Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

O. È. Zubelevich, The Schauder–Tikhonov Theorem in Countably Normed Spaces, *Mat. Zametki*, 2011, Volume 90, Issue 2, 310–312

DOI: 10.4213/mzm8564

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.168
March 17, 2025, 13:48:15

Теорема Шаудера–Тихонова в счетно нормированном пространстве

О. Э. Зубелевич

1. Введение. Пусть E – отделимое локально выпуклое пространство и C – его замкнутое выпуклое подмножество. Будем считать отображение $f\colon C \to C$ непрерывным и компактным. Последнее означает, что существует компакт $K \subseteq C$, для которого $f(C) \subseteq K$.

Теорема Шаудера–Тихонова формулируется следующим образом.

Теорема 1.1 [1], [2]. *Отображение f имеет неподвижную точку: существует элемент $\widehat{x} \in K$ такой, что $f(\widehat{x}) = \widehat{x}$.*

В частном случае, когда пространство E нормировано, эта теорема была ранее получена Шаудером. Доказательство теоремы Шаудера можно найти в монографии Ниренберга [3]. В этой книге доказательство проведено в предположении банаховости E, однако оно дословно переносится на случай нормированного E.

Имеются многочисленные версии теоремы Шаудера–Тихонова, см. например [4]. Свою наиболее законченную форму эта теорема приобрела в работе [5]. В этой работе теорема 1.1 доказана без предположения локальной выпуклости E.

Отличительная черта локально выпуклого пространства E состоит в том, что его геометрия хорошо описывается в терминах топологически сопряженного пространства E'. Это связано с тем, что топологически сопряженные пространства к локально выпуклым оказываются достаточно большими.

Так, например, если $A, B \subset E$ – непересекающиеся выпуклые множества и A открыто, то найдется функционал $f \in E'$, который разделяет эти множества, т.е. $f(A) \cap f(B) = \varnothing$ [6].

Если топологическое векторное пространство не является локально выпуклым, то сопряженное к нему пространство может состоять только из нулевого элемента. Стандартным примером этого рода является пространство $L^p(0,1)$, $0 < p < 1$ [7]. Топология в этом пространстве (после соответствующей факторизации) задается метрикой

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx.$$

В общем случае стандартное доказательство теоремы Шаудера–Тихонова основано на лемме Цорна. В этом доказательстве лемма Цорна играет принципиальную роль и не может быть заменена более элеметарными соображениями, даже если E конечномерно.

Однако, если заметить, что компакт в счетно нормированном пространстве гомеоморфен компакту некоторого нормированного пространства, то теорема Шаудера–Тихонова для счетно нормированного пространства оказывается следствием теоремы Шаудера о неподвижной точке и, в частности, не использует лемму Цорна.

2. Компакты в счетно нормированных пространствах. Для приложений очень важен частный случай локально выпуклого пространства, в котором имеется счетный базис выпуклых окрестностей нуля. Так же, как и в общем случае, в случае счетного базиса топология может быть задана в терминах полунорм, но в этом случае множество полунорм, задающих топологию, можно выбрать счетным. Такие пространства называются *счетно нормированными.* Все отделимые счетно нормированные пространства метризуемы [6].

Введем необходимые определения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00681-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ–8784.2010.1).

© О. Э. Зубелевич, 2011

Пусть $(E, \{\|\cdot\|_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ – отделимое счетно нормированное пространство; $\{\|\cdot\|_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – семейство полунорм. Топология в этом пространстве определяется с помощью базиса окрестностей

$$U_{r,i_1,\dots,i_k} = \Bigl\{x\in E \mid \max_{j=1,\dots,k} \|x\|_{i_j} < r\Bigr\}, \qquad r>0, \quad k\in\mathbb{N},$$

где $i_1,\dots,i_k$ – всевозможные наборы натуральных чисел.

В терминах полунорм отделимость E означает, что для каждого $x\in E$, $x\neq 0$, найдется номер k такой, что $\|x\|_k\neq 0$.

Пространство E удовлетворяет первой аксиоме счетности, поэтому любое топологическое понятие в нем может быть эквивалентным образом описано в терминах сходимости последовательностей.

Определение 2.1. Последовательность $\{x_n\}\subset E$ называется *сходящейся* к элементу $x\in E$, если для любого $k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_k = 0.$$

Например, множество $K\subset E$ компактно тогда и только тогда, когда всякая последовательность из K содержит подпоследовательность, которая сходится к элементу K.

Теорема 2.1. *Пусть $K\subset E$ – компактное множество. Существует линейное пространство $F\subseteq E$, $K\subset F$, на котором определена норма $\|\cdot\|$ такая, что вложение*

$$\varphi\colon (F, \|\cdot\|) \to (E, \{\|\cdot\|_k\}_{k\in\mathbb{N}})$$

непрерывно и является гомеоморфизмом между K с топологией, индуцированной нормой $\|\cdot\|$, и K с топологией, индуцированной полунормами $\{\|\cdot\|_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Доказательство. Всякая полунорма $\|\cdot\|_k$ является непрерывной функцией и потому достигает своего максимума на K:

$$m_k = \max\Bigl\{1, \max_{x\in K} \|x\|_k\Bigr\}.$$

Рассмотрим систему полунорм

$$\|\cdot\|'_k = m_k^{-1}\|\cdot\|_k, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Эта система полунорм задает в E топологию, эквивалентную исходной. Действительно, последовательность сходится по полунормам $\{\|\cdot\|'_k\}$ тогда и только тогда, когда она сходится по полунормам $\{\|\cdot\|_k\}$.

Определим пространство F как линейную оболочку множества K. Зададим в F норму формулой

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|x\|'_k}{2^k}.$$

Поскольку полунормы $\{\|\cdot\|'_k\}$ не превосходят на K единицы, введенная функция определена для всех элементов из F. И так как пространство E отделимо, функция $\|\cdot\|$ невырождена: если $\|x\|=0$, то $x=0$.

Теперь доказательство теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. *Для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ и любого $N\in\mathbb{N}$ найдется $\delta>0$ такое, что если $\|z\|<\delta$, $z\in F$, то $\|z\|'_k<\varepsilon$, $k=1,\dots,N$.*

Для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдутся числа $\delta>0$ и $N\in\mathbb{N}$ такие, что если

$$\|x-y\|'_k<\delta, \qquad k=1,\dots,N, \quad x,y\in K,$$

то $\|x-y\|<\varepsilon$.

Докажем от противного первую часть леммы. Предположим, что существуют числа $\varepsilon \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $\delta > 0$ найдется $z \in F$, для которого верны неравенства: $\|z\| < \delta$ и $\|z\|'_n \geqslant \varepsilon$. Тогда

$$\delta > \|z\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$

Это неравенство противоречиво, если только δ достаточно мало.

Для доказательства второй части леммы зададимся малым $\varepsilon > 0$ и выберем N так, что $2\sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon/2$, а затем найдем $\delta > 0$ из условия $\delta < \varepsilon/2$. Здесь мы используем то, что для всякого $w \in K$ справедливо неравенство $\|w\|'_k \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.1 доказана.

Если E счетно нормировано, то ввиду теоремы 2.1 для доказательства теоремы 1.1 достаточно применить теорему Шаудера о неподвижной точке к отображению $\varphi^{-1} f \varphi\colon C' \to C'$, $C' = C \cap F$ в нормированном пространстве F.

Автор признателен проф. М. Ф. Сухинину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge Tracts in Math., **141**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004. **[2]** A. Tychonoff, *Math. Ann.*, **111**:1 (1935), 767–776. **[3]** Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Математика. Новое в зарубежной науке, **5**, Мир, М., 1977. **[4]** F. E. Browder, *Math. Ann.*, **174**:4 (1967), 285–290. **[5]** R. Cauty, *Fund. Math.*, **170**:3 (2001), 231–246. **[6]** А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967. **[7]** Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969.

О. Э. Зубелевич
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ozubel@yandex.ru

Поступило
02.12.2009
Исправленный вариант
05.12.2010