярно возмущенных систем в Минской школе по оптимальному управлению.

**1. Введение.** Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. В математической теории оптимальных процессов [1] задачам оптимизации таких систем уделяется значительное внимание, что вызвано эффективностью асимптотических методов их решения. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В задачах с сингулярными возмущениями эти динамические системы являются жесткими, и, как следствие при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Применение асимптотических методов позволяет не только избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, но и свести исходную задачу оптимального управления к решению задач меньшей размерности.

Наиболее распространенный подход к исследованию сингулярно возмущенных задач оптимального управления состоит в применении методов асимптотического разложения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений к краевой задаче принципа максимума (см., например, [2]–[7]). На таком пути можно строить асимптотику решения задач с открытой областью управления и гладкими управляющими воздействиями, т.е. задач вариационного типа. В случае наличия прямых ограничений на значения управляющих воздействий в виде замкнутых неравенств этот подход встречает серьезные трудности, поскольку динамические уравнения краевой задачи принципа максимума не обладают необходимой для применения асимптотических методов гладкостью. Наверное, поэтому в данном случае исследования, в основном, сводились лишь к выяснению вопроса о предельной задаче, к решению которой в той или иной топологии сходится решение сингулярно возмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю [8]–[12].

Настоящая статья представляет обзор результатов, полученных для задач оптимизации сингулярно возмущенных систем в Минской школе по оптимальному управлению. Как правило, были рассмотрены задачи с ограничениями на правый конец траекторий. Прежде чем перейти к изложению полученных результатов, уточним, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решениям задач оптимизации сингулярно возмущенных систем с малым параметром  $\mu > 0$  при части производных.

**Определение.** Допустимое управление (со значениями удовлетворяющими прямым ограничениям) назовем асимптотически субоптимальным управлением  $N$ -го порядка ( $N = 0, 1, \dots$ ), если оно отклоняется от оптимального управления по критерию качества на величину  $O(\mu^{N+1})$ , а траектория динамической системы, им порожденная, удовлетворяет терминальным ограничениям с точностью того же порядка малости.

**2. Методика исследования.** В основе применяемой методики исследования лежит идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. Для многих задач оптимизации динамических систем можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов, множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума и условий допустимости управлений для определяющих элементов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  можно составить систему уравнений

$$F_i(a_1, a_2, \dots, a_k, \mu) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (1)$$

где  $\mu$  – малый параметр. Назовем эти уравнения, как и их корни, определяющими. Формируются уравнения (1) путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя метод пограничных функций [13], можно разложить функции  $F_i(a_1, a_2, \dots, a_k, \mu)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , по степеням малого параметра

$$F_i(a_1, a_2, \dots, a_k, \mu) \sim F_{i0}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \mu F_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \dots, i = \overline{1, k},$$

а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику решения системы (1). Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы  $a_i(\mu)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации описанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложения определяющих элементов, т.е. корней системы нулевого приближения

$$F_{i0}(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0, i = \overline{1, k}. \quad (2)$$

Оказывается, что если же исходная задача оптимального управления является сингулярно возмущенной, то корнями системы (2), как правило, будут определяющие элементы двух задач меньшей размерности. Одной из них является вырожденная задача, а вторая подбирается в результате анализа системы (2), что представляет собой неформальный этап исследования.

Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов.

**3. Задачи со скалярным управлением.** Впервые описанная в предыдущем разделе методика была применена к задаче оптимального быстрогодействия для линейной стационарной системы со скалярным управлением

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + A_2 z + b_1 u, y(0) = y_*, y(T) = 0, \\ \mu \dot{z} &= A_3 y + A_4 z + b_2 u, z(0) = z_*, z(T) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in [0, T], J(u) = T \rightarrow \min,$$

где  $0 < \mu \ll 1$ ,  $y \in R^n$ ,  $z \in R^m$ . Предполагается, что матрица  $A_4$  устойчивая, т.е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

В [14] предложен алгоритм построения асимптотически субоптимальных управлений любого порядка в задаче (3). Определяющими элементами в данном случае являются точки переключения оптимального управления и момент оптимального быстрогодействия. Точки переключения делятся на две группы. К первой группе относятся точки, близкие к соответствующим точкам переключения в первой базовой задаче

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_0 y + b_0 u, y(0) = y_*, y(T) = 0, \\ |u(t)| &\leq 1, t \in [0, T], J_0(u) = T \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, b_0 = b_1 - A_2 A_4^{-1} b_2.$$

Вторая группа содержит точки, отстоящие от момента оптимального быстрогодействия на величину порядка  $\mu$ . Число этих точек равно числу точек переключения решения второй базовой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= A_4 z + b_2 u, z(-\infty) = A_4^{-1} b_2, |u(s)| \leq 1, s \leq 0, \\ z(0) &= 0, J_1(u) = \int_{-\infty}^0 (u(s) + 1) ds \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Момент оптимального быстрогодействия в исходной сингулярно возмущенной задаче близок к конечному моменту в задаче (4).

Вычислительная процедура алгоритма помимо решения базовых задач включает в себя интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений и нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Впрочем асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка может быть сформировано непосредственно после решения этих задач.

В [15] разработан алгоритм построения асимптотически субоптимальных управлений в задаче терминального управления линейной стационарной сингулярно возмущенной системой с фиксированной длительностью процесса и подвижным правым концом траекторий

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + A_2 z + b_1 u, y(0) = y_*, \\ \mu \dot{z} &= A_3 y + A_4 z + b_2 u, z(0) = z_*, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq 1, t \in T = [0, t^*], H_1 y(t^*) = g_1, H_2 z(t^*) = g_2, \\ c_1^T y(t^*) + \mu c_2^T z(t^*) &\rightarrow \max, \end{aligned}$$

где  $0 < \mu \ll 1$ ,  $y \in R^n$ ,  $z \in R^m$ ,  $g_1 \in R^{n_1}$ ,  $g_2 \in R^{m_1}$ . Как в предыдущей задаче матрица  $A_4$  является устойчивой.

Определяющими элементами в задаче (5) являются точки переключения оптимального управления. Как и в задаче (3) они делятся на две группы. Исходная задача в данном случае распадается на две базовые задачи, первая из которых имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_0 y + b_0 u, y(0) = y_*, |u(t)| \leq 1, t \in T, \\ H_1 y(t^*) &= g_1, c_1^T y(t^*) \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Вторая базовая задача представима в виде

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z - u^0(t^*) b_2 u, z(-\infty) = -u^0(t^*) A_4^{-1} b_2,$$

$$|u(s)| \leq 1, s \leq 0, H_2 z(0) = H_2 A_4^{-1} A_3 y^0(t^*) + g_2,$$

$$c^T z(0) - |b_0^T \psi^0(t^*)| \int_{-\infty}^0 (u(s) + 1) ds \rightarrow \max.$$

где  $c = c_2 + (A_2 A_4^{-1})^T \psi^0(t^*)$ ,  $u^0(t)$  – оптимальное управление в первой базовой задаче, а  $y^0(t)$ ,  $\psi^0(t)$  – соответствующие ему решения прямой и сопряженных систем. Как и в предыдущем случае асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка может быть построено непосредственно после решения базовых задач.

Обобщению полученных в [14,15] результатов на нелинейные сингулярно возмущенные системы вида

$$\dot{y} = a_1(y, t) + A_1(y, t)z + b_1(y, t)u,$$

$$\mu \dot{z} = a_2(y, t) + A_2(y, t)z + b_2(y, t)u$$

посвящены работы [16,17].

Асимптотической оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем, содержащих при производных параметры различных порядков малости посвящены работы [18,19]. Предложенные в этих работах алгоритмы развивают результаты, полученные в [14,15].

В [20] разработан алгоритм, позволяющий строить асимптотически субоптимальное управление заданного порядка в задаче об управлении минимальной силой для линейной сингулярно возмущенной системы

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, \mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + b_2 u,$$

$$y(0) = y_* \neq 0, z(0) = z_*, y(t^*) = 0, z(t^*) = 0, \quad (6)$$

$$J(u) = \sup_{t \in [0, t^*]} |u(t)| \rightarrow \min$$

со скалярным управлением и устойчивой матрицей  $A_4$ . Определяющими элементами в этой задаче являются точки переключения оптимального управления и оптимальная интенсивность (оптимальное значение критерия качества). Базовые задачи в данном случае имеют вид

$$\dot{y} = A_0 y + b_0 u, y(0) = y^0, y(t^*) = 0,$$

$$J_1(u) = \sup_{t \in [0, t^*]} |u(t)| \rightarrow \min.$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + b_2 u, s \leq 0, z(-\infty) = A_4^{-1} b_2, z(0) = 0, |u(s)| \leq 1,$$

$$|u(s)| \leq 1, J_2(u) = \int_{-\infty}^0 (u(s) + 1) ds \rightarrow \min.$$

Статья [21] посвящена построению асимптотически субоптимальных управлений в линейно-квадратичной задаче

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, y(0) = y_* \neq 0, y(t^*) = 0,$$

$$\mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + b_2 u, z(0) = z_*, z(t^*) = 0, \quad (7)$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in [0, t^*], J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} u^2(t) dt \rightarrow \min,$$

где  $0 < \mu \ll 1$ ,  $y \in R^n$ ,  $z \in R^m$ , со скалярным управлением и устойчивой матрицей  $A_4$ . Определяющими элементами в этой задаче являются моменты насыщения оптимального управления и начальные значения (в момент  $t^*$ ) сопряженных переменных. Под моментами насыщения понимаются крайние точки промежутков, на которых оптимальное управление по модулю равно 1. Задача (7) распадается на две базовые задачи вида

$$\dot{y} = A_0 y + b_0 u, y(0) = y_* \neq 0, y(t^*) = 0,$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in [0, t^*], J_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} u^2(t) dt \rightarrow \min.$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + b_2 u, z(0) = 0, z(-\infty) = -u^0(t^*) A_4^{-1} b_2,$$

$$|u(s)| \leq 1, s \leq 0, J_2(u) = \int_{-\infty}^0 ((u(s) - b_0^T \psi^0(t^*))^2 - c^2) ds \rightarrow \min.$$

Здесь  $c = u^0(t^*) - b_0^T \psi^0(t^*)$ ,  $u^0(t)$  – оптимальное управление в первой базовой задаче,  $\psi^0(t)$  – соответствующее ему решение сопряженной системы.

**4. Задачи с многомерным управлением.** В рассмотренных в предыдущем разделе задачах управляющие воздействия считались скалярными, однако полученные результаты могут быть легко перенесены на системы с многомерными управлениями  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ , если на значения последних наложены ограничения

$$a_i \leq u_i(t) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, r.$$

Вместе с тем во многих прикладных задачах с многомерными управлениями прямые ограничения на их значения имеют вид

$$\|u(t)\| \leq a,$$

где  $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_r^2}$  – евклидова норма вектора  $u$ . В первую очередь, это относится к задаче управления механическими системами, в которых управляющие воздействия, как правило, являются ограниченными по величине силы.

В [22] предложен алгоритм построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка в задаче оптимального быстрогодействия

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + B_1 u, y(0) = y_*, y(T) = 0,$$

$$\mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + B_2 u, z(0) = z_*, z(T) = 0, \quad (8)$$

$$\|u(t)\| \leq 1, t \in [0, T], J(u) = T \rightarrow \min,$$

где  $0 < \mu \ll 1$ ,  $u \in R^r$ ,  $y \in R^n$ ,  $z \in R^m$ . Предполагается, что матрица  $A_4$  устойчива, т.е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны. Определяющими элементами в задаче (8) являются момент оптимального быстрогодействия и значения вектора сопряженных переменных в этот момент. Исходная задача в данном случае распадается на две базовые задачи. Первой из них является вырожденная задача

$$\dot{y} = A_0 y + B_0 u, y(0) = y_*, y(T) = 0,$$

$$\|u(t)\| \leq 1, t \in [0, T], J_0(u) = T \rightarrow \min,$$

$$A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2,$$

а вторая базовая задача имеет вид

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + B_2 u, z(-\infty) = -A_4^{-1} B_2 \Delta^0(T_0) / \|\Delta^0(T_0)\|, \|u(s)\| \leq 1, s \leq 0,$$

$$z(0) = 0, J_1(u) = \int_{-\infty}^0 (u^T(s) \Delta^0(T_0) - \|\Delta^0(T_0)\|) ds \rightarrow \max,$$

где  $\Delta^0(t) = B_0^T \psi^0(t)$ , а  $\psi^0(t)$ ,  $T_0$  – вектор сопряженных переменных, соответствующий оптимальному управлению, и время быстрогодействия в первой базовой задаче. Вычислительная процедура алгоритма помимо решения базовых задач включает в себя интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений и нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Впрочем асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка может быть сформировано непосредственно после решения этих базовых задач.

В [23] разработан алгоритм построения асимптотически субоптимальных управлений в задаче терминального управления линейной стационарной сингулярно возмущенной системой с фиксированной длительностью процесса и подвижным правым концом траекторий

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + A_2 z + B_1 u, y(0) = y_*, \\ \mu \dot{z} &= A_3 y + A_4 z + B_2 u, z(0) = z_*, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \leq 1, t \in [0, t^*], H_1 y(t^*) = g_1, H_2 z(t^*) = g_2, \\ c_1^T y(t^*) + \mu c_2^T z(t^*) \rightarrow \max, \end{aligned}$$

где  $0 < \mu \ll 1$ ,  $u \in R^r$ ,  $y \in R^n$ ,  $z \in R^m$ ,  $g_1 \in R^{n_1}$ ,  $g_2 \in R^{m_1}$ . Как в предыдущей задаче матрица  $A_4$  является устойчивой. Определяющими элементом в задаче (9) являются множители Лагранжа. Базовые задачи в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_0 y + B_0 u, y(0) = y_*, \|u(t)\| \leq 1, t \in [0, t^*] \\ H_1 y(t^*) &= g_1, J_0(u) = c_1^T y(t^*) \rightarrow \max. \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4 z + B_2 u, z(-\infty) = -A_4^{-1} B_2 u^0(t^*), \|u(s)\| \leq 1, s \leq 0,$$

$$H_2 z(0) = H_2 A_4^{-1} A_3 y^0(t^*) + g_2, J_1(u) = c_0^T z(0) + \int_{-\infty}^0 (u^T(s) \Delta^0(t^*) - \|\Delta^0(t^*)\|) ds \rightarrow \max,$$

где  $c_0 = c_2 + (A_2 A_4^{-1})^T \psi^0(t^*)$ ,  $u^0(t)$  – оптимальное управление в первой базовой задаче,  $y^0(t)$ ,  $\psi^0(t)$  – соответствующее ему решения прямой и сопряженной систем.

Обобщению полученных в [22,23] результатов на нелинейные сингулярно возмущенные системы вида

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a_1(y, t) + A_1(y, t)z + B_1(y, t)u, \\ \mu \dot{z} &= a_2(y, t) + A_2(y, t)z + B_2(y, t)u \end{aligned}$$

посвящены работы [24,25].

В статье [26] результаты, полученные в [20], перенесены на системы с многомерными управлениями.

В [27] исследована задача оптимизации линейной сингулярно возмущенной системы с интегральным квадратичным критерием качества

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, y(t_*) = y_*,$$

$$\mu \dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*, \quad (10)$$

$$y(t^*) = 0, z(t^*) = 0, J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y^T M(t)y + \mu z^T L(t)z + u^T P(t)u) dt \rightarrow \min,$$

где  $0 < \mu \ll 1$ ,  $u \in R^r$ ,  $y \in R^n$ ,  $z \in R^m$ ,  $M(t)$ ,  $L(t)$  – неотрицательно определенные, а  $P(t)$  – положительно определенная симметрические матрицы для всех  $t \in [t_*, t^*]$ . Предполагается, что собственные значения матрицы  $A_4(t)$  отрицательны в каждый момент времени  $t \in [t_*, t^*]$ . Определяющими элементами в задаче (10) являются начальные значения (в момент времени  $t^*$ ) сопряженных переменных. Базовые задачи в этом случае принимают вид

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, y(t_*) = y_*, y(t^*) = 0,$$

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y^T M(t)y + u^T P(t)u) dt \rightarrow \min,$$

$$A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t);$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, z(0) = A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*),$$

$$z(-\infty) = 0, J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u^T(s)P(t^*)u(s)) ds \rightarrow \min,$$

где  $u^0(t)$ ,  $t \in [t_*, t^*]$ , – оптимальное управление в первой базовой задаче.

Помимо асимптотических приближений к оптимальным программным управлениям в [27] построены асимптотические приближения нулевого и первого порядка в оптимальной обратной связи.

Вектор-функцию  $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$  будем называть асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния  $(t_*, y_*, z_*)$ ,  $t_* < t^*$ , имеет место

$$u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где  $u^{(N)}(t, \mu)$ ,  $t \in [t_*, t^*]$ , – асимптотически субоптимальное программное управление N-го порядка.

В [28] результаты, полученные в [27] были обобщены на задачи с подвижным концом траекторий вида

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, y(t_*) = y_*,$$

$$\mu \dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*, \quad (11)$$

$$H_1 y(t^*) = g_1, H_2 z(t^*) = g_2, J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P(t)u dt \rightarrow \min,$$

где  $0 < \mu \ll 1$ ,  $u \in R^r$ ,  $y \in R^n$ ,  $z \in R^m$ ,  $g_1 \in R^{n_1}$ ,  $g_2 \in R^{m_1}$ . Как в предыдущей задаче предполагается, что все собственные значения матрицы  $A_4(t)$  отрицательны в каждый момент времени  $t \in [t_*, t^*]$ . Определяющими элементом в задаче (11) являются множители Лагранжа. Базовые задачи в этом случае имеют вид

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, y(t_*) = y_*, H_1 y(t^*) = g_1,$$

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y^T M(t)y + u^T P(t)u) dt \rightarrow \min,$$



$$A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t);$$

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, z(0) = H_2A_4^{-1}(t^*)(A_3(t^*)y^0(t^*) + B_2(t^*)u^0(t^*)) + g_2,$$

$$z(-\infty) = 0, J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u^T(s)P(t^*)u(s))ds \rightarrow \min,$$

где  $u^0(t)$ ,  $y^0(t)$ ,  $t \in [t_*, t^*]$ , – соответственно оптимальные управление и траектория в первой базовой задаче. Как и в [27] для данной задачи также построены асимптотические субоптимальные обратные связи нулевого и первого порядка.

**5. Заключение.** Статья содержит обзор асимптотических методов решения широкого класса задач оптимизации сингулярно возмущенных систем, разработанных в Минской школе по оптимальному управлению. Эти методы разработаны с помощью единой методики, в основу которой положена идея конечномерной параметризации оптимального управления. Основное достоинство предложенных алгоритмов состоит в том, что при их применении исходные сингулярно возмущенные задачи распадаются на две задачи оптимального управления меньшей размерности. Такая декомпозиция дает возможность эффективно решать задачи с большим числом фазовых переменных.

## Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Определение структуры обобщенного решения нелинейных задач оптимального управления // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 3. С. 525–528.
3. Дмитриев М.Г. Теория сингулярных возмущений и некоторые задачи оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. №. 10. С. 1693–1698.
4. Курина Г.А. Асимптотическое решение одного класса сингулярно возмущенных задач оптимального управления // Прикл. мат. и мех. 1983. Т. 47. вып. 3. С. 363–371.
5. Ardena M.D. Singular perturbations and asymptotic expansions in nonlinear optimal control // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. 1987. V. 95. P. 3–18.
6. O'Malley R.E.Jr. Singular perturbations and optimal control // Lect. Notes Math. 1978. V. 680. P. 171–218.
7. Sannuti P. Asymptotic expansions of singularly perturbed quasi-linear optimal systems // SIAM J. Control and Optimiz. 1975. V. 13, № 3. P. 572–592.
8. Гичев Т.Р., Дончев А.Л. Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстрого действия // Прикл. мат. и мех. 1979. Т. 43, вып. 3. С. 466–474.
9. Гичев Т.Р. Сингулярные возмущения в одном классе задач с оптимального управления с интегральным выпуклым критерием // Прикл. мат. и мех. 1984. Т. 48, вып. 6. С. 898–903.
10. Дмитриев М.Г. О непрерывности решения задачи Майера по сингулярным возмущениям // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1972. Т. 12. № 3. С. 788–791.
11. Binding P. Singularly perturbed optimal control problems. 1: Convergence // SIAM J. Control and Optimiz. 1976. V. 14, № 4. P. 591–612.
12. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20, № 1. P. 111–113.
13. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
14. Калинин А.И. Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстрого действия // Прикл. мат. и мех. 1989. Т. 53. вып. 6. С. 880–889.
15. Калинин А.И. Метод асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи терминального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1990. Т. 30. № 3. С. 266–378.
16. Калинин А.И. Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной нелинейной задачи быстрого действия // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. №. 4. С. 585–596.

17. Калинин А.И. Алгоритм асимптотического решения задачи терминального управления нелинейной сингулярно возмущенной системой // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1993. Т. 33. №. 12. С. 1762–1775.
18. Грибковская И.В., Калинин А.И. Асимптотическое решение задачи быстрогодействия для линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №. 8. С. 1275–1284.
19. Грибковская И.В., Калинин А.И. Асимптотическая оптимизация линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1995. Т. 35. №. 9. С. 1299–1312.
20. Kalinin A. I., Polevnikov S. V. Asymptotic Solution of the Minimum Force Problem for Linear Singularly Perturbed Systems // Automatica. 1998. V. 34. №. 5. P. 625–630.
21. Калинин А.И. Асимптотический метод решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38. №. 9. С. 1473–1483.
22. Калинин А.И., Семенов К.В. Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2004. Т. 44. №. 3. С. 432–443.
23. Калинин А.И., Семенов К.В. Асимптотический метод решения сингулярно возмущенной линейной задачи терминального управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. №. 5. С. 32–39.
24. Грудо Я.О., Калинин А.И. Асимптотический метод решения задачи оптимального быстрогодействия для нелинейной сингулярно возмущенной системы // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48. №. 11. С. 1942–1951.
25. Грудо Я.О., Калинин А.И. Асимптотическая оптимизация нелинейных сингулярно возмущенных систем при ограничении управления гиперсферой // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. №. 11. С. 1472–1481.
26. Калинин А.И. Асимптотический метод решения задачи об управлении минимальной силой для линейной сингулярно возмущенной системы // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2011. Т. 51. №. 12. С. 1–12.
27. Калинин А.И., Лавринович Л.И. Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2015. Т. 55. №. 2. С. 194–206.
28. Калинин А.И., Лавринович Л.И. Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с терминальными ограничениями на траектории // Автомат. и телемех. 2020. вып. 6. С. 988–1002.

**A. I. Kalinin, L. I. Lavrinovich**  
**Small parameter method in optimization problems of singularly  
perturbed dynamical systems**

**Summary**

An overview of the results obtained for optimization problems of singularly perturbed systems in the Minsk School of Optimal Control is given.