Литература

1. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. (Метод ВКБ.)— М.: Мир, 1965.—238 с.
2. Фрёман Н. и Фрёман П. У. ВКБ-приближения.— М.: Мир, 1968.— 168 с.
3. Евграфов М. А., Федорюк М. В.— Успехи мат. наук, 1966, т. 21, № 1, с. 3—50.
4. Ланцман М. Х.— Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 3, с. 398—408.

Всесоюзный заочный инженерно-строительный институт, г. Москва

Поступила в редакцию 22 апреля 1981 г.

УДК 517.927.2

А. С. МАКИН

О СРЕДНИХ АБЕЛЯ—ПУАССОНА СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

В настоящей работе рассматривается вопрос о суммируемости средних Абеля — Пуассона спектральных разложений, отвечающих обыкновенному несамосопряженному дифференциальному оператору

$$Lu=u''+p(x)u, \tag{1}$$

рассматриваемому на произвольном интервале G (конечном или бесконечном) действительной оси. Следуя работе В. А. Ильина [1], под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, понимается любая не равная тождественно нулю комплекснозначная функция $\mathring{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу $C^{(2)}$ и является регулярным решением уравнения

$$L\mathring{u}+\lambda\mathring{u}=0. \tag{2}$$

Аналогично под присоединенной функцией порядка l $(l=1, 2, \ldots)$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\mathring{u}$, понимается любая комплекснозначная функция $\overset{l}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу $C^{(2)}$ и является регулярным решением уравнения

$$L\overset{l}{u}+\lambda\overset{l}{u}=\overset{l-1}{u}. \tag{3}$$

Краевые условия, которым удовлетворяют собственные и присоединенные функции, совершенно произвольны.

Пусть $\{u_n\}$ — полная в $L_2(G)$ и минимальная система собственных и присоединенных функций оператора (1), λ_n — соответствующие собственные значения (при нумерации собственных значений мы допускаем их совпадение). Для такой системы $\{u_n\}$ существует и притом единственная (см. [2]) биортогонально сопряженная с ней в $L_2(G)$ система $\{v_n\}$.

Обозначим через μ_n тот квадратный корень из λ_n, действительная часть которого неотрицательна. В дальнейшем всюду считаем, что числа μ_n не имеют конечных точек сгущения.

Как и в работе [3], все множество собственных и присоединенных функций $\{u_n\}$ разобьем на отдельные цепочки, в каждую из которых входит одна собственная и все отвечающие ей присоединенные функции. Любые две функции u_k и u_m принадлежат либо одной цепочке, либо двум разным. Договоримся обозначать символом $u_k\sim u_m$ тот факт, что функции u_k и u_m принадлежат одной цепочке.

Перенумеруем все μ_n в порядке неубывания $|\mu_n|$, причем числа μ_n, отвечающие элементам u_n одной цепочки, нумеруем, начиная от соб-

ственной функции, по возрастанию порядка присоединенных функций. Пусть при любом $t>0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t)(f, v_n)_G \sum_{\substack{k\geqslant 0 \\ u_{n-k}\sim u_n}} \frac{t^k}{k!} u_{n-k}(x) \quad (x\in G).$$

Определение. Будем говорить, что модифицированные средние Абеля — Пуассона спектрального разложения по системе $\{u_n\}$ обладают свойством базисности на интервале G, если для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ и любого компакта K интервала G

$$\lim_{t\to+0} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t)(f, v_n)_G \sum_{\substack{k\geqslant 0 \\ u_{n-k}\sim u_n}} \frac{t^k}{k!} u_{n-k}(x) - f(x) \right\|_{L_2(K)} = 0.$$

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $|\operatorname{Im}\mu_n| \leqslant b = \text{const}$, $\sum\limits_{\mu\leqslant \operatorname{Re}\mu_n\leqslant \mu+1} 1 \leqslant C = \text{const}$ *для любого* $\mu\geqslant 0$;

2) существует такое $s\geqslant 0$, *что при* $\lambda_n\neq 0$

$$\|u_n\|_{L_2(K)}\|v_n\|_{L_2(G)} \leqslant C(K)\,|\lambda_n|^s$$

для любого компакта K *из* G;

3) $p(x)$ *принадлежит классу* $C^{[2s]+2}(G)$.

Тогда модифицированные средние Абеля — Пуассона обладают свойством базисности на интервале G.

Замечание. В работе [3] было доказано, что при выполнении условий 1) и некоторых требований на гладкость коэффициентов обыкновенного несамосопряженного дифференциального оператора $Lu = u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)u$ выполнение неравенства $\|u_n\|_{L_2(K)} \times \|v_n\|_{L_2(G)} \leqslant C(K)$ является необходимым и достаточным условием базисности спектрального разложения, отвечающего этому оператору.

Доказательство теоремы. Обозначим $G(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-(x-y)^2/4t)$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Зафиксируем представляющий собой отрезок $[a, b]$ компакт K интервала G, положительные числа R и R_1, меньшие расстояния от K до концов G, причем $R_1<R$. Определим четную функцию $\xi(r)$ следующим образом: $\xi(r)=1$ при $0\leqslant r\leqslant R_1$, $\xi(r)=0$ при $r\geqslant R$, $\xi(r)$ есть некоторый многочлен при $R_1\leqslant r\leqslant R$, причем $\xi(R)=\xi'(R)=\ldots=\xi^{(m)}(R)=0$, $\xi(R_1)=1$, $\xi'(R_1)=\ldots=\xi^{(m)}(R_1)=0$, где $m=[2s]+3$. Определим функцию $W(x, y, t)$ равенством $W(x, y, t)=G(x, y, t)\xi(x-y)$. Тогда функция $W(x, y, t)$ m раз непрерывно дифференцируема.

Лемма 1. *Для любой функции* $f(x)$ *из класса* $L_2(G)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{t\to 0} \left\| \int_G W(x, y, t) f(y)\,dy - f(x) \right\|_{L_2(K)} = 0.$$

Утверждение леммы следует из δ-образности семейства функций $W(x, y, t)$ при малых t.

Согласно работе [4], рассмотрим асимптотику собственных функций при больших значениях $|\lambda|$. Если функция u удовлетворяет уравнению (2) на некотором отрезке, где функция $p(x)$ m раз непрерывно дифференцируема, то $u=c_1u_1+c_2u_2$, где

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp(i\mu x)\left(1+\frac{\varphi_{11}(x)}{\mu}+\ldots+\frac{\varphi_{1m}(x)}{\mu^m}+O\left(\frac{1}{\mu^{m+1}}\right)\right), \\ u_2 &= \exp(-i\mu x)\left(1+\frac{\varphi_{21}(x)}{\mu}+\ldots+\frac{\varphi_{2m}(x)}{\mu^m}+O\left(\frac{1}{\mu^{m+1}}\right)\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Функции $\varphi_{1k}(x)$, $\varphi_{2k}(x)$ $m-k+1$ раз непрерывно дифференцируемы на этом отрезке. Здесь и всюду в дальнейшем μ обозначает $\sqrt{\lambda}$.

Лемма 2. *Если* $\|u_n\|_{L_2(K)}=1$, *то справедливы оценки*

$$\sup_{x\in K}|u_n(x)|\leqslant c,\quad \sup_{x\in K}\left|\int_{x-R}^{x+R}W(x,\ y,\ t)u_n(y)dy\right|\leqslant\frac{\bar c}{|\mu_n|^{[2s]+2}},\qquad(5)$$

где константы c *и* $\bar c$ *зависят лишь от компакта* K.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда u_n — собственная функция. Тогда $u_n=c_{1n}u_{1n}+c_{2n}u_{2n}$, где для функций u_{1n} и u_{2n} справедливо асимптотическое представление (4).

Оценивая нормы $\|u_{1n}\|_{L_2(K)}$, $\|u_{2n}\|_{L_2(K)}$, скалярное произведение $(u_{1n},\ u_{2n})_K$ и используя условие 1) теоремы, получим, что определитель Грама функций u_{1n} и u_{2n} при всех достаточно больших n больше некоторого ε, $\varepsilon>0$. Для таких n функция u_{1n} может быть представлена в виде $u_{1n}=g_{1n}+\tilde c_{1n}u_{2n}$, где $(g_{1n},\ u_{2n})_K=0$, $\|g_{1n}\|_{L_2(K)}>\varepsilon_1>0$.

Следовательно, $\|c_{1n}u_{1n}+c_{2n}u_{2n}\|^2_{L_2(K)}=|c_{1n}|^2\|g_{1n}\|^2_{L_2(K)}+\|(c_{1n}\tilde c_{1n}+c_{2n})u_{2n}\|_{L_2(K)}=1$. Из последнего равенства следует, что $|c_{1n}|^2\|g_{1n}\|^2_{L_2(K)}\leqslant 1$ или $|c_{1n}|<1/\varepsilon_1$.

Аналогично доказывается ограниченность последовательности $\{c_{2n}\}$. Так как в силу условия 1) теоремы

$$\sup_{x\in K}|\exp(i\mu_n x)|\leqslant\sup_{x\in K}\exp(bx),\quad \sup_{x\in K}|\exp(-i\mu_n x)|\leqslant\sup_{x\in K}\exp(bx),$$

то $\sup\limits_{x\in K}|u_n(x)|\leqslant c$ для всех собственных функций u_n.

Обозначим $m=[2s]+1$, тогда

$$\int_{x-R}^{x+R}W(x,\ y,\ t)u_n(y)dy=\int_{x-R}^{x+R}W(x,\ y,\ t)(c_{1n}u_{1n}(y)+c_{2n}u_{2n}(y))dy=$$

$$=c_{1n}\int_{x-R}^{x+R}W(x,\ y,\ t)\exp(i\mu_n y)dy+c_{2n}\int_{x-R}^{x+R}W(x,\ y,\ t)\exp(-i\mu_n y)dy+$$

$$+c_{1n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\mu_n^k}\int_{x-R}^{x+R}W(x,y,t)\varphi_{1k}(y)\exp(i\mu_n y)dy+$$

$$+c_{2n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\mu_n^k}\int_{x-R}^{x+R}W(x,y,t)\varphi_{2k}(y)\exp(-i\mu_n y)dy+$$

$$+c_{1n}\int_{x-R}^{x+R}W(x,y,t)\exp(i\mu_n y)O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)dy+$$

$$+c_{2n}\int_{x-R}^{x+R}W(x,y,t)\exp(-i\mu_n y)O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)dy.$$

Проинтегрируем по частям $m+1$ раз первые два слагаемых, $m+1-k$ раз k-й член в третьем и четвертом слагаемых. При этом в силу свойств функции $W(x,\ y,\ t)$ все подстановки обратятся в нуль. Используя ограниченность коэффициентов c_{1n}, c_{2n}, а также $|\operatorname{Im}\mu_n|$, получаем второе из неравенств (5).

Используя метод вариации постоянной, установим асимптотику присоединенных функций. Если $Lu_n+\lambda_n u_n=u_{n-1}$, где u_{n-1} — собственная функция, то для функции u_n справедливо представление

$$u_n = u + \int_{a-R}^{x} \bar{u}(x-\tau+a-R)\, u_{n-1}(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

где функции u и $\bar{u}$ удовлетворяют уравнению (2) при $\lambda=\lambda_n$, причем $\bar{u}(a-R)=0$, $\bar{u}'(a-R)=1$. Подставив в (6) асимптотическое представление для собственных функций (4), получим

$$u_n = c_{1n} \exp(i\mu_n x)\left(x + \frac{\varphi_{11}(x)}{\mu_n} + \ldots + \frac{\varphi_{1m}(x)}{\mu_n^m} + O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)\right) +$$

$$+ c_{2n} \exp(i\mu_n x)\left(1 + \frac{\varphi_{21}(x)}{\mu_n} + \ldots + \frac{\varphi_{2m}(x)}{\mu_n^m} + O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)\right) +$$

$$+ c_{3n} \exp(-i\mu_n x)\left(x + \frac{\varphi_{31}(x)}{\mu_n} + \ldots + \frac{\varphi_{3m}(x)}{\mu_n^m} + O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)\right) +$$

$$+ c_{4n} \exp(-i\mu_n x)\left(1 + \frac{\varphi_{41}(x)}{\mu_n} + \ldots + \frac{\varphi_{4m}(x)}{\mu_n^m} + O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)\right).$$

Функции $\varphi_{ik}(x)$ могут зависеть от μ_n, но в силу условия 1) теоремы они сами и их производные до $m-k+1$ порядка непрерывны и равномерно ограничены. Далее аналогичными рассуждениями доказывается ограниченность коэффициентов c_{1n}, c_{2n}, c_{3n}, c_{4n} и утверждение леммы. Так же проводится доказательство леммы для присоединенных функций высших порядков. Лемма 2 доказана.

Определим функцию $\tilde{p}(x)$ следующим образом: $\tilde{p}(x)=p(x)$ при $x\in[a-R,\ b+R]$, $\tilde{p}(x)=0$ при $x<a-R_2$ и при $x>b+R_2$, где $R_2>R$, $\tilde{p}(x)$ $[2s]+2$ раза непрерывно дифференцируема на всей оси. Если u_n — собственная функция, то продолжим ее, чтобы выполнялось

$$\begin{cases} \tilde{u}_n'' + \tilde{p}(x)\tilde{u}_n + \lambda_n \tilde{u}_n = 0, & -\infty < x < \infty, \\ \tilde{u}_n = u_n & \text{при } x\in[a-R,\ b+R]. \end{cases}$$

Для этого достаточно рассмотреть две задачи Коши с начальными условиями в точках $a-R$ и $b+R$. Имеем

$$\tilde{u}_n(x) = \tilde{c}_{1n} \exp(i\mu_n x)(1+\tilde{\varphi}_{1n}(x)) + \tilde{c}_{2n} \exp(-i\mu_n x)(1+\tilde{\varphi}_{2n}(x)).$$

В силу обращения в нуль функции $\tilde{p}(x)$ вне отрезка $[a-R_2,\ b+R_2]$ функции $\tilde{\varphi}_{1n}(x)$ и $\tilde{\varphi}_{2n}(x)$ не зависят от x вне этого отрезка. Следовательно, они есть $O\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$ при $-\infty<x<\infty$. Если $\|u_n(x)\|_{L_2(K)}=1$, то $\|\tilde{u}_n(x)\|_{L_2(K)}=1$ и последовательности $\{\tilde{c}_{1n}\}$ и $\{\tilde{c}_{2n}\}$ ограничены. Если u_n — присоединенная функция I порядка, u_{n-1} — соответствующая ей собственная функция, то, согласно (6), $u_n = u + \int_{a-R}^{x} \bar{u}(x-\tau+a-R)\times$ $\times u_{n-1}(\tau)\,d\tau$, где u и $\bar{u}$ — некоторые решения уравнения (2) при $\lambda=\lambda_n$. Продолжим указанным способом функции u, $\bar{u}$, u_{n-1} на всю ось, получим функции $\tilde{u}$, $\tilde{\bar{u}}$, $\tilde{u}_{n-1}$. Положим

$$\tilde{u}_n = \tilde{u} + \int_{a-R}^{x} \tilde{\bar{u}}(x-\tau+a-R)\,\tilde{u}_{n-1}(\tau)\,d\tau, \quad -\infty<x<\infty.$$

Аналогично строится продолжение на всю ось для присоединенных функций высших порядков.

Лемма 3. *Если* $\|u_n\|_{L_2(K)}=1$, *то для любого* $x\in K$ *справедлива оценка*

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(G(x,\xi,t)-W(x,\xi,t))\tilde{u}_n(\xi)d\xi\right|\leqslant\frac{c(t)}{|\mu_n|^{[2s]+2}},\qquad(6')$$

где $c(t)\to 0$ *при* $t\to 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\tilde{u}_n(\xi)$ — собственная функция. Согласно асимптотическому представлению (4) и способу построения $\tilde{u}_n(\xi)$, $\tilde{u}_n(\xi)=\tilde{c}_{1n}\tilde{u}_{1n}+\tilde{c}_{2n}\tilde{u}_{2n}$, где

$$\tilde{u}_{1n}=\exp(i\mu_n\xi)\left(1+\frac{\tilde{\varphi}_{11}(\xi)}{\mu_n}+\ldots+\frac{\tilde{\varphi}_{1m}(\xi)}{\mu_n^m}+O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)\right),$$

$$\tilde{u}_{2n}=\exp(-i\mu_n\xi)\left(1+\frac{\tilde{\varphi}_{21}(\xi)}{\mu_n}+\ldots+\frac{\tilde{\varphi}_{2m}(\xi)}{\mu_n^m}+O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)\right)$$

$(m=[2s]+1)$. Функции $\tilde{\varphi}_{1n}(\xi)$, $\tilde{\varphi}_{2n}(\xi)$, $O\left(\frac{1}{\mu_n^m}\right)$ не зависят от ξ вне отрезка $[a-R_2,\ b+R_2]$. Преобразуем левую часть неравенства (6′):

$$\int_{-\infty}^{\infty}(G(x,\xi,t)-W(x,\xi,t))\tilde{u}_n(\xi)d\xi=\tilde{c}_{1n}\int_{|x-\xi|\geqslant R_1}(G(x,\xi,t)-$$

$$-W(x,\xi,t))\tilde{u}_{1n}(\xi)d\xi+\tilde{c}_{2n}\int_{|x-\xi|\geqslant R_1}(G(x,\xi,t)-W(x,\xi,t))\tilde{u}_{2n}(\xi)d\xi.\qquad(7)$$

Подставим выражения для $\tilde{u}_{1n}$ и $\tilde{u}_{2n}$ в правую часть (7) и аналогично лемме 2 необходимое число раз проинтегрируем по частям. Все подстановки в силу определения функции $W(x,y,t)$ обратятся в нуль. Производные от $G(x,\xi,t)-W(x,\xi,t)$ представляют собой линейные комбинации членов вида $(x-\xi)^p\exp(-(x-\xi)^2/4t)t^{-k-1/2}$, поэтому результат интегрирования по частям не превосходит по модулю некоторой конечной суммы выражений вида

$$\frac{c_j}{|\mu_n^{m+1}|\,t^k\sqrt{t}}\int_{|x-\xi|\geqslant R_1}|(x-\xi)^p\exp(-(x-\xi)^2/4t)\exp(i\mu_n\xi)|\,d\xi,\qquad(8)$$

$$\frac{c_l}{|\mu_n^{m+1}|\,t^k\sqrt{t}}\int_{|x-\xi|\geqslant R_1}|(x-\xi)^p\exp(-(x-\xi)^2/4t)\exp(-i\mu_n\xi)|\,d\xi,\qquad(9)$$

где все числа c_j, c_l ограничены одной константой c, зависящей лишь от компакта K. Так как $|\operatorname{Im}\mu_n|\leqslant b$, то выражения (8) и (9) не превосходят выражения

$$\frac{2cM}{|\mu_n|^{m+1}t^k\sqrt{t}}\int_{R_1}^{\infty}r^p\exp(-r^2/4t+br)dr,\quad M=\sup_{x\in K}\exp(bx).$$

Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, получим

$$\int_{R_1}^{\infty}r^p\exp(-r^2/4t+br)dr\leqslant\left(\int_{R_1}^{\infty}r^{2p-1}\exp(-r^2/4t+2br)dr\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int_{R_1}^{\infty}r\exp(-r^2/4t)dr\right)^{1/2},$$

$$\int_{R_1}^{\infty} r^{2p-1} \exp\,(-r^2/4t+2br)\,dr \to 0$$

при $t\to 0$,

$$\int_{R_1}^{\infty} r \exp\,(-r^2/4t)\,dr = 4t \exp\,(-R_1^2/4t) \to 0$$

при $t\to 0$ быстрее любой степени t. Отсюда вытекает справедливость неравенства (6′). Если $\tilde{u}_n(\xi)$ — присоединенная функция, то рассматривается ее асимптотическое представление и доказательство проводится аналогичным интегрированием по частям.

Лемма 4. *Пусть компакт K лежит строго внутри компакта K', принадлежащего интервалу G. Если $\|\tilde{u}_n\|_{L_2(K')}=1$, то для любого $x\in K$ справедлива оценка*

$$\Big| \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (G(x, \xi, t-\tau) - W(x, \xi, t-\tau))\,\tilde{p}(\xi) \exp\,(-\lambda_n\tau) \times$$

$$\times \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}} \frac{\tau^k}{k!}\,\tilde{u}_{n-k}(\xi)\,d\xi\,d\tau \Big| \leqslant c(t)\,|\mu_n|^{-([2s]+2)}, \tag{10}$$

где $c(t)\to 0$ при $t\to 0$.

Доказательство. Так как $|\exp\,(-\lambda_n\tau)| = \exp\,(-|\lambda_n|\tau + 2\,\mathrm{Im}^2\mu_n)$ и $|\lambda_n|^k\tau^k \exp\,(-|\lambda_n|\tau) \leqslant c$, где c — некоторая постоянная, то для любых τ, n справедливо неравенство

$$|\tau^k \exp\,(-\lambda_n\tau)| \leqslant c \exp\,(b^2)\,|\lambda_n|^{-k}. \tag{11}$$

Из оценки

$$\|\tilde{u}_{n-k}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K')\,|\mu_n^k|\,\|\tilde{u}_n\|_{L_2(K')}, \tag{12}$$

полученной в работе [1], и неравенства (11) вытекает, что

$$|\tau^k \exp\,(-\lambda_n\tau)|\,\|\tilde{u}_{n-k}\|_{L_2(K)} \leqslant c_1\,|\mu_n|^{-k}, \tag{13}$$

из которого следует, что левая часть неравенства (10) не превосходит

$$\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}} \frac{c_1}{k!\,|\mu_n|^k} \int_0^t d\tau \Big| \int_{-\infty}^{\infty} (G(x, \xi, t-\tau) -$$

$$- W(x, \xi, t-\tau))\,\tilde{p}(\xi)\,\frac{\tilde{u}_{n-k}(\xi)}{\|\tilde{u}_{n-k}\|_{L_2(K)}}\,d\xi \Big|.$$

Далее доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\,\tilde{u}_n(\xi)\,d\xi = \exp\,(-\lambda_n t) \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}} \frac{t^k}{k!}\,\tilde{u}_{n-k}(x) -$$

$$- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t-\tau)\,\tilde{p}(\xi) \exp\,(-\lambda_n\tau) \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}} \frac{\tau^k}{k!}\,\tilde{u}_{n-k}(\xi)\,d\xi\,d\tau. \tag{14}$$

Введем обозначение

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\tilde{u}_n(\xi)d\xi=\exp(-\lambda_n t)\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}}\frac{t^k}{k!}\tilde{u}_{n-k}(x)+Z.$$

Учитывая, что $A'_t=A''_{xx}$ и функции $\tilde{u}_{n-k}$ $(k\geqslant 0,\ u_{n-k}\sim u_n)$ удовлетворяют системе уравнений (3) на всей действительной оси, легко получаем, что

$$Z'_t-Z''_{xx}=-\tilde{p}(x)\exp(-\lambda_n t)\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}}\frac{t^k}{k!}\tilde{u}_{n-k}(x).$$

Так как

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\tilde{u}_n(\xi)d\xi=\tilde{u}_n(x),$$

$$\lim_{t\to 0}\exp(-\lambda_n t)\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}}\frac{t^k}{k!}\tilde{u}_{n-k}(x)=\tilde{u}_n(x),$$

то $Z(x,0)=0$. Отсюда следует, что

$$Z(x,t)=-\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\tilde{p}(\xi)\exp(-\lambda_n t)\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}}\frac{t^k}{k!}\tilde{u}_{n-k}(\xi)d\xi d\tau.$$

Лемма доказана.

Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2). Тогда для нее справедлива следующая формула среднего значения (см. [5]):

$$\frac{u(x+r)+u(x-r)}{2}=u(x)\cos\mu r-\frac{1}{2\mu}\int_{x-r}^{x+r} p(\tau)u(\tau)\sin\mu(|x-\tau|-r)d\tau. \tag{15}$$

Запишем формулу (15) в ином виде:

$$(u(x+r)+u(x-r))/2=u(x)\cos\mu r-\frac{1}{2\mu}\int_0^r (p(x+z)u(x+z)+$$
$$+p(x-z)u(x-z))\sin\mu(z-r)dz. \tag{16}$$

Продифференцируем формулу (15) по x:

$$(u'(x+r)+u'(x-r))/2=u'(x)\cos\mu r+\frac{1}{2}\Big(\int_x^{x+r} p(\tau)u(\tau)\times$$
$$\times\cos\mu(\tau-x-r)d\tau+\int_{x-r}^{x} p(\tau)u(\tau)\cos\mu(x-\tau-r)d\tau\Big).$$

Поскольку $u(x+r)-u(x-r)=\int_0^r (u'(x+z)+u'(x-z))dz$, то

$$(u(x+r)-u(x-r))/2=u'(x)\sin\mu r/\mu+\frac{1}{2}\int_0^r\Big(\int_x^{x+z} p(\tau)u(\tau)\times$$
$$\times\cos\mu(\tau-x-z)d\tau-\int_{x-z}^{x} p(\tau)u(\tau)\cos\mu(x-\tau-z)d\tau\Big)dz.$$

После несложных преобразований получим

$$(u(x+r)-u(x-r))/2=u'(x)\sin\mu r/\mu-\frac{1}{2\mu}\int_0^r (p(x+z)u(x+z)-$$

$$-p(x-z)u(x-z))\sin\mu(z-r)\,dz. \qquad (17)$$

По формуле Тейлора

$$p(x+r)u(x+r)+p(x-r)u(x-r)=p(x)(u(x+r)+u(x-r))+\ldots$$

$$\ldots+p^{(m)}(x)(u(x+r)+(-1)^m u(x-r))r^m/m!+$$

$$+o(r^m)u(x+r)+o(r^m)u(x-r) \quad (m=[2s]+2).$$

Выражения $u(x+r)+u(x-r)$ и $u(x+r)-u(x-r)$ преобразуем соответственно по формулам (16) и (17). В интегралах, стоящих в правых частях формул (16) и (17), снова разложим функцию $p(z)$ по формуле Тейлора и получившиеся выражения для суммы $u(x+z)+u(x-z)$ и разности $u(x+z)-u(x-z)$ преобразуем по формулам (16) и (17). Через n таких шагов мы получим, что функция $p(x+r)u(x+r)+$ $+p(x-r)u(x-r)$ равна линейной комбинации членов вида $\varphi_i(x)P_i(r)$ плюс некоторый остаточный член. Функции $\varphi_i(x)$ являются произведениями функции $p(x)$ и ее производных порядка не выше m на функцию $u(x)$ или $u'(x)$.

Лемма 6. *Функция $P_i(r)$ есть линейная комбинация выражений вида*

$$r^{2n}\cos\mu r, \quad r^{2k+1}\sin\mu r \quad (n,\ k=0,\ 1,\ \ldots). \qquad (18)$$

Доказательство. По индукции легко показать, что интегралы

$$\int_0^r z^{2n}\cos\mu z\sin\mu(z-r)\,dz, \quad \int_0^r z^{2k+1}\sin\mu z\sin\mu(z-r)\,dz \qquad (19)$$

как функции r являются линейными комбинациями выражений вида (18), а интегралы

$$\int_0^r z^{2n}\sin\mu z\sin\mu(z-r)\,dz, \quad \int_0^r z^{2k+1}\cos\mu z\sin\mu(z-r)\,dz \qquad (20)$$

являются линейными комбинациями выражений вида

$$r^{2n}\sin\mu r, \quad r^{2k+1}\cos\mu r \quad (n,\ k=0,\ 1,\ \ldots). \qquad (21)$$

Докажем утверждение леммы индукцией по числу шагов, на каждом из которых применяется формула (16) или (17). Полученный на n-м шаге член имеет вид

$$\frac{c_i\varphi_i(x)r^{k_0}}{\mu^{n-1}}\int_0^r t_1^{k_1}\sin\mu(t_1-r)\,dt_1\int_0^{t_1} t_2^{k_2}\sin\mu(t_2-t_1)\,dt_2\ldots$$

$$\ldots\int_0^{t_{n-2}} t_{n-1}^{k_{n-1}}\Big[u(x)\cos\mu t_{n-1}-\frac{1}{2\mu}\int_0^{t_{n-1}}(p(x+t_n)u(x+t_n)+$$

$$+p(x-t_n)u(x-t_n))\sin\mu(t_n-t_{n-1})\,dt_n\Big]\sin\mu(t_{n-1}-t_{n-2})\,dt_{n-1}$$

или

$$\frac{c_i\varphi_i(x)r^{k_0}}{\mu^{n-1}}\int_0^r t_1^{k_1}\sin\mu(t_1-r)\,dt_1\int_0^{t_1} t_2^{k_2}\sin\mu(t_2-t_1)\,dt_2\ \ldots$$

$$\ldots \int_0^{t_{n-2}} t_{n-1}^{k'_{n-1}} \left[u'(x) \frac{\sin \mu t_{n-1}}{\mu} - \frac{1}{2\mu} \int_0^{t_{n-1}} (p(x+t_n)\, u(x+t_n) - \right.$$

$$\left. - p(x-t_n)\, u(x-t_n)) \sin \mu (t_n - t_{n-1})\, dt_n \right] \sin \mu (t_{n-1} - t_{n-2})\, dt_{n-1}$$

в зависимости от того, какая формула — (16) или (17) — была применена на n-м шаге. По индуктивному предположению функции

$$r^{k_0} \int_0^r t_1^{k_1} \sin \mu (t_1 - r)\, dt_1 \int_0^{t_1} t_2^{k_2} \sin \mu (t_2 - t_1)\, dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-2}} t_{n-1}^{k_{n-1}} \cos \mu t_{n-1} \times$$

$$\times \sin \mu (t_{n-1} - t_{n-2})\, dt_{n-1}, \tag{22}$$

$$r^{k_0} \int_0^r t_1^{k_1} \sin \mu (t_1 - r)\, dt_1 \int_0^{t_1} t_2^{k_2} \sin \mu (t_2 - t_1)\, dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-2}} t_{n-1}^{k'_{n-1}} \sin \mu t_{n-1} \times$$

$$\times \sin \mu (t_{n-1} - t_{n-2})\, dt_{n-1}, \tag{23}$$

где четности k_{n-1} и k'_{n-1} различны, являются линейными комбинациями выражений (18). При выполнении $(n+1)$-го шага в самый внутренний интеграл (22) вместо функции $\sin \mu t_{n-1}$ будет подставлена линейная комбинация интегралов (19), а в самый внутренний интеграл (23) вместо функции $\sin \mu t_{n-1}$ — линейная комбинация интегралов (20), т. е. члены, полученные на $(n+1)$-м шаге, есть линейные комбинации выражений вида (22) и (23). Следовательно, они являются линейными комбинациями выражений (18). Лемма доказана.

Рассмотрим интеграл $\int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t)\, p(\xi)\, u(\xi)\, d\xi$. Заменой переменной приведем его к виду

$$\int_0^R W(r, t)\, (p(x+r)\, u(x+r) + p(x-r)\, u(x-r))\, dr. \tag{24}$$

Подставляя в интеграл (24) вместо суммы $p(x+r)\, u(x+r) + p(x-r)\, u(x-r)$ ее разложение на слагаемые вида $\varphi_i(x) P_i(r)$, где функции $\varphi_i(x)$ и $P_i(r)$ определены выше, и остаточный член, получим, что выражение (24) равно линейной комбинации членов вида $\varphi_i(x) \int_0^R W(r, t) \times \times P_i(r)\, dr$, сложенной с остаточным членом, состоящим из конечного числа слагаемых двух типов. К первому типу отнесем все слагаемые, образовавшиеся из-за наличия остаточного члена $o(r^m)$ в формуле Тейлора, ко второму — все остальные. Произвольное слагаемое второго типа, полученное на m-м шаге $(m = [2s] + 2)$, имеет вид

$$\frac{c_j f_j(x)}{\mu^m} \int_0^R W(r, t)\, r^{k_0} dr \int_0^r t_1^{k_1} \sin \mu (t_1 - r)\, dt_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{t_{m-1}} (p(x+t_m)\, u(x+t_m) + (-1)^i p(x-t_m)\, u(x-t_m)) \times$$

$$\times \sin \mu (t_m - t_{m-1})\, dt_m, \tag{25}$$

где $f_j(x)$ — некоторое произведение функции $p(x)$ и ее производных порядка не выше m, $i=0$ или $i=1$. Легко видеть, что выражение (25) по модулю не превосходит

$$\frac{c\|u\|_{L_2(K_1)}}{|\mu|^m}\int_0^R |W(r,t)|r^k \exp\left(r(m+1)|\operatorname{Im}\mu|\right)dr,$$

где c — const, K_1 — отрезок $[a-R,\ b+R]$. Произвольное слагаемое первого типа представляется в виде

$$\frac{c_j f_j(x)}{\mu^n}\int_0^R W(r,t)r^{k_0}dr\int_0^r t_1^{k_1}\sin\mu(t_1-r)dt_1\ldots$$

$$\ldots\int_0^{t_{n-1}} t_n^m(\psi_1(x,t_n)u(x+t_n)+\psi_2(x,t_n)u(x-t_n))\sin\mu(t_n-t_{n-1})dt_n. \qquad (26)$$

Исходя из формулы Тейлора и условий теоремы, легко показать, что функции $(r^i\psi_1(x,r))_r^{(i)}$, $(r^i\psi_2(x,r))_r^{(i)}$ непрерывны по совокупности переменных при $x\in K$, $0\leqslant r\leqslant R$ и по абсолютной величине мажорируются некоторой непрерывной функцией $\psi(r)$, $\psi(r)\to 0$ при $r\to 0$. Выражение (26) интегрированием по частям приводится к линейной комбинации выражений вида

$$\frac{f_j(x)}{\mu^{m_1}}\int_0^R (W(r,t)r^{k_0})^{(k)}r^h dr\int_0^r\ldots\int_0^{t_i} t_{i+1}^m(\psi_1(x,t_{i+1})u(x+t_{i+1})+$$

$$+\psi_2(x,t_{i+1})u(x+t_{i+1}))\sin\mu(t_{i+1}-t_i)dt_{i+1}, \qquad (27)$$

где $0\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant k\leqslant m\leqslant m_1\leqslant m+1$, $h\geqslant 0$, и

$$\frac{f_j(x)}{\mu^l}\int_0^R (W(r,t)r^{k_0})^{(k)}r^{m+h}(\psi_1(x,r)u(x+r)+\psi_2(x,r)u(x-r))dr, \qquad (28)$$

где $0\leqslant k\leqslant l<m$, $h\geqslant 0$. Функция $(W(r,t)r^{k_0})^{(k)}$ представляет собой линейную комбинацию слагаемых типа $r^p t^{-q-1/2}\exp(-r^2/4t)$, причем $k=q\leqslant p$. Поэтому выражение (27) по модулю не превосходит некоторой суммы выражений вида

$$\frac{|c_j'|\,\|u\|_{L_2(K_1)}}{|\mu|^{m_1}t^q\sqrt{t}}\int_0^R r^{p+m+h}\exp\left(-r^2/4t+r(i+1)|\operatorname{Im}\mu|\right)\psi(r)dr, \qquad (29)$$

где $|c_j'|\leqslant c$ — const. Так как $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^q\sqrt{t}}\displaystyle\int_0^R r^{2q}\exp(-r^2/4t)\,\psi(r)\,dr=0$, то выражение (29) стремится к нулю при $t\to 0$. Подставляя в выражение (28) вместо функций $u(x+r)$, $u(x-r)$ их асимптотическое представление (4), $m-l$ раз интегрируя по частям и учитывая, что $0\leqslant k\leqslant l\leqslant m$, получим: (28) по модулю не превосходит $\|u\|_{L_2(K_1)}c(t)|\mu|^{-m}$, где $c(t)\to 0$ при $t\to 0$. Исследование остаточного члена завершено.

Если функция u удовлетворяет уравнению (3), то формулы (16), (17) для нее примут вид

$$\frac{\overset{l}{u}(x+r)+\overset{l}{u}(x-r)}{2}=\overset{l}{u}(x)\cos\mu r-\frac{1}{2\mu}\int_0^r (p(x+z)\overset{l}{u}(x+z)-$$

$$-\overset{l-1}{u}(x+z)+p(x-z)\overset{l}{u}(x-z)-\overset{l-1}{u}(x-z))\sin\mu(z-r)dz, \qquad (16')$$

$$\frac{\overset{l}{u}(x+r)-\overset{l}{u}(x-r)}{2}=\overset{l}{u}'(x)\frac{\sin\mu r}{\mu}-\frac{1}{2\mu}\int_0^r (p(x+z)\overset{l}{u}(x+z)-$$

$$-\overset{l-1}{u}(x+z)-p(x-z)\overset{l}{u}(x-z)+\overset{l-1}{u}(x-z))\sin\mu(z-r)dz. \qquad (17')$$

Поэтому и для интеграла $\int_{x-R}^{x+R} W(x,\xi,t)p(\xi)\overset{l}{u}(\xi)d\xi$ можно аналогичными рассуждениями построить разложение на главные и остаточные члены.

Запишем очевидное равенство

$$\int_0^R W(r,t)P_i(r)dr=\int_0^\infty G(r,t)P_i(r)dr+\int_{R_1}^\infty (W(r,t)-G(r,t))P_i(r)dr.$$

Интегрированием по частям легко установить, что

$$\left|\int_{R_1}^\infty (W(r,t)-G(r,t))P_i(r)dr\right|\leqslant c(t)\,|\mu|^{-m},$$

где $c(t)\to 0$ при $t\to 0$. Известно [6], что

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^\infty r^{2n}\exp(-r^2/4t)\cos\mu r dr=\exp(-\lambda t)Q_1(\mu,t),$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^\infty r^{2n+1}\exp(-r^2/4t)\sin\mu r dr=\exp(-\lambda t)Q_2(\mu,t),$$

где $Q_1(\mu,t)$, $Q_2(\mu,t)$ — многочлены по μ и t.

Пусть функция $f(x)\in L_2(G)$. Разложим функцию $W(x,y,t)$ по биортогональной системе $\{\bar v_n,\bar u_n\}$ (см. [2]). Сходимость такого разложения к $W(x,y,t)$ следует из леммы 2 и условия 2) теоремы:

$$\int_G W(x,y,t)f(y)dy=\int_G\sum_{n=1}^\infty\left[\int_K W(x,\xi,t)u_n(\xi)d\xi\bar v_n(y)\right]f(y)dy=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\int_K W(x,\xi,t)u_n(\xi)d\xi\int_G f(y)\bar v_n(y)dy. \qquad (30)$$

Из лемм 3—5 и равенства (30) вытекает, что

$$\int_G W(x,\xi,t)f(\xi)d\xi=\sum_{n=1}^\infty\exp(-\lambda_n t)(f,v_n)\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}}\frac{t^k}{k!}u_{n-k}(x)-$$

$$-\sum_{n=1}^\infty\int_0^t\int_{x-R}^{x+R}W(x,\xi,t-\tau)p(\xi)\times$$

$$\times\exp(-\lambda_n\tau)(f,v_n)\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}}\frac{\tau^k}{k!}u_{n-k}(\xi)d\xi d\tau+\varepsilon(t), \qquad (31)$$

где $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to 0$. Обозначим

$$\exp(-\lambda_n t)(f, v_n) \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ u_{n-k}\sim u_n}} \frac{t^k}{k!} u_{n-k}(x) = H_n(x, t).$$

При любом фиксированном τ, $0<\tau<t$,

$$\int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) p(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\xi, \tau) d\xi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) H_n(\xi, \tau) d\xi. \tag{32}$$

Раскладывая правую часть интеграла (32) по формулам (16′) и (17′) на главные и остаточные члены, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) p(\xi) H_n(\xi, \tau) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{N} \exp(-\lambda_n t) \times$$

$$\times F_{n,m}(x)(f, v_n) \tau^{i(m)} \mu_n^{-j(m)} Q_m(\mu_n, t-\tau) + \varepsilon_1(\tau),$$

где $\varepsilon_1(\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$; N — некоторое постоянное число, зависящее от s; $i(m)\geqslant 0$; $j(m)\geqslant 0$; $F_{n,m}(x)$ — линейная комбинация произведений функций u_{n-k} $(k\geqslant 0,\ u_{n-k}\sim u_n)$ или их производных на функцию $p(x)$ и ее производные не выше порядка $[2s]+2$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) p(\xi) H_n(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t)(f, v_n) \sum_{m=1}^{N} F_{n,m}(x) \mu_n^{-j(m)} \int_0^t \tau^{i(m)} Q_m(\mu_n, t-\tau) d\tau.$$

Тем самым доказано равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) p(\xi) H_n(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) p(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\xi, \tau) d\xi d\tau. \tag{33}$$

Оценим левую часть равенства (31):

$$\left| \int_G W(x, \xi, t) f(\xi) d\xi \right| \leqslant c_1 \|f\|_{L_2(G)} t^{-1/4}.$$

В силу условия 2) теоремы и оценки (12) существуют такие $c>0$, $m>0$, что $\left|\sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, t)\right| \leqslant ct^{-m}$. Пусть $|\varphi(\tau)| \leqslant \tau^{m-1+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$, тогда

$$\left| \int_0^t \int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) p(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\xi, \tau) \varphi(\tau) d\xi d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \tau^{\varepsilon-1} \int_{x-R}^{x+R} |W(x, \xi, t-\tau) p(\xi)| \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\xi, \tau) \right| \tau^m d\xi d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^t \tau^{\varepsilon-1} \int_{x-R}^{x+R} |W(x, \xi, t-\tau)| d\xi d\tau \leqslant c_1 \int_0^t \tau^{\varepsilon-1} d\tau = c_1 t^{\varepsilon}/\varepsilon \to 0$$

при $t \to 0$, следовательно, если $m<1$, то правая часть равенства (33) стремится к нулю при $t \to 0$. Пусть $m \geqslant 1$, тогда

$$t^{m-1/2} \int_G W(x, \xi, t) f(\xi) d\xi = t^{m-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, t) -$$

$$- t^{m-1/2} \int_0^t \int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) p(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\xi, \tau) d\xi d\tau + t^{m-1/2} \varepsilon(t). \quad (34)$$

Левая часть выражения (34) стремится к нулю при $t \to 0$, второе слагаемое в правой части равно

$$t^{m-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t)(f, v_n) \sum_{l=0}^{M-1} F_{n,l}(x, \mu, t) \int_0^t \tau^l d\tau + \varepsilon_1(t),$$

где $\varepsilon_1(t) \to 0$ при $t \to 0$, функции $F_{n,l}(x, \mu, t)$ — многочлены по t, дробно-линейные функции по μ и линейные комбинации произведений функций u_{n-k} $(k \geqslant 0,\ u_{n-k} \sim u_n)$ или их производных на функцию $p(x)$ и ее производные не выше порядка $[2s]+2$ по x. Легко видеть, что существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$, что $0<\alpha_i \leqslant 1$ для любого i и

$$\det \|\alpha_j^{m+i-1/2}\|_{i,j=1}^{M} \neq 0.$$

Рассматривая интегралы

$$\int_0^t \int_{x-R}^{x+R} W(x, \xi, t-\tau) p(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\xi, \tau) \varphi_i(\tau) d\xi d\tau,$$

где

$$\varphi_i(\tau) = \begin{cases} \tau^{m-1/2} & \text{при } \tau \leqslant \alpha_i t, \\ 0 & \text{при } \tau > \alpha_i t, \end{cases}$$

которые стремятся к нулю при $t \to 0$, получим, что для любого l функции $t^{m+l+1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t)(f, v_n) F_{n,l}(x, \mu, t)$ стремятся к нулю при $t \to 0$. Следовательно, второе слагаемое в правой части (34) стремится к нулю при $t \to 0$, поэтому $\left| \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, t) \right| < c t^{m-1/2}$. Отсюда по индукции получаем, что $\left| \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, t) \right| < c_1 t^{-1/2}$, поэтому правая часть (33) стремится к нулю при $t \to 0$, т. е. разность

$$\int_G W(x, \xi, t) f(\xi) d\xi - \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, t)$$

равномерно по x стремится к нулю при $t \to 0$. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину за постановку задачи и руководство работой, Е. И. Моисееву и В. В. Тихомирову за внимательный просмотр рукописи и ценные замечания.

Литература

1. Ильин В. А.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 5, с. 771—794.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов.— М.: Физматгиз 1958.— 304 с.
3. Ильин В. А.— Дифференц. уравнения 1980, т. 16, № 6, с. 980—1009.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.— 200 с.
5. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.— М.: Изд-во иностр. лит., 1969, т. 1.— 380 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1962.— 1100 с.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 9 июля 1981 г.

УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. VI

1. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathscr{B}$, расстояние в котором обозначается через $d_{\mathscr{B}}(\cdot, \cdot)$, задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$). Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot) : \mathscr{B} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{x \in \mathscr{B}} \|A(x)\| < +\infty.$$

Множество $\mathscr{S}$ всех таких отображений $A(\cdot)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также A) наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой

$$d_{\mathscr{S}}(A_1, A_2) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x \in \mathscr{B}} \|A_1(x) - A_2(x)\|.$$

Так определенное метрическое пространство $(\mathscr{S}, d_{\mathscr{S}})$, как известно, полно.

2. При всяких $A \in \mathscr{S}$, $x \in \mathscr{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x} \quad (\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n). \tag{1}$$

Обозначим через $\lambda_1((A, x)) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n((A, x))$ *показатели Ляпунова* этой системы. Напомним их определение (см. [1], а также [2, 3]).

Среди всех базисов $\{\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n\}$ векторного пространства $\mathbf{R}^n$ возьмем такой, для которого сумма *)

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |\mathfrak{X}(t, 0; A, x)\mathfrak{x}_i|$$

принимает наименьшее значение. Существование таких базисов, названных Ляпуновым *нормальными*, доказано Ляпуновым [1, п. 8]. Изменив,

*) $\mathfrak{X}(\tau, \theta; A, x)$ — оператор Коши системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$ (т. е. отображение, которое значению всякого решения этой системы в точке $t = \theta$ ставит в соответствие значение этого же решения в точке $t = \tau$); $|\mathfrak{h}| \underset{\mathrm{def}}{=} \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{h} \rangle^{\frac{1}{2}}$ для всякого $\mathfrak{h} \in \mathbf{R}^n$.