В. П. Серебряков, Об индексе дефекта симметрического дифференциального оператора 2-го порядка в пространстве вектор-функций,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 6, 833–842

https://www.mathnet.ru/mzm4206

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 6 (1988)

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА СИММЕТРИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 2-ГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В. П. Серебряков

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) = -y''(x) + Q(x)\, y(x), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

где $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ — n-мерная вектор-функция, $Q(x)$ — эрмитова матрица порядка n, элементы которой $q_{j,k}(x)$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ интегрируемы по Лебегу на каждом интервале $(0, b)$, $0 < b < \infty$. Обозначим через $L_n^2(0, \infty)$ комплексное гильбертово пространство n-мерных вектор-функций, у которых сумма квадратов модулей компонент интегрируема по Лебегу на полуоси $(0, \infty)$, со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty y_k(x)\, \bar{z}_k(x)\, \mathrm{d}x,$$

а через $\mathscr{L}$ — минимальный замкнутый симметрический оператор, порождаемый в $L_n^2(0, \infty)$ выражением $l(y)$.

Рассуждая так же, как и в [1, § 17], легко показать, что

I) *область определения* $\mathfrak{D}^*$ *оператора* $\mathscr{L}^*$, *сопряженного* $\mathscr{L}$, *состоит из вектор-функций* $y \in L_n^2(0, \infty)$ *с абсолютно непрерывной* 1-*й производной на каждом сегменте* $[0, b]$, $0 < b < \infty$, *для которых* $l(y) \in L_n^2(0, \infty)$;

II) *если* $y = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, $z = (z_1(x), \ldots$ $\ldots, z_n(x)) \in \mathfrak{D}^*$, *то существует конечный предел*

$$\lim_{x \to \infty} [y, z], \tag{1}$$

где

$$[y, z] = \sum_{k=1}^{n} [y_k(x) \bar{z}'_k(x) - y'_k(x) \bar{z}_k(x)]; \tag{2}$$

III) *область определения* $\mathfrak{D}$ *оператора* $\mathscr{L}$ *состоит из тех вектор-функций* $y \in \mathfrak{D}^*$, *для которых* $y(0) = y'(0) = 0$, *и предел* (1) *равен нулю при каждом* $z \in \mathfrak{D}^*$.

Обозначим через l_1 число линейно независимых решений из $L_n^2(0, \infty)$ уравнения

$$l(y) = \lambda y \tag{3}$$

с комплексным параметром λ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, а через l_2 — число таких решений уравнения (3) при $\operatorname{Im} \lambda < 0$. Числа l_1 и l_2 совпадают с дефектными числами оператора $\mathscr{L}$ и сохраняют постоянные значения в полуплоскостях соответственно $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda < 0$. Для l_1, l_2 справедливы неравенства $n \leqslant l_1 \leqslant 2n$, $n \leqslant l_2 \leqslant 2n$.

Согласно [2] числа l_1 и l_2 могут принимать независимо друг от друга любые значения от n до $2n - 1$, а если одно из них равно $2n$, то другое также равно $2n$; последнее утверждение следует из того факта, что если все решения уравнения (3) при каком-нибудь комплексном значении $\lambda = \lambda_0$ принадлежат $L_n^2(0, \infty)$, то и при любом комплексном λ все решения уравнения (3) принадлежат $L_n^2(0, \infty)$. Если все элементы матрицы Q — действительнозначные функции, то, очевидно, $l_1 = l_2$.

Некоторые условия на матрицу Q, при которых $\mathscr{L}$ имеет индекс дефекта $\{n, n\}$ и $\{2n, 2n\}$, можно найти в [3, 4] (см. также [5]).

Развивая здесь метод, использованный в [6, 7] для исследования скалярного уравнения, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $n_1, \ldots, n_m$ — *попарно различные натуральные числа*, $1 \leqslant n_k \leqslant n$ $(k = 1, \ldots, m)$, a — *положительное действительное число, а* p *и* q — *действительнозначные функции, определенные на* $[a, \infty)$ *и обладающие свойствами:*

1) p' и q *абсолютно непрерывны на каждом сегменте*

$$[a, b], \quad a < b < \infty;$$

2) *функции*

$$(pq)' + p'q,$$

$$p'' - \left(q^2 + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re} q_{j,\, n_k}\right) p, \quad p \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Im} q_{j,\, n_k}$$

при $j = n_1, \ldots, n_m$ *и* $p \sum_{k=1}^{m} q_{j,\, n_k}$ *при всех* $j \neq n_1, \ldots, n_m$ *принадлежат* $L^2(a, \infty)$. *Тогда*

а) *если* $p \in L^2(a, \infty)$ *и функция* $p^2 q$ *имеет не равный нулю предел при* $x \to \infty$, *то сумма дефектных чисел* l_1 *и* l_2 *оператора* $\mathscr{L}$ *удовлетворяет неравенству* $l_1 + l_2 \geqslant 2n + 2$;

б) *если* $p \notin L^2(a, \infty)$, *то индекс дефекта оператора* $\mathscr{L}$ *отличен от* $\{2n, 2n\}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения а) достаточно показать [1, § 14], что в $\mathfrak{D}^*$ найдется $2n + 2$ элементов, линейно независимых по модулю $\mathfrak{D}$.

Пусть $e^{(k)}$ — n-мерный вектор, у которого все компоненты, кроме k-й, равны нулю, а k-я компонента равна 1, и пусть

$$\begin{gathered} \varphi^{(+)}(x) = p(x) \exp\left(i \int_a^x q(t)\, \mathrm{d}t\right), \\ \varphi^{(-)}(x) = p(x) \exp\left(-i \int_a^x q(t)\, \mathrm{d}t\right), \\ u(x) = \varphi^{(+)}(x) \sum_{k=1}^{m} e^{(n_k)}, \\ v(x) = \varphi^{(-)}(x) \sum_{k=1}^{m} e^{(n_k)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть $\mathfrak{D}_a^*$ — множество сужений на $[0, a]$ вектор-функций из $\mathfrak{D}^*$, а $w^{(r)}$ — вектор-функции из $\mathfrak{D}_a^*$, значения $w^{(r)}(0)$, $w'^{(r)}(0)$, $w^{(r)}(a)$ и $w'^{(r)}(a)$ $(r = 1, \ldots, 2n + 2)$ которых определяются соответственно из 1-й, 2-й, 3-й и 4-й строк таблицы

$$\begin{pmatrix} e^{(1)} \ldots e^{(n)} & 0 \ldots 0 & e^{(n_1)} & 0 \\ 0 \ldots 0 & e^{(1)} \ldots e^{(n)} & 0 & e^{(n_1)} \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & u(a) & v(a) \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & u'(a) & v'(a) \end{pmatrix} \tag{5}$$

(по поводу доказательства существования вектор-функций $w^{(r)}$ см [1, § 17, лемма 2 и ее доказательство]). Положим

$$y^{(r)}=\begin{cases} w^{(r)} & (0\leqslant x<a;\ \ r=1,\ldots,2n+2),\\ 0 & (a\leqslant x<\infty;\ r=1,\ldots,2n),\\ u & (a\leqslant x<\infty;\ r=2n+1),\\ v & (a\leqslant x<\infty;\ r=2n+2).\end{cases} \tag{6}$$

Если $p\in L^2(a,\infty)$, то из построения вектор-функций $y^{(r)}$, условий 1), 2) доказываемой теоремы и предложения I) следует, что все $y^{(r)}$ принадлежат $\mathfrak{D}^*$.

Покажем, что $y^{(r)}$ $(r=1,\ldots,2n+2)$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{D}$.

В самом деле, пусть

$$\sum\nolimits_{r=1}^{2n+2} c_r y^{(r)}\in\mathfrak{D},$$

где c_r — постоянные комплексные числа. Тогда согласно III) имеют место равенства

$$\sum\nolimits_{r=1}^{2n+2} c_r y^{(r)}(0)=0,\ \ \sum\nolimits_{r=1}^{2n+2} c_r y'^{(r)}(0)=0, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sum\nolimits_{r=1}^{2n+2} c_r y^{(r)},\ y^{(s)}\right]=0. \tag{8}$$

Из (7), учитывая (4)—(6), находим

$$c_r=0\quad (r=1,\ldots,2n;\ r\neq n_1,\ n+n_1), \tag{9}$$
$$c_{n_1}+c_{2n+1}=0,\quad c_{n+n_1}+c_{2n+2}=0.$$

Полагая в (8) последовательно $s=2n+1,\ 2n+2$ и принимая во внимание (2), (4)—(6), получаем

$$-2imc_{2n+1}\lim_{x\to\infty}p^2q=0,\quad 2imc_{2n+2}\lim_{x\to\infty}p^2q=0.$$

Поэтому, если предел функции p^2q при $x\to\infty$ отличен от нуля, то

$$c_{2n+1}=0,\quad c_{2n+2}=0. \tag{10}$$

Из (9), (10) имеем

$$c_r=0\quad (r=1,\ldots,2n+2),$$

и утверждение а) теоремы 1, таким образом, доказано.

Докажем утверждение б).

Пусть $y^{(0)}=w$ при $0\leqslant x<a$, $y^{(0)}=u$ при $a\leqslant x<\infty$, где $w\in\mathfrak{D}_a^*$ и $w(a)=u(a)$, $w'(a)=u'(a)$. Если

$p \notin L^2(a, \infty)$, то и $\varphi^{(+)} \notin L^2(a, \infty)$, но $l(y^{(0)}) \in L_n^2(0, \infty)$. Обозначим через $z^{(1)}, \ldots, z^{(2n)}$ решения уравнения

$$l(z) = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$z^{(r)}(0) = e^{(r)}, \quad z'^{(r)}(0) = 0 \quad (r = 1, \ldots, n),$$

$$z^{(r)}(0) = 0, \quad z'^{(r)}(0) = e^{(r-n)} \; (r = n+1, \ldots, 2n).$$

Поскольку $l(y^{(0)})$ — локально интегрируемая по Лебегу на $(0, \infty)$ вектор-функция и $y^{(0)}$ является решением уравнения

$$l(z) = l(y^{(0)}), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

то, используя метод вариации произвольных постоянных, получаем

$$y^{(0)}(x) = \sum_{r=1}^{n}\left(c_r + \sum_{k=1}^{n}\int_0^x \hat{l}_k(t)\,\bar{z}_k^{(n+r)}(t)\,\mathrm{d}t\right) z^{(r)}(x) +$$
$$+ \sum_{r=n+1}^{2n}\left(c_r - \sum_{k=1}^{n}\int_0^x \hat{l}_k(t)\,\bar{z}_k^{(r-n)}(t)\,\mathrm{d}t\right) z^{(r)}(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{11}$$

где c_r — постоянные комплексные числа, $\hat{l}_k$ и $z_k^{(r)}$ — компоненты вектор-функций $l(y^{(0)})$ и $z^{(r)}$ соответственно. Если предположить, что индекс дефекта оператора $\mathscr{L}$ равен $\{2n, 2n\}$, то все $z_k^{(r)}$ принадлежат $L^2(0, \infty)$, и из (11) имеем при любом $j = n_1, \ldots, n_m$ оценку

$$|\varphi^{(+)}(x)| \leqslant c \sum_{r=1}^{2n} |z_j^{(r)}(x)|, \quad a \leqslant x < \infty,$$

где $c > 0$ — постоянное число. Но тогда $\varphi^{(+)} \in L^2(a, \infty)$. Полученное противоречие доказывает б).

Остановимся подробнее на случае, когда $n = 2$ и все элементы матрицы Q — действительнозначные функции.

Одним из следствий доказанной теоремы является

Следствие 1. *Пусть a — положительное действительное число, f, g и h — действительнозначные функции, определенные на $[a, \infty)$ и обладающие свойствами:*

1) *$f > 0$ на $[a, \infty)$;*

2) *f' и g абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a, b]$, $a < b < \infty$;*

3) *g имеет положительный предел при $x \to \infty$;*

4) *h интегрируема по Лебегу на каждом интервале (a, b), $a < b < \infty$;*

5) $g'f^{-1}$, $(q_{1,1}+h)f$, $(q_{2,2}+h)f \in L^2(a, \infty)$.

Пусть $n=2$ *и* $q_{1,2}=(f''-gf^{-3})f^{-1}+h$ *при* $a \leqslant x < \infty$. *Тогда*

а) *если* $f \in L^2(a, \infty)$, *то индекс дефекта операторв* $\mathscr{L}$ *есть* $\{3, 3\}$ *или* $\{4, 4\}$;

б) *если* $f \notin L^2(a, \infty)$, *то индекс дефекта оператора* $\mathscr{L}$ *есть* $\{2, 2\}$ *или* $\{3, 3\}$.

Доказательство. В силу 3) следствия 1, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать число a выбранным настолько большим, чтобы было $g > 0$ $(a \leqslant x < \infty)$. Считая это неравенство выполненным, для доказательства следствия 1 достаточно в теореме 1 взять $p=f$, $q=g^{1/2}f^{-2}$, $m=2$.

Можно показать на примерах, что все варианты утверждений следствия 1 могут иметь место в действительности.

Приведем простейший пример применения следствия 1.

Пример. Пусть $n=2$, a — положительное действительное число и при $0 \leqslant x < a$ элементы $q_{1,1}, q_{1,2}, q_{2,2}$ матрицы Q суть произвольные действительнозначные функции, интегрируемые по Лебегу на $(0, a)$, а при $a \leqslant x < \infty$ элементы $q_{1,1}, q_{1,2}, q_{2,2}$ определяются равенствами $q_{1,1}=q_{1,2}=q_{2,2}=-f_0$, где f_0 — действительнозначная функция, определенная на $[a, \infty)$ и обладающая свойствами:

1) $f_0 > 0$ на $[a, \infty)$;

2) f_0' абсолютно непрерывна на каждом сегменте $[a, b]$, $a < b < \infty$;

3) $f_0^{-1/4}$, $(f_0^{-1/4})'' \in L^2(a, \infty)$.

Требуется определить индекс дефекта оператора $\mathscr{L}$ с такой матрицей Q.

Так как вектор-функция $(1, -1)$, не принадлежащая $L_2^2(a, \infty)$, является решением уравнения $-y''+Qy=0$ $(a \leqslant x < \infty)$, то индекс дефекта $\mathscr{L}$ не может быть $\{4, 4\}$. Поэтому в силу а) следствия 1, если положить там $f = f_0^{-1/4}$, $g=2$, $h=f_0-(f_0^{-1/4})''f_0^{1/4}$, индекс дефекта оператора $\mathscr{L}$ равен $\{3, 3\}$.

Отметим, что частные случаи следствия 1 можно найти в [5].

Вернемся к общему случаю матрицы Q произвольного порядка n.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $n_1, \ldots, n_m$ — *попарно различные натуральные числа*, $1 \leqslant n_k \leqslant n$ $(k=1, \ldots, m)$,

a — положительное действительное число, а $p_1, \ldots, p_m$ и $q_1, \ldots, q_m$ — действительнозначные функции, определенные на $[a, \infty)$ и обладающие свойствами:

1) p_k' и q_k $(k = 1, \ldots, m)$ абсолютно непрерывны на каждом сегменте $[a, b]$, $a < b < \infty$;

2) функции

$$p_k, (p_k q_k)' + p_k' q_k, \; p_k'' - (q_k^2 + q_{n_k, n_k}) p_k,$$
$$p_k q_{j, n_k} \quad (j = 1, \ldots, n; \quad j \neq n_k)$$

при $k = 1, \ldots, m$ принадлежат $L^2(a, \infty)$.

Если при этом функция $p_k^2 q_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to \infty$, то сумма дефектных чисел l_1 и l_2 оператора $\mathcal{L}$ удовлетворяет неравенству $l_1 + l_2 \geqslant 2n + 2m$. В частности, если, кроме того, $m = n$, то индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ есть $\{2n, 2n\}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать [1, § 14], что в $\mathfrak{D}^*$ найдется $2n + 2m$ элементов, линейно независимых по модулю $\mathfrak{D}$.

Пусть

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x) &= p_k(x) \exp\left(i \int_a^x q_k(t)\, dt\right) \cdot e^{(n_k)}, \\ v^{(k)}(x) &= p_k(x) \exp\left(-i \int_a^x q_k(t)\, dt\right) \cdot e^{(n_k)} \end{aligned} \tag{12}$$

и пусть $w^{(r)}$ — вектор-функции из $\mathfrak{D}_a^*$, значения $w^{(r)}(0)$, $w'^{(r)}(0)$, $w^{(r)}(a)$ и $w'^{(r)}(a)$ $(r = 1, \ldots, 2n + 2m)$ которых определяются соответственно из 1-й, 2-й, 3-й и 4-й строк таблицы

$$\begin{pmatrix} e^{(1)} \cdots e^{(n)} & 0 \cdots 0 & e^{(n_1)} \cdots e^{(n_m)} & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & e^{(1)} \cdots e^{(n)} & 0 \cdots 0 & e^{(n_1)} \cdots e^{(n_m)} \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & u^{(1)}(a) \cdots u^{(m)}(a) & v^{(1)}(a) \cdots v^{(m)}(a) \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & u'^{(1)}(a) \cdots u'^{(m)}(a) & v'^{(1)}(a) \cdots v'^{(m)}(a) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Положим

$$y^{(r)} = \begin{cases} w^{(r)} & (0 \leqslant x < a; \quad r = 1, \ldots, 2n + 2m), \\ 0 & (a \leqslant x < \infty; \; r = 1, \ldots, 2n), \\ u^{(r-2n)} & (a \leqslant x < \infty; \; r = 2n + 1, \ldots, 2n + m), \\ v^{(r-2n-m)} & (a \leqslant x < \infty; \; r = 2n + m + 1, \ldots, 2n + 2m). \end{cases} \tag{14}$$

Из построения вектор-функций $y^{(r)}$, условий 1), 2) доказываемой теоремы и предложения I) следует, что все $y^{(r)}$ принадлежат $\mathfrak{D}^*$.

Покажем, что $y^{(r)}$ $(r = 1, \ldots, 2n + 2m)$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{D}$.

В самом деле, пусть

$$\sum_{r=1}^{2n+2m} c_r y^{(r)} \in \mathfrak{D},$$

где c_r — постоянные комплексные числа. Тогда согласно III) выполняются равенства

$$\sum_{r=1}^{2n+2m} c_r y^{(r)}(0) = 0, \quad \sum_{r=1}^{2n+2m} c_r y'^{(r)}(0) = 0, \tag{15}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\sum_{r=1}^{2n+2m} c_r y^{(r)}, y^{(s)}\right] = 0. \tag{16}$$

Из (15), учитывая (12)—(14), находим

$$c_r = 0 \quad (r = 1, \ldots, 2n;\ r \neq n_1, \ldots, n_m,\ n + n_1, \ldots, n + n_m),$$

$$c_{n_k} + c_{2n+k} = 0, \quad c_{n+n_k} + c_{2n+m+k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{17}$$

Полагая в (16) последовательно $s = 2n + k,\ 2n + m + k$ $(k = 1, \ldots, m)$ и принимая во внимание (2), (12)—(14), получаем

$$-2ic_{2n+k} \lim_{x\to\infty} p_k^2 q_k = 0,$$

$$2ic_{2n+m+k} \lim_{x\to\infty} p_k^2 q_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{18}$$

Так как по условию доказываемой теоремы при каждом $k = 1, \ldots, m$ предел функции $p_k^2 q_k$ при $x \to \infty$ отличен от нуля, то из (18) вытекают равенства

$$c_{2n+k} = 0, \quad c_{2n+m+k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{19}$$

Из (17), (19) имеем

$$c_r = 0 \quad (r = 1, \ldots, 2n + 2m),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть $n_1, \ldots, n_m$ — попарно различные натуральные числа, $1 \leqslant n_k \leqslant n$ $(k = 1, \ldots, m)$, a — положительное действительное число, а f_k, g_k, h_k $(k = 1, \ldots, m)$ — действительнозначные функции, определенные на $[a, \infty)$ и обладающие при каждом $k = 1, \ldots, m$ свойствами:*

1) $f_k > 0$ *на* $[a, \infty)$;

2) f_k' *и* g_k *абсолютно непрерывны на каждом сегменте* $[a, b]$, $a < b < \infty$;

3) g_k *имеет положительный предел при* $x \to \infty$;

4) *функции*

$$f_k, g_k' f_k^{-1}, h_k, f_k q_{j, n_k} \qquad (j = 1, \ldots, n;\ j \neq n_k)$$

принадлежат $L^2(a, \infty)$.

Если на $[a, \infty)$

$$q_{n_k, n_k} = (f_k'' - g_k f_k^{-3} + h_k) f_k^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

то сумма дефектных чисел l_1 *и* l_2 *оператора* $\mathcal{L}$ *удовлет во ряет неравенству* $l_1 + l_2 \geqslant 2n + 2m$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* a — *положительное действительное число, а* y — *определенная на* $[a, \infty)$ n-*мерная вектор-функция с комплекснозначными компонентами, имеющая абсолютно непрерывную 1-ю производную на каждом сегменте* $[a, b]$, $a < b < \infty$, *причем* $y \notin L_n^2(a, \infty)$ *и* $l(y) \in L_n^2(a, \infty)$. *Тогда индекс дефекта оператора* $\mathcal{L}$ *отличен от* $\{2n, 2n\}$. *В частности, если существуют постоянные комплексные числа* $c_1, \ldots, c_n$, *не все равные нулю, такие, что*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k q_{j, k} \in L^2(a, \infty) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

то индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ *отличен от* $\{2n, 2n\}$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству утверждения б) теоремы 1, являющегося частным случаем теоремы 3. При этом надо в доказательстве утверждения б) теоремы 1 заменить вектор-функцию u на указанную в теореме 3 вектор-функцию y.

В заключение приношу благодарность Б. М. Левитану за внимание к работе.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 11.12.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

[2] Калябин Г. А. О числе решений из $L_2(0, \infty)$ самосопряженной системы дифференциальных уравнений второго порядка // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, вып. 3. С. 74—76.

[3] Лидский В. Б. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $-y'' + P(t)\,y = \lambda y$ // ДАН СССР. 1954. Т. 95, № 2. С. 217—220.
[4] Серебряков В. П. О числе решений из пространства L_2 несамосопряженной системы дифференциальных уравнений 2-го порядка.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 1988. № 2. С. 3—8.
[5] Eastham M. S. P., Gould K. J. Square-integrable solutions of a matrix differential expression // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91, № 2. P. 424—433.
[6] Eastham M. S. P. Limit-circle differential expressions of the second order with an oscillating coefficient // Quart. J. Math., Oxford Ser. 1973. V. 24, № 94. P. 257—263.
[7] Мирзоев К. А. О случаях предельной точки и предельного круга // Математические заметки. 1985. Т. 37, вып. 5. С. 712—716.