

УДК 512.817+515.178.7

## О некоторых свободных алгебрах автоморфных форм\*

© 2018. Э. Б. ВИНБЕРГ

Доказывается, что при  $n = 8, 9, 10$  естественная алгебра автоморфных форм группы  $O_{2,n}^+(\mathbb{Z})$ , действующей в  $n$ -мерной симметрической области типа IV, свободна, и находятся веса ее образующих. Это расширяет результаты, полученные в предыдущей работе автора для  $n \leq 7$ . С другой стороны, как было доказано в недавней совместной работе автора и О. В. Шварцмана, для  $n > 10$  подобные алгебры автоморфных форм не могут быть свободными.

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3583>

### §1. Введение

**1.1.** Знаменитая теорема Шепарда–Тодда–Шевалле ([1], [2]) утверждает, что алгебра инвариантов конечной линейной группы  $\Gamma$ , действующей в комплексном векторном пространстве  $V$ , свободна тогда и только тогда, когда группа  $\Gamma$  порождается (комплексными) отражениями.

В качестве естественного бесконечного аналога конечной линейной группы может рассматриваться дискретная группа  $\Gamma$  автоморфизмов комплексной симметрической области  $\mathcal{D}$  с фундаментальной областью конечного объема, действующая в каком-либо эквивариантном  $\mathbb{C}^*$ -расслоении над  $\mathcal{D}$ . Здесь область  $\mathcal{D}$  выступает в качестве аналога проективного пространства  $PV$ , а тотальное пространство  $\mathbb{C}^*$ -расслоения — в качестве аналога проколотого векторного пространства  $V$ . Аналогом полиномиальных инвариантов конечной линейной группы здесь являются автоморфные формы (относительно рассматриваемого  $\mathbb{C}^*$ -расслоения).

Простое топологическое рассуждение (см. [3], а также [4, предложение 8.3]), применимое в равной мере к конечным линейным группам и дискретным группам голоморфных преобразований, показывает, что для того, чтобы алгебра автоморфных форм была свободна, необходимо, чтобы группа  $\Gamma$  порождалась отражениями. Нетрудно видеть, что отражения существуют только в двух сериях симметрических областей: в комплексных шарах и в симметрических областях типа IV в классификации Э. Картана.

Определение строения алгебры автоморфных форм является, вообще говоря, трудной задачей. Не считая размерности 1, до недавнего времени это было сделано лишь для небольшого числа групп, в основном в размерности 2. В предыдущей работе автора [5] было доказано, что при 4, 5, 6, 7 алгебра автоморфных форм группы  $O_{2,n}^+(\mathbb{Z})$ , действующей в  $n$ -мерной симметрической области типа IV, свободна, и были найдены веса ее образующих. В настоящей работе аналогичные результаты получаются для  $n = 8, 9, 10$ .

**1.2.** Перейдем теперь к точным формулировкам.

---

\*Эта работа была поддержана грантом РФФИ №16-01-00818.

Пусть  $\mathbb{R}^{2,n}$  — псевдоевклидово векторное пространство сигнатуры  $(2, n)$  со скалярным умножением

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - \cdots - x_{n+2}y_{n+2}.$$

Положим  $\mathbb{C}^{2,n} = \mathbb{R}^{2,n} \otimes \mathbb{C}$  и рассмотрим конус

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = \{z \in \mathbb{C}^{2,n} : (z, z) = 0, (z, \bar{z}) > 0\}.$$

Он имеет две комплексно-сопряженные связные компоненты. Пусть  $\mathcal{L}_n$  — одна из них и  $\mathcal{D}_n \subset \mathbb{C}P^n$  — ее проективизация.

Псевдоортогональная группа  $O_{2,n}$ , действующая естественным образом в  $\mathbb{C}^{2,n}$ , сохраняет конус  $\tilde{\mathcal{L}}_n$ . Ее подгруппа  $O_{2,n}^+$  индекса 2, сохраняющая компоненту  $\mathcal{L}_n$ , действует на  $\mathcal{D}_n$  транзитивно. Посредством этого действия область  $\mathcal{D}_n$  отождествляется с эрмитовым симметрическим пространством  $O_{2,n}^+/(SO_2 \times O_n)$  — симметрической областью типа IV. Одновременно мы получаем естественное  $O_{2,n}^+$ -эquivарантное голоморфное  $\mathbb{C}^*$ -расслоение

$$\pi: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{D}_n.$$

Предположим, что  $n \geq 3$ , и пусть  $\Gamma \subset O_{2,n}^+$  — дискретная подгруппа конечного кообъема. Для любого  $k \in \mathbb{Z}_+$   $\Gamma$ -инвариантные голоморфные функции на  $\mathcal{L}_n$ , однородные степени  $-k$  на каждом слое расслоения  $\pi$ , называются *автоморфными формами* веса  $k$  относительно группы  $\Gamma$ . Они образуют конечномерное векторное пространство  $A(\mathcal{D}_n, \Gamma)_k$ . Алгебра

$$A(\mathcal{D}_n, \Gamma) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A(\mathcal{D}_n, \Gamma)_k$$

называется *естественной алгеброй автоморфных форм* на  $\mathcal{D}_n$  относительно группы  $\Gamma$ .

Известно, что  $A(\mathcal{D}_n, \Gamma)$  — нормальная конечно порожденная градуированная алгебра, причем  $A(\mathcal{D}_n, \Gamma)_0 = \mathbb{C}$ . Аффинное алгебраическое многообразие  $\text{Spec } A(\mathcal{D}_n, \Gamma)$  содержит аналитический фактор  $\mathcal{L}_n/\Gamma$  в качестве открытого по Зарисскому подмножества, граница которого имеет размерность не более 2. Проективное алгебраическое многообразие  $\text{Proj } A(\mathcal{D}_n, \Gamma)$  — это так называемая компактификация Сатаке–Бейли–Бореля многообразия  $\mathcal{D}_n/\Gamma$  [6].

Настоящая статья посвящена алгебрам автоморфных форм групп  $\Gamma_n = O_{2,n}^+(\mathbb{Z})$ , состоящих из всех целочисленных матриц в  $O_{2,n}^+$ .

В 1962 г. Игуса [7] доказал, что алгебра четных модулярных форм Зигеля рода 2 свободно порождается формами весов 4, 6, 10, 12. Можно показать [8], что эта алгебра естественно изоморфна алгебре  $A(\mathcal{D}_3, \Gamma)$  для некоторой группы  $\Gamma \subset O_{2,3}^+$ , соизмеримой с  $\Gamma_3$  (хотя сама алгебра  $A(\mathcal{D}_3, \Gamma_3)$  не является свободной; см. [5, теорема 8]).

Используя интерпретацию факторпространств  $\mathcal{D}_n/\Gamma_n$  как пространств модулей подходящим образом мультиполяризованных  $K3$ -поверхностей, в предыдущей работе [5] автору удалось доказать, что при  $n = 4, 5, 6, 7$  алгебра  $A(\mathcal{D}_n, \Gamma_n)$  является свободной, и найти веса ее образующих. В настоящей работе эти результаты распространяются на значения  $n = 8, 9, 10$ . Для удобства читателя мы суммируем результаты этих двух работ в одной теореме.

**Теорема 1.** При  $4 \leq n \leq 10$  алгебра  $A(\mathcal{D}_n, \Gamma_n)$  свободно порождается формами весов, указанных в следующей таблице:

$n$	Весы
4	4, 6, 8, 10, 12
5	4, 6, 8, 10, 12, 18
6	4, 6, 8, 10, 12, 16, 18
7	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18
8	4, 6, 8, 10, 12, 12, 14, 16, 18
9	4, 6, 8, 10, 10, 12, 12, 14, 16, 18
10	4, 6, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 14, 16, 18

Отметим, что при  $n > 10$  алгебра  $A(\mathcal{D}_n, \Gamma)$  не может быть свободной ни для какой арифметической группы  $\Gamma \subset O_{2,n}^+$  с некомпактным фактором [9].

Как было доказано в [5, теорема 3], для любого  $n \geq 3$  естественные вложения  $\mathcal{L}_n \hookrightarrow \mathcal{L}_{n+1}$  and  $\Gamma_n \hookrightarrow \Gamma_{n+1}$  индуцируют эпиморфизм градуированных алгебр

$$A(\mathcal{D}_{n+1}, \Gamma_{n+1}) \rightarrow A(\mathcal{D}_n, \Gamma_n).$$

Из рассмотрения предыдущей таблицы ясно, что ядро этого эпиморфизма есть главный идеал алгебры  $A(\mathcal{D}_{n+1}, \Gamma_{n+1})$ , порожденный образующей веса 18, 16, 14, 12, 10, 8 при  $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$  соответственно.

Для явного описания пространств модулей мультиполяризованных  $K3$ -поверхностей в работе [5] использовались их проективные модели в виде квартик в  $\mathbb{C}P^3$ . К сожалению,  $K3$ -поверхности, рассматриваемые в настоящей работе, подобными моделями не обладают. Поэтому нам приходится работать с их проективными моделями в  $\mathbb{C}P^5$ , не являющимися полными пересечениями.

**1.3.** Я благодарен В. В. Никулину и Вик. С. Куликову за ценные консультации и, в особенности, И. В. Долгачеву, указавшему мне на проективные модели  $K3$ -поверхностей в свитках. Я также благодарю Е. С. Стукен, осуществившую весьма убедительную косвенную проверку результата настоящей работы для  $n = 10$ , основанную на формуле Брюинье.

## §2. Некоторые квадратичные решетки и их корни

**2.1.** Введем некоторые обозначения и напомним некоторые факты, относящиеся к квадратичным решеткам. Более подробное изложение этих вопросов см. в [5, §1].

Мы будем обозначать через  $I_{k,l}$  квадратичную решетку ранга  $n = k + l$  с ортогональным базисом  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , для которого

$$(e_1, e_1) = \dots = (e_k, e_k) = 1, \quad (e_{k+1}, e_{k+1}) = \dots = (e_n, e_n) = -1.$$

Это нечетная унимодулярная квадратичная решетка. Если  $k, l > 0$ , то всякая нечетная унимодулярная квадратичная решетка сигнатуры  $(k, l)$  изоморфна решетке  $I_{k,l}$ .

Через  $D_{k,l}$ , мы будем обозначать четную подрешетку решетки  $I_{k,l}$  (состоящую из векторов, сумма координат которых четна). В частности,  $D_{n,0}$  — это корневая решетка типа  $D_n$ .

Если  $k \equiv l \pmod{8}$ , то группа, порожденная решеткой  $D_{k,l}$  и вектором

$$\sigma = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_n) \in I_{k,l} \otimes \mathbb{Q},$$

является четной унимодулярной квадратичной решеткой. Мы будем обозначать ее через  $J_{k,l}$ . Если  $k, l > 0$ , то всякая четная унимодулярная квадратичная решетка сигнатуры  $(k, l)$  изоморфна решетке  $J_{k,l}$ . Решетка  $J_{8,0}$  есть корневая решетка типа  $E_8$ .

Если  $k - l \not\equiv 4 \pmod{8}$ , то решетка  $I_{k,l}$  является единственным нечетным расширением решетки  $D_{k,l}$ , откуда следует, что группы автоморфизмов (ортгональных преобразований) этих решеток совпадают. Если  $k \equiv l \pmod{8}$ , то решетка  $D_{k,l}$  обладает единственным четным расширением (изоморфным  $J_{k,l}$ ).

Пусть  $p \equiv q \pmod{8}$  и  $k < p, l < q$ . С точностью до перестановки базисных векторов

$$I_{k,l} \oplus I_{p-k,q-l} = I_{p,q}.$$

Это определяет вложение

$$D_{k,l} \oplus D_{p-k,q-l} \subset D_{p,q} \subset J_{p,q}$$

и, тем самым, вложение решетки  $D_{k,l}$  в виде примитивной подрешетки в решетку  $J_{p,q}$ . Такое вложение однозначно с точностью до автоморфизма решетки  $J_{p,q}$  ([10, теорема 1.14.4], [5, предложение 5]).

**2.2.** Примитивный вектор  $\alpha$  квадратичной решетки  $L$  называется *k-корнем*, если  $(\alpha, \alpha) = -k < 0$  и отражение

$$R_\alpha : x \mapsto x + \frac{2(\alpha, x)}{k} \alpha$$

сохраняет решетку  $L$ . Последнее условие автоматически выполняется, если  $k = 1$  или  $2$ . Если решетка  $L$  унимодулярна, то все ее корни таковы.

В настоящей работе мы будем рассматривать только 2-корни и называть их просто корнями. Группу, порожденную соответствующими им отражениями, будем обозначать через  $W(L)$ . Это нормальная подгруппа группы  $O(L)$  всех автоморфизмов решетки  $L$ .

Квадратичная решетка сигнатуры  $(1, m)$  называется *гиперболической*. Для гиперболической решетки  $L$  положим

$$\mathbb{R}^{1,m} = L \otimes \mathbb{R}, \quad \tilde{C}_m = \{x \in \mathbb{R}^{1,m} : (x, x) > 0\}$$

и обозначим через  $C_m$  «конус будущего» — одну из связных компонент конуса  $\tilde{C}_m$ . Гиперболоид

$$H^m = \{x \in C_m : (x, x) = 1\}$$

является моделью  $m$ -мерного пространства Лобачевского. Группой движений пространства  $H^m$  в этой модели является подгруппа  $O_{1,m}^+$  индекса 2 группы Лоренца  $O_{1,m}$ , сохраняющая конус  $C_m$ . Группа

$$O^+(L) = O(L) \cap O_{1,m}^+$$

является дискретной группой движений пространства  $H^m$ , имеющей фундаментальную область конечного объема.

Группа  $W(L)$ , действующая в  $H^m$ , порождается отражениями в смысле геометрии Лобачевского. Пусть  $P(L)$  — фундаментальный многогранник этой группы в пространстве  $H^m$ . Конус над ним является фундаментальным конусом для действия группы  $W(L)$  в  $C_m$ . Обозначим через  $A(L)$  его замыкание в

пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,m}$ . Корни, ортогональные его стенкам и смотрящие наружу, называются *простыми 2-корнями* решетки  $L$ , а соответствующие отражения — *простыми отражениями*.

**2.3.** Для доказательства основной теоремы настоящей работы нам нужны простые корни решетки  $D_{1,m}$  при  $m = 9, 10, 11$ . Они легко могут быть найдены при помощи алгоритма, описанного в [11].

Заметим для начала, что, как следует из сказанного выше, при  $m \not\equiv 5 \pmod{8}$  (а других  $m$  мы и не будем рассматривать)  $O(D_{1,m}) = O(I_{1,m})$  и, значит,  $W(D_{1,m}) = W(I_{1,m})$ .

Пусть  $\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$  — стандартный базис решетки  $I_{1,m}$  и  $x_0, x_1, \dots, x_m$  — координаты относительно этого базиса. В качестве базисной точки алгоритма возьмем  $e_0$ . Стабилизатором этой точки в  $W(I_{1,m})$  является конечная группа отражений типа  $D_m$ , переставляющая координаты  $x_1, \dots, x_m$  и умножающая четное число этих координат на  $-1$ . В качестве ее фундаментального конуса можно взять конус, задаваемый неравенствами

$$x_1 \geq \dots \geq x_{m-1} \geq |x_m|.$$

Соответствующие простые корни — это

$$\alpha_i = -e_i + e_{i+1} \quad (i = 1, \dots, m-1), \quad \alpha_m = -e_{m-1} - e_m.$$

На следующем шаге алгоритма мы должны выбрать корень  $\alpha_{m+1}$ , удовлетворяющий условиям

$$(\alpha_{m+1}, e_0) \geq 0, \quad (\alpha_{m+1}, \alpha_i) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

для которого скалярное произведение  $(\alpha_{m+1}, e_0)$  (т. е. координата  $x_0$ ) как можно меньше. Таким корнем является

$$\alpha_{m+1} = e_0 + e_1 + e_2 + e_3.$$

Схема Кокстера найденных корней изображена на рис. 1. Анализируя ее, мы видим, что при  $m = 9$  она определяет симплекс конечного объема с одной бесконечно удаленной вершиной типа  $\tilde{D}_8$  и двумя бесконечно удаленными вершинами типа  $\tilde{E}_8$ , так что в этом случае простые корни исчерпываются уже найденными. Можно показать, что при  $m = 10$  имеется еще бесконечно много простых корней (т. е. фундаментальный многогранник группы  $W(I_{1,10})$  имеет бесконечный объем), а при  $m = 11$  имеется еще два простых корня. Однако для нас будет достаточно уже найденных корней.

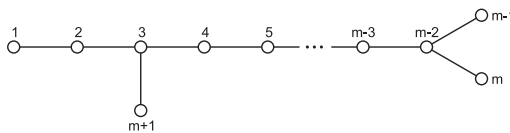


Рис. 1

### §3. Мультиполяризованные $K3$ -поверхности

**3.1.** Напомним, что группа гомологий  $H_2(X, \mathbb{Z})$  любой  $K3$ -поверхности  $X$  есть четная унимодулярная квадратичная решетка, изоморфная решетке  $J_{3,19}$ . Решетка  $S(X)$  алгебраических циклов (группа Пикара) поверхности  $X$  является примитивной гиперболической подрешеткой в  $H_2(X, \mathbb{Z})$  сигнатуры  $(1, m)$ . Ее ортогональное дополнение  $T(X)$  в  $H_2(X, \mathbb{Z})$ , называемое *решеткой трансцендентных циклов*, имеет сигнатуру  $(2, n)$ , где  $n = 19 - m$ .

При подходящем выборе конуса будущего  $C_m$  и фундаментального многогранника  $P(S(X))$  группы  $W(S(X))$  в пространстве Лобачевского  $H^m$  простым корням отвечают гладкие рациональные кривые на поверхности  $X$ , а примитивным изотропным векторам решетки  $S(X)$ , лежащим на границе конуса  $A(S(X))$  (соответствующим бесконечно удаленным вершинам многогранника  $P(S(X))$ ), — эллиптические пучки на  $X$ .

В дальнейшем мы будем для краткости писать  $W(X)$ ,  $P(X)$  и  $A(X)$  вместо  $W(S(X))$ ,  $P(S(X))$  и  $A(S(X))$ .

Пусть  $h \in A(X)$  — примитивный вектор решетки  $S(X)$  с  $(h, h) = d > 0$ , удовлетворяющий следующему дополнительному условию:

(\*) не существует изотропных векторов  $u$  в  $S(X) \cap A(X)$ , для которых  $(h, u) = 1$  или  $2$ .

Тогда соответствующая линейная система определяет бирациональный морфизм

$$\varphi_h: X \rightarrow Y \subset \mathbb{C}P^g, \quad \text{где } 2g - 2 = d,$$

на нормальное проективное многообразие  $Y$  степени  $d$ , стягивающий в точку все гладкие рациональные кривые, отвечающие простым корням, ортогональным  $h$ , и являющийся изоморфизмом вне них [13]. По этой причине мы будем называть конус  $A(X)$  *конусом обильных дивизоров* (хотя не все классы дивизоров, принадлежащие этому конусу, обильны).

Напомним также, что на каждой  $K3$ -поверхности  $X$  имеется единственная с точностью до пропорциональности регулярная дифференциальная 2-форма  $\omega$ , нигде не обращающаяся в нуль (*симплектическая форма*). Пару  $(X, \omega)$  мы будем называть *нормированной  $K3$ -поверхностью*.

*Отображение периодов* (интегрирование по трансцендентным циклам) позволяет рассматривать форму  $\omega$  как элемент пространства  $\mathbb{C}^{2,n} = T(X) \otimes \mathbb{C}$ . Более того,  $\omega \in \mathcal{L}_n$  при подходящем выборе связной компоненты  $\mathcal{L}_n$  конуса  $\tilde{\mathcal{L}}_n \subset \mathbb{C}^{2,n}$  (см. обозначения в разд. 1.2).

**3.2.** Фиксируем некоторую примитивную гиперболическую подрешетку  $S_0 \subset J_{3,19}$  сигнатуры  $(1, m)$  и примитивный вектор  $h_0 \in S_0$  с  $(h_0, h_0) = d > 0$ . Обозначим через  $T_0$  ортогональное дополнение к  $S_0$  в  $J_{3,19}$ .

Назовем *мультиполяризацией типа  $(S_0, h_0)$*   $K3$ -поверхности  $X$  пару, состоящую из подрешетки  $S \subset S(X)$  и вектора  $h \in S \cap A(X)$ , которые при некотором изоморфизме  $\varphi: H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow J_{3,19}$  переходят в  $S_0$  и  $h_0$  соответственно. Такой изоморфизм  $\varphi$  (если он существует) определен однозначно с точностью до умножения слева на преобразование из группы  $O^+(J_{3,19})$ , сохраняющее  $S_0$  и  $h_0$  (или, эквивалентно,  $T_0$  и  $h_0$ ). Обозначим через  $O^+(T_0, h_0)$  группу, образованную ограничениями таких преобразований на  $T_0$ .

Симплектическая форма  $\omega$  на мультиполяризованной  $K3$ -поверхности  $X$  при изоморфизме  $\varphi$  переходит в вектор пространства  $T_0 \otimes \mathbb{C}$ , определенный с точностью до действия группы  $O^+(T_0, h_0)$ .

Будем называть тип  $(S_0, h_0)$  мультиполяризации *допустимым*, если выполнено следующее условие:

(\*\*) ни в какой гиперболической подрешетке  $S \subset J_{3,19}$ , содержащей  $S_0$ , нет изотропного вектора  $u$ , для которого  $(h_0, u) = 1$  или  $2$ .

В этом случае пространством модулей нормированных мультиполяризованных  $K3$ -поверхностей типа  $(S_0, h_0)$  является фактор  $\mathcal{L}_n/O^+(T_0, h_0)$  и соответственно пространством модулей  $K3$ -поверхностей типа  $(S_0, h_0)$  является фактор  $\mathcal{D}_n/O^+(T_0, h_0)$  [5]. Группу  $O^+(T_0, h_0)$  мы будем называть *модулярной группой* типа  $(S_0, h_0)$ .

Мультиполяризованные  $K3$ -поверхности  $X$ , для которых  $S = S(X)$ , будем называть *иррациональными*. В пространстве модулей множество таких поверхностей есть дополнение ко всюду плотному объединению счетного числа алгебраических гиперповерхностей.

**Замечание 1.** В определении мультиполяризации выбор вектора  $h_0$  существен лишь с точностью до автоморфизма решетки  $S_0$ , продолжающегося до автоморфизма решетки  $J_{3,19}$ , тождественного на ортогональном дополнении. В частности, если решетка  $S_0$  2-элементарна, то за счет умножения на  $-1$  можно добиться того, чтобы вектор  $h_0$  принадлежал выбранному конусу будущего. В любом случае, если вектор  $h_0$  принадлежит конусу будущего, за счет отражений решетки  $S_0$  можно добиться того, чтобы он принадлежал выбранному фундаментальному конусу  $A(S_0)$  группы  $W(S_0)$ .

## §4. Выбор мультиполяризации

4.1. Пусть  $D_{1,9} \subset J_{3,19}$  — стандартное вложение, описанное в разд. 1.1, и

$$h_0 = 4e_0 + e_1 + \dots + e_8 \in D_{1,9}. \quad (1)$$

Имеем  $(h_0, h_0) = 8$ . Скалярные произведения вектора  $h_0$  с простыми корнями указаны на рис. 2 (отсутствие метки означает нуль).

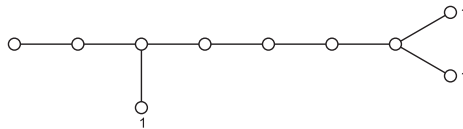


Рис. 2

**Лемма 2** (ср. [5, предложение 8]). *Ни в какой гиперболической подрешетке  $S \subset J_{3,19}$ , содержащей  $D_{1,9}$ , нет изотропного вектора  $u$ , для которого  $(h_0, u) = 1$  или  $2$ .*

**Доказательство.** Докажем вначале, что такого вектора нет в самой решетке  $D_{1,9}$ . Согласно [5, лемма 2], для этого достаточно проверить примитивные изотропные векторы конуса  $A(D_{1,9})$ . Таких векторов три. Один из них соответствует параболической подсхеме типа  $\tilde{D}_8$  схемы Кокстера, два других — двум симметричным параболическим подсхемам типа  $\tilde{E}_8$ . Обозначим их через  $u_0$ ,

$u_1$  и  $u_2$ . Изотропный вектор, отвечающий параболической подсхеме, является линейной комбинацией участвующих в ней простых корней с коэффициентами, равными коэффициентам линейной зависимости соответствующей расширенной системы простых корней [12, разд. 1.9]. Пользуясь этим, находим, что

$$(h_0, u_0) = 3, \quad (h_0, u_1) = (h_0, u_2) = 4.$$

Далее, пусть  $u \in J_{3,19}$  — изотропный вектор, не принадлежащий решетке  $D_{1,9}$ , но принадлежащий некоторой гиперболической решетке  $S \subset J_{3,19}$ , содержащей  $D_{1,9}$ . Предположим, что  $(h_0, u) = 1$  или  $2$ , и пусть  $u'$  — ортогональная проекция вектора  $u$  на  $D_{1,9} \otimes \mathbb{Q}$ . Тогда

$$(h_0, u') = (h_0, u), \quad (u', u') > 0.$$

Кроме того, вектор  $u'$  содержится в решетке, сопряженной решетке  $D_{1,9}$ , и, значит,  $2u' \in D_{1,9}$ , откуда следует, что

$$(u', u') \geq 1/2.$$

Рассмотрим определитель Грама векторов  $h_0$  и  $u'$ . Из полученных неравенств следует, что он неотрицателен. Так как  $D_{1,9}$  — решетка сигнатуры  $(1, 9)$ , то это возможно, только если векторы  $h_0$  и  $u$  пропорциональны и их определитель Грама равен нулю. В последнем случае должно быть  $(u', u') = 1/2$ , так что  $h_0 = 4u' \in 2D_{1,9}$ ; но очевидно, что это неверно.  $\square$

Таким образом, мультиполяризация типа  $(D_{1,9}, h_0)$  допустима. Ортогональным дополнением к решетке  $D_{1,9}$  в  $J_{3,19}$  является решетка  $D_{2,10}$ .

**4.2.** Найдем теперь модулярную группу  $O^+(D_{2,10}, h_0)$ .

**Предложение 1.**  $O^+(D_{2,10}, h_0) = O^+(D_{2,10})(= O^+(I_{2,10}))$ .

**Доказательство.** Автоморфизмы  $\sigma$  и  $\rho$  решеток  $O(D_{2,10})$  и  $O(D_{1,9})$  «склеиваются» в автоморфизм решетки  $J_{3,19}$  тогда и только тогда, когда они одинаковым образом действуют на общей дискриминантной группе  $\mathfrak{D}$  этих решеток [5, предложение 4]. Группа  $\mathfrak{D}$  есть четверная группа Клейна. Два ее ненулевых элемента, скажем,  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , отвечают двум (изоморфным) четным расширениям соответствующей решетки, а третий отвечает единственному нечетному расширению. Автоморфизм  $\sigma$  может либо действовать тривиально на  $\mathfrak{D}$ , либо переставлять  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . В первом случае в качестве  $\rho$  можно взять тождественный автоморфизм решетки  $D_{1,9}$ , а во втором — автоморфизм, переставляющий простые корни  $\alpha_8$  и  $\alpha_9$ , т. е. умножающий  $e_9$  на  $-1$ . В любом случае мы получим, что  $\rho(h_0) = h_0$ .  $\square$

Итак, пространством модулей нормированных мультиполяризованных КЗ-поверхностей типа  $(D_{1,9}, h_0)$  является фактор  $\mathcal{L}_{10}/\Gamma_{10}$ , где  $\Gamma_{10} = O_{2,10}^+(\mathbb{Z})$ . Это «большое» открытое по Зарисскому подмножество аффинного многообразия  $\text{Spec } A(\mathcal{D}_{10}, O_{2,10}^+(\mathbb{Z}))$  в том смысле, что его граница не содержит дивизоров (на самом деле она двумерна).

## §5. Проективная модель

**5.1.** Напомним вначале необходимые нам сведения о векторных расслоениях над проективной прямой  $\mathbb{C}P^1$ . Мы будем рассматривать  $\mathbb{C}P^1$  как однородное пространство  $\text{SL}_2/B$ , где  $\text{SL}_2 = \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , а  $B \subset \text{SL}_2$  — борелевская подгруппа, состоящая из треугольных матриц.

Опишем сначала линейные расслоения. Всякое линейное расслоение над  $\mathbb{C}P^1$  однородно (в том смысле, что действие группы  $SL_2$  на базе поднимается до ее действия автоморфизмами расслоения) и, значит, определяется характером группы  $B$ , задающим ее действие в слое над базисной точкой. Линейное расслоение, отвечающее  $k$ -й степени первого диагонального элемента, обозначим через  $E(k)$ .

При  $k > 0$  регулярные функции на  $E(k)$ , линейные на слоях, задают  $SL_2$ -эквивариантный бирациональный морфизм  $\Phi$  многообразия  $E(k)$  на замкнутое подмногообразие  $\mathfrak{S}(k)$  пространства неприводимого представления группы  $SL_2$  со старшим весом  $k$ , а именно, на  $SL_2 H$ , где  $H$  — одномерное подпространство, натянутое на старший вектор представления. Этот морфизм стягивает в точку нулевое сечение расслоения и является изоморфизмом вне него. При  $k = 0$  расслоение является прямым произведением  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^1$  и  $\Phi$  есть проекция на второй множитель. При  $k < 0$  ненулевых регулярных функций, линейных на слоях, не существует.

По теореме Гротендика всякое векторное расслоение над  $\mathbb{C}P^1$  есть прямая сумма линейных расслоений. Рассмотрим расслоение  $E(k_1, \dots, k_s) = E(k_1) \oplus \dots \oplus E(k_s)$ , где  $k_1, \dots, k_s \geq 0$ , причем не все  $k_1, \dots, k_s$  равны нулю. Регулярные функции на  $E(k_1, \dots, k_s)$ , линейные на слоях, задают  $SL_2$ -эквивариантный бирациональный морфизм  $\Phi$  многообразия  $E(k_1, \dots, k_s)$  на замкнутое подмногообразие  $\mathfrak{S}(k_1, \dots, k_s)$  прямой суммы пространств неприводимых представлений группы  $SL_2$  со старшими весами  $k_1, \dots, k_s$ , а именно, на  $SL_2 H$ , где  $H$  — подпространство, натянутое на старшие векторы этих представлений. Слои расслоения  $E(k_1, \dots, k_s)$  при этом переходят в  $s$ -мерные подпространства  $gH$  ( $g \in SL_2$ ), пересекающиеся по подпространству  $SL_2$ -инвариантных векторов, размерность которого равна количеству нулей среди чисел  $k_1, \dots, k_s$ . Это подпространство является множеством особых точек многообразия  $\mathfrak{S}(k_1, \dots, k_s)$ .

Проективизация  $P\mathfrak{S}(k_1, \dots, k_s)$  многообразия  $\mathfrak{S}(k_1, \dots, k_s)$  называется *свитком* (в англоязычной литературе scroll) типа  $(k_1, \dots, k_s)$ . Это нормальное  $s$ -мерное проективное многообразие степени  $k_1 + \dots + k_s + s - 1$ ; его идеал порождается квадратичным формами (см., например, [14]). Само многообразие  $\mathfrak{S}(k_1, \dots, k_s)$  мы будем называть *линейным свитком*, в отличие от *проективного свитка*  $P\mathfrak{S}(k_1, \dots, k_s)$ , а подпространства  $gH$  ( $g \in SL_2$ ) (соответственно их проективизации) — *слоями свитка*  $\mathfrak{S}(k_1, \dots, k_s)$  (соответственно  $P\mathfrak{S}(k_1, \dots, k_s)$ ).

**5.2.** Пусть теперь  $(X, S, h)$  — мультиполяризованная  $K3$ -поверхность типа  $(D_{1,9}, h_0)$ , где  $h_0 \in D_{1,9}$  — вектор, заданный формулой (1). Допуская некоторую вольность, мы будем отождествлять решетку  $S$  с подрешеткой  $D_{1,9} \subset J_{3,19}$  и вектор  $h$  с вектором  $h_0$ . Согласно сказанному в разд. 3.1, линейная система  $|h|$  определяет бирациональный морфизм

$$\varphi_h: X \rightarrow Y \subset \mathbb{C}P^5$$

на нормальное проективное многообразие  $Y$  степени 8, имеющее только простые особенности.

Рассмотрим сначала случай, когда данная мультиполяризация иррациональна, т. е.  $S = S(X)$ .

Обозначим через  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) гладкую рациональную кривую на  $X$ , отвечающую простому корню  $\alpha_i$  решетки  $S$ . Скалярные произведения  $(h, \alpha_i)$ ,

представленные на рис. 2, показывают, что кривые  $C_1, \dots, C_7$  стягиваются в некоторую точку  $o \in Y$ , являющуюся единственной особой точкой (типа  $A_7$ ) поверхности  $Y$ , а кривые  $C_8, C_9, C_{10}$  отображаются на какие-то три прямые  $l_1, l_2, l_3 \subset Y$ , пересекающиеся в точке  $o$ . Других прямых или коник поверхность  $Y$  не содержит.

Бесконечно удаленной вершине многогранника  $P(S)$  типа  $\tilde{D}_8$  соответствует изотропный вектор

$$u_0 = \alpha_{10} + \alpha_2 + 2(\alpha_3 + \dots + \alpha_7) + \alpha_8 + \alpha_9 \in S = e_0 + e_1.$$

Линейная система  $|u_0|$  задает структуру эллиптического пучка на  $X$  с особым слоем типа  $\tilde{D}_8$ . Так как  $(u_0, \alpha_1) = 1$ , то кривая  $C_1$  является сечением этого пучка.

Так как  $(h, u_0) = 3$ , то общие слои этого эллиптического пучка отображаются на неприводимые кривые степени 3 в  $\mathbb{C}P^5$  (проходящие через точку  $o$ ). По соображениям размерности эти кривые должны быть плоскими, т. е. принадлежать проективизациям каких-то трехмерных подпространств пространства  $\mathbb{C}^6$ . Отсюда следует, что и образ любого слоя содержится в некоторой плоскости. Это определяет некоторое трехмерное векторное расслоение  $E(k_1, k_2, k_3)$  над  $\mathbb{C}P^1$  вместе с морфизмом

$$\Phi: E(k_1, k_2, k_3) \rightarrow \mathfrak{S}(k_1, k_2, k_3) \subset \mathbb{C}^6,$$

линейным на слоях расслоения. Проективизация морфизма  $\Phi$  является продолжением морфизма  $\varphi_h$ . Таким образом,  $Y \subset P\mathfrak{S}(k_1, k_2, k_3)$ , причем образы слоев рассматриваемого эллиптического пучка на  $X$  суть пересечения поверхности  $Y$  со слоями свитка  $P\mathfrak{S}(k_1, k_2, k_3)$ .

Допуская вольность речи, мы будем говорить об эллиптическом пучке на  $Y$ , понимая под его слоями образы слоев эллиптического пучка на  $X$  (но имея в виду, что они все пересекаются в точке  $o$ ). Отметим, что общие слои этого пучка являются неособыми кубиками в соответствующих плоскостях, так как иначе они были бы рациональны.

Идеал поверхности  $Y \subset \mathbb{C}P^5$  порождается квадратичными формами, порождающими идеал свитка, и какими-то кубическими формами, не равными тождественно нулю на свитке [14]. Если  $F$  — одна из таких кубических форм, то уравнение  $F = 0$  задает в свитке поверхность степени 9, являющуюся объединением поверхности  $Y$  и какой-то «лишней» плоскости  $\Pi$ , зависящей от выбора формы  $F$ .

**5.3.** Найдем теперь тип  $(k_1, k_2, k_3)$  определенного в разд. 5.2 свитка.

**Предложение 2.** *С точностью до перестановки*

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 1, 2).$$

**Доказательство.** Так как поверхность  $Y$  не содержится ни в какой гиперплоскости пространства  $\mathbb{C}P^5$ , то свиток  $\mathfrak{S}(k_1, k_2, k_3)$  порождает пространство  $\mathbb{C}^6$ . Это означает, что  $k_1 + k_2 + k_3 = 3$ .

Далее, так как образы всех слоев эллиптического пучка содержат точку  $o$ , то все слои свитка  $\mathfrak{S}(k_1, k_2, k_3)$  содержат соответствующее этой точке одномерное подпространство. Следовательно, среди чисел  $k_1, k_2, k_3$  имеется хотя бы один ноль. Это оставляет следующие возможности:

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 1, 2) \quad \text{или} \quad (0, 0, 3).$$

Покажем, что на самом деле имеет место первый из этих случаев.

Предположим, что  $Y \subset P\mathfrak{S}(0, 0, 3)$ , т. е. представление группы  $SL_2$  в пространстве  $\mathbb{C}^6$  есть сумма двух тривиальных одномерных представлений и представления в пространстве кубических бинарных форм. Условием принадлежности вектора линейному свитку  $\mathfrak{S}(0, 0, 3)$  является то, что его последняя компонента есть куб линейной формы. Все слои свитка  $\mathfrak{S}(0, 0, 3)$  содержат сумму одномерных компонент представления.

Рассмотрим 5-мерное подпространство  $U \subset \mathbb{C}^6$ , задаваемое условием, что последняя компонента вектора (являющаяся кубической формой на  $\mathbb{C}^2$ ) равна нулю на каком-то фиксированном ненулевом векторе  $v \in \mathbb{C}^2$ . Его пересечение со свитком  $\mathfrak{S}(0, 0, 3)$  есть трехмерное подпространство, состоящее из векторов, последняя компонента которых пропорциональна кубу некоторой фиксированной линейной формы (равной нулю на  $v$ ), т. е. это некоторый слой свитка  $\mathfrak{S}(0, 0, 3)$ . Соответственно пересечение  $PU \cap P\mathfrak{S}(0, 0, 3)$  есть некоторый слой  $P$  проективного свитка (являющийся плоскостью), а пересечение  $P \cap Y$  есть некоторый слой эллиптического пучка. Выбрав вектор  $v$  подходящим образом, мы можем считать, что это общий слой, т. е.  $P \cap Y$  есть неприводимая кубика.

Пусть теперь  $F$  — кубическая форма из идеала поверхности  $Y$ , не обращающаяся тождественно в нуль на свитке  $P\mathfrak{S}(0, 0, 3)$ . Уравнение  $F = 0$  задает в свитке объединение поверхности  $Y$  и какой-то плоскости  $\Pi$ . За счет выбора формы  $F$  в идеале добьемся того, чтобы  $\Pi \neq P$ . Тогда уравнение  $F = 0$  будет задавать в плоскости  $P$  объединение пересечений  $P \cap Y$  и  $P \cap \Pi$ . Первое из них есть неприводимая кубика в  $P$ , а второе совпадает с пересечением  $PU \cap \Pi$  и, значит, является прямой. Это противоречит тому, что  $\deg F = 3$ . Таким образом, случай  $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 3)$  невозможен.  $\square$

**5.4.** Так как решетка  $S$  является 2-элементарной, имеется антисимплектическая инволюция  $\sigma$  поверхности  $X$ , действующая на  $S = S(X)$  тождественно, а на  $T = T(X)$  умножением на  $-1$ . Она определяет проективную инволюцию поверхности  $Y$ , которую мы будем обозначать той же буквой.

Инволюция  $\sigma$ , действуя на  $X$ , переводит в себя каждую гладкую рациональную кривую. Следовательно, точки пересечения этих кривых неподвижны. Так как всякий нетривиальный инволютивный автоморфизм проективной прямой имеет ровно две неподвижные точки и инволюция  $\sigma$ , будучи антисимплектической, не может действовать тривиально на двух пересекающихся кривых, то  $\sigma$  действует тривиально на кривых  $C_1, C_3, C_5, C_7$  и нетривиально на  $C_2, C_4, C_6, C_8, C_9, C_{10}$ .

Введем на общих слоях эллиптического пучка структуру группы, приняв за единицу точку пересечения с кривой  $C_1$ . Тогда  $\sigma$  будет действовать на каждом слое как инверсия, а на его образе в  $Y$  — как проективная инволюция, для которой точка  $o$  является изолированной неподвижной точкой. Так как поверхность  $Y$  не содержится ни в какой гиперплоскости пространства  $\mathbb{C}P^5$ , то отсюда следует, что точка  $o$  является изолированной неподвижной точкой инволюции  $\sigma$  во всем пространстве  $\mathbb{C}P^5$ . Иначе говоря,  $\sigma$  индуцируется линейным преобразованием с матрицей  $\text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1, 1)$  в каком-то базисе, первый вектор которого соответствует точке  $o$ .

**5.5.** Посмотрим теперь, что может измениться, если решетка  $S(X)$  будет строго больше, чем  $D_{1,9}$ .

Стабилизатор точки  $e_0$  в группе  $W(X)$  в любом случае содержит конечную группу отражений типа  $D_9$  и, следовательно, является прямым произведением группы типа  $D_p$  ( $p \geq 9$ ), содержащей группу  $D_9$ , и, возможно, какой-то еще конечной группы отражений. При этом корни  $\alpha_1, \dots, \alpha_8$  могут быть включены в число простых корней группы  $D_p$  (но  $\alpha_9$  перестает быть простым корнем при  $p > 9$ ). Следующий простой корень группы  $D_p$  будет ортогонален векторам  $e_0, e_1, \dots, e_8$  и, значит, вектору  $h_0$ , а все остальные простые корни стабилизатора будут ортогональны всей решетке  $D_{1,9}$ . Обозначим число простых корней стабилизатора точки  $e_0$  через  $q$ .

На следующем шаге алгоритма мы в любом случае можем выбрать корень  $\alpha_{q+1} = e_0 + e_1 + e_2 + e_3$  (равный  $\alpha_{10}$  в случае иррациональной мультиполяризации), так как его скалярные произведения со всеми уже выбранными корнями неотрицательны, а скалярное произведение  $(\alpha_{q+1}, e_0) = 1$  является минимальным возможным.

Для  $p = 10, 11$  схема Кокстера системы простых корней группы  $D_p$  и корня  $\alpha_{q+1}$  вместе с их скалярными произведениями с вектором  $h_0$  представлена на рис. 3, 4.

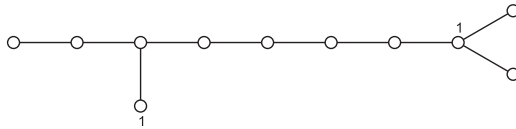


Рис. 3

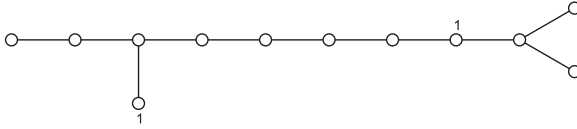


Рис. 4

Непосредственно проверяется, что вектор  $h_0$  линейно выражается через простые корни группы  $D_p$  и корень  $\alpha_{q+1}$  с целыми положительными коэффициентами, а именно,

$$h_0 = (3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + 8\alpha_4 + 7\alpha_5 + 6\alpha_6 + 5\alpha_7) + 4(\alpha_8 + \dots + \alpha_{p-2}) + 2(\alpha_{p-1} + \alpha_p) + 4\alpha_{q+1}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что его скалярные произведения со всеми другими простыми корнями также неотрицательны. При наших отождествлениях можно считать, что  $h_0$  содержится в конусе  $A(X)$  обильных дивизоров поверхности  $X$ .

Изотропный вектор  $u_0 = e_0 + e_1$  является целочисленной положительной линейной комбинацией корней  $\alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{q+1}$ , образующих расширенную систему простых корней типа  $\tilde{D}_{p-1}$ . Следовательно, он также содержится в конусе  $A(X)$ . Система всех простых корней, ортогональных  $u_0$ , содержит подсистему  $\tilde{D}_{p-1}$  в качестве неразложимой компоненты.

Предположим, что имеется еще какая-то компонента  $\Sigma$  системы простых корней, ортогональных  $u_0$ . Тогда вектор  $u_0$  является также целочисленной положительной линейной комбинацией корней из  $\Sigma$  [12, разд. 1.9]. Так как  $(u_0, \alpha_1) = 1$ , то все корни системы  $\Sigma$ , кроме какого-то одного корня  $\beta$ , входящего в разложение вектора  $u_0$  с коэффициентом 1, ортогональны корню  $\alpha_1$ , а  $(\beta, \alpha_1) = 1$ . Так как простые корни из разных компонент ортогональны, то из (2) следует, что

$$(h_0, u_0) = (h_0, \beta) = 3.$$

Это означает, что особый слой эллиптического пучка на  $X$ , отвечающий компоненте  $\Sigma$ , отображается на особую неприводимую плоскую кубику в  $Y$ .

Антисимплектическая инволюция  $\sigma$  поверхности  $X$  в общем случае должна быть определена несколько иначе. А именно, инволюция  $\sigma_0$  решетки  $J_{3,19}$ , действующая тривиально на  $S = D_{1,9}$  и умножением на  $-1$  на ортогональном дополнении, сохраняет решетку  $S(X) \supset S$ , но, вообще говоря, не сохраняет конус  $A(X)$ . Чтобы вернуть этот конус на место, нужно домножить  $\sigma_0$  на подходящий элемент  $w_0 \in W(X)$ , тривиально действующий на  $S$  (в частности, принадлежащий стабилизатору точки  $e_0$ ). Тогда  $\sigma = w_0\sigma_0$  будет искомой инволюцией.

Так как  $\sigma_0$  сохраняет подрешетку  $D_p \subset D_{1,p}$ , то  $\sigma$  как-то переставляет простые корни  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  этой решетки и соответствующие им кривые  $C_1, \dots, C_p$ . Ясно, что реально переставляться могут только корни  $\alpha_{p-1}$  и  $\alpha_p$ .

Гладкая рациональная кривая на  $X$ , соответствующая какому-то простому корню  $\alpha$ , переходит в прямую на  $Y$  тогда и только тогда, когда  $(h_0, \alpha) = 1$ . Из простых корней, входящих в выражение (2) вектора  $h_0$ , этому условию удовлетворяют при  $p = 9$  только три корня, а при  $p > 9$  только два корня. Им соответствуют три прямые  $l_1, l_2, l_3 \subset Y$ , которые при  $p > 9$  сливаются в две прямые. Как видно из (2), скалярные произведения вектора  $h_0$  с прочими простыми корнями либо равны нулю, либо не меньше 2. Следовательно, других прямых на поверхности  $Y$  нет.

Итак, все основные свойства проективной модели  $\varphi_h(X) = Y \subset \mathbb{C}P^5$ , установленные нами в случае иррациональной мультиполяризации, остаются верными в общем случае, за исключением того, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  могут слиться, могут появиться особые точки, отличные от точки  $o$ , тип особого слоя эллиптического пучка может усложниться и могут появиться новые особые слои, которые в проективной модели представляются особыми неприводимыми плоскими кубиками.

## §6. Свиток $\mathfrak{S}(0, 1, 2)$

### 6.1. Изучим подробно свиток $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(0, 1, 2) \subset \mathbb{C}^6$ .

Разложение представления группы  $SL_2$  в пространстве  $\mathbb{C}^6$  выглядит следующим образом:

$$\mathbb{C}^6 = \mathbb{C} + \mathbb{C}^2 + S^2\mathbb{C}^2, \quad (3)$$

где группа  $SL_2$  действует тривиально на первом слагаемом и тавтологически на  $\mathbb{C}^2$ . Пусть  $\{v_1, v_2\}$  — базис пространства  $\mathbb{C}^2$ . В качестве базисных векторов пространства  $\mathbb{C}^6$  возьмем

$$1, v_1, v_2, v_1^2, v_2^2, 2v_1v_2.$$

Обозначим через

$$x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z$$

координаты в этом базисе.

Условием принадлежности вектора свитку  $\mathfrak{S}$  является то, что его третья компонента и квадрат второй компоненты пропорциональны. В координатах это означает, что матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} y_1 & z \\ z & y_2 \end{pmatrix}$$

должны быть пропорциональны, что равносильно системе уравнений

$$x_2y_1 = x_1z, \quad x_1y_2 = x_2z, \quad y_1y_2 = z^2. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что всякая квадратичная форма от  $x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z$ , равная нулю на  $\mathfrak{S}$ , является линейной комбинацией форм  $x_2y_1 - x_1z$ ,  $x_1y_2 - x_2z$  и  $y_1y_2 - z^2$ . Следовательно, эти три формы порождают идеал свитка  $\mathfrak{S}$  или, иначе говоря, равенства (4) являются определяющими соотношениями алгебры полиномиальных функций на  $\mathfrak{S}$ . Пользуясь этими соотношениями, всякую полиномиальную функцию на  $\mathfrak{S}$  можно единственным образом представить в виде линейной комбинации одночленов, не содержащих произведений  $x_2y_1$ ,  $x_1y_2$  и  $y_1y_2$ . Такое представление мы будем называть *приведенным*.

**6.2.** Опишем 3-мерные подпространства, содержащиеся в свитке  $\mathfrak{S}$ . Прежде всего, это слои свитка. В терминах разложения (3) это подпространства вида

$$L(v) = \langle 1, v, v^2 \rangle \quad (v \in \mathbb{C}^2, v \neq 0).$$

Кроме того, имеется 3-мерное подпространство

$$L(0) = \mathbb{C} + \mathbb{C}^2.$$

**Лемма 3.** *Всякое 3-мерное подпространство, содержащееся в свитке  $\mathfrak{S}$ , — это одно из описанных выше подпространств  $L(v)$  и  $L(0)$ .*

**Доказательство.** Заметим, что проекция свитка  $\mathfrak{S}$  на третье слагаемое  $S^2\mathbb{C}^2$  разложения (3) — это квадратичный конус, задаваемый уравнением  $y_1y_2 = z^2$ . Он не содержит 2-мерных подпространств.

Пусть теперь  $L \subset \mathfrak{S}$  есть 3-мерное подпространство, отличное от  $L(0)$ . Тогда его проекция на  $S^2\mathbb{C}^2$  одномерна и имеет вид  $\langle v^2 \rangle$ , где  $v \in \mathbb{C}^2, v \neq 0$ . Следовательно, проекция подпространства  $L$  на второе слагаемое равна  $\langle v \rangle$ ; но это значит, что  $L = L(v)$ .  $\square$

**6.3.** Проективная модель  $K3$ -поверхности  $X$  в фиксированном свитке  $P\mathfrak{S}$  определена однозначно с точностью до проективного автоморфизма свитка. Всякий такой автоморфизм происходит из линейного автоморфизма линейного свитка  $\mathfrak{S}$ .

Очевидно, что группа  $\text{Aut } \mathfrak{S}$  линейных автоморфизмов свитка  $\mathfrak{S}$  содержит группу  $\text{SL}_2$  и 3-мерный тор  $Z$ , действующий скалярно на каждом слагаемом разложения (3), и этим исчерпываются все автоморфизмы, сохраняющие разложение (3).

Любой автоморфизм, во всяком случае, сохраняет первое слагаемое разложения (3) как пересечение всех слоев и сумму двух первых слагаемых как

единственное 3-мерное подпространство, не являющееся слоем. Следовательно,  $Z \cdot \mathrm{SL}_2$  есть максимальная редуктивная подгруппа группы  $\mathrm{Aut} \mathfrak{S}$ , а унитарный радикал группы  $\mathrm{Aut} \mathfrak{S}$  сохраняет флаг  $\mathbb{C} \subset L(0) \subset \mathbb{C}^6$  и действует тривиально на его факторах. Непосредственно проверяется, что он состоит из произведений преобразований вида

$$(x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z) \mapsto (x_0 + l(x_1, x_2, y_1, y_2, z), x_1, x_2, y_1, y_2, z), \quad (5)$$

где  $l$  — любая линейная форма, и

$$(x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z) \mapsto (x_0, x_1 + \alpha y_1 + \beta z, x_2 + \beta y_2 + \alpha z, y_1, y_2, z), \quad (6)$$

Автоморфизмы свитка, сохраняющие какое-либо подпространство  $L(v)$  (слой свитка), образуют борелевскую подгруппу  $B(v)$  группы  $\mathrm{Aut} \mathfrak{S}$ , являющуюся полупрямым произведением унитарного радикала группы  $\mathrm{Aut} \mathfrak{S}$  и некоторой борелевской подгруппы группы  $Z \cdot \mathrm{SL}_2$ . В частности,  $B(v_2)$  содержит борелевскую подгруппу группы  $\mathrm{SL}_2$ , унитарный радикал которой состоит из преобразований вида

$$(x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z) \mapsto (x_0, x_1, x_2 + \gamma x_1, y_1, y_2 + 2\gamma z + \gamma^2 y_1, z + \gamma y_1). \quad (7)$$

Следующие преобразования составляют максимальный тор  $T$  группы  $Z \cdot \mathrm{SL}_2$ , содержащийся в  $B(v_2)$ :

$$(x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z) \mapsto (t_0 x_0, t_1 t x_1, t_1 t^{-1} x_2, t_2 t^2 y_1, t_2 t^{-2} y_2, t_2 z). \quad (8)$$

(Параметры  $t_0, t_1, t_2, t \in \mathbb{C}^*$  определены с точностью до одновременного умножения  $t$  и  $t_1$  на  $-1$ .)

**Предложение 3.** *Группа  $B(v_2)$  действует транзитивно на дополнении к  $L(v_2) \cup L(0)$  в свитке  $\mathfrak{S}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $X$  — вектор из указанного дополнения и  $X_0, X_1, X_2$  — его проекции на компоненты разложения (2). Тогда, в частности,  $X_2 \neq 0$ . С помощью преобразований вида (2) можно добиться, чтобы  $X_0, X_1 \neq 0$ . При этом компонента  $X_1$  не будет пропорциональна  $v_2$ , и с помощью преобразования вида (7) можно сделать ее пропорциональной  $v_1$ . Компонента  $X_2$  станет тогда пропорциональной  $v_1^2$ . Наконец, с помощью преобразования вида (8) можно перевести полученный вектор в  $1 + v_1 + v_1^2$ .  $\square$

**6.4.** Определим на неособых точках свитка  $\mathfrak{S}$  рациональную дифференциальную 4-форму

$$\Omega = \frac{dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dz}{x_2}. \quad (9)$$

**Предложение 4.** *Форма  $\Omega$  полуинвариантна относительно группы  $B(v_2)$  с весом  $(t_0 t_1 t_2 t)^{-1}$  (в обозначениях формулы (8)).*

**Доказательство.** Так как проекция свитка на сумму двух последних компонент разложения (3) трехмерна, то любые четыре из пяти дифференциалов  $dx_1, dx_2, dy_1, dy_2, dz$  линейно зависимы на  $\mathfrak{S}$ . Отсюда следует, что форма  $\Omega$  инвариантна относительно преобразований (5).

Дифференцируя первое из соотношений (4), получаем

$$y_1 dx_2 + x_2 dy_1 = z dx_1 + x_1 dz, \quad (10)$$

откуда следует, что

$$dx_2 = \frac{z dx_1 + x_1 dz - x_2 dy_1}{y_1}.$$

Подставляя это выражение в определение формы  $\Omega$ , получаем для нее альтернативное представление

$$\Omega = -\frac{dx_0 \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge dz}{y_1}. \quad (11)$$

Из него легко следует, что форма  $\Omega$  инвариантна относительно преобразований (6) и (7).

Наконец, очевидно, что при преобразовании вида (8) форма  $\Omega$  умножается на  $(t_0 t_1 t_2 t)^{-1}$ .  $\square$

**Предложение 5.** *Форма  $\Omega$  регулярна; ее дивизор нулей есть (однократное) подпространство  $L(v_2)$ .*

**Доказательство.** Из полуинвариантности формы  $\Omega$  относительно группы  $B(v_2)$  следует, что на открытой орбите этой группы она всюду определена и нигде не обращается в нуль. Остается исследовать ее поведение на подпространствах  $L(0)$  и  $L(v_2)$ .

Рассматривая якобиеву матрицу соотношений (4), легко убедиться, что  $x_0, x_1, x_2, z$  образуют систему координат в некоторой области свитка, пересекающейся с  $L(0)$ ; но тогда непосредственно из определения формы  $\Omega$  ясно, что подпространство  $L(0)$  не входит в ее дивизор.

Аналогично,  $x_0, x_2, y_2, z$  образуют систему координат в некоторой области свитка, пересекающейся с  $L(v_2)$ . Так же, как это было сделано в доказательстве предложения 4, пользуясь вторым из соотношений (4), мы можем получить еще одно представление формы  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{z dx_0 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge dz}{y_2^2}. \quad (12)$$

Из него видно, что форма  $\Omega$  определена и обращается в нуль с кратностью 1 на подпространстве  $L(v_2)$ .  $\square$

**6.5.** Инволюция  $\sigma$ , определенная в разд. 5.4, сопряжена в группе  $\text{Aut } \mathfrak{S}$  элементу максимальной редуктивной подгруппы  $Z \cdot \text{SL}_2$ . Применив к поверхности  $Y$  соответствующий проективный автоморфизм свитка  $P\mathfrak{S}$ , мы можем добиться, чтобы  $\sigma \in Z \cdot \text{SL}_2$ . Очевидно, что тогда  $\sigma$  действует в  $\mathbb{C}^6$  умножением координаты  $x_0$  на  $-1$ :

$$\sigma: (x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z) \mapsto (-x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z). \quad (13)$$

При выполнении этого условия проективная модель  $Y$  будет определена однозначно с точностью до автоморфизма свитка  $P\mathfrak{S}$ , перестановочного с  $\sigma$ .

Обозначим через  $\text{Aut}(\mathfrak{S}, \sigma)$  группу линейных автоморфизмов свитка  $\mathfrak{S}$ , перестановочных с автоморфизмом  $\sigma$ , заданным формулой (13), т. е. сохраняющих сумму двух последних слагаемых разложения (3). Очевидно, что она содержит подгруппу  $Z \cdot \text{SL}_2$ , являющуюся ее максимальной редуктивной подгруппой, а ее унипотентный радикал состоит из преобразований вида (6).

## §7. Каноническое уравнение

**7.1.** Пусть  $X$  — мультиполяризованная  $K3$ -поверхность типа, рассмотренного в §5, и  $Y$  — ее проективная модель в свитке  $P\mathfrak{S} = P\mathfrak{S}(0, 1, 2)$ . Существует такой однородный кубический многочлен  $F$  от переменных  $x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z$ , что уравнение  $F = 0$  задает в свитке объединение поверхности  $Y$  и некоторого слоя  $PL(v)$  свитка.

Многочлен  $F$  можно считать приведенным (см. разд. 6.1) и  $\sigma$ -инвариантным. Последнее условие означает, что все члены этого многочлена содержат  $x_0$  в четной степени.

Действуя на  $Y$  группой  $SL_2 \subset \text{Aut } \mathfrak{S}$ , можно добиться того, чтобы особый слой эллиптического пучка, содержащий прямые  $l_1, l_2, l_3$  (пересекающиеся в точке  $o$ ), лежал в плоскости  $PL(v_2)$ , т. е. чтобы

$$Y \cap PL(v_2) = l_1 \cup l_2 \cup l_3. \quad (14)$$

При выполнении этого условия поверхность  $Y$  будет определена однозначно с точностью до преобразования из борелевской подгруппы  $B(v_2)$  группы  $\text{Aut } \mathfrak{S}$ .

После этого за счет выбора многочлена  $F$  в идеале поверхности  $Y$  можно добиться того, чтобы  $v = v_2$ , т. е. чтобы многочлен  $F$  не имел членов, зависящих только от  $x_0, x_2$  и  $y_2$ .

Для того чтобы учесть условие (14), мы должны сдвинуть лишнюю плоскость  $PL(v_2)$ , мешающую нам видеть пересечение поверхности  $Y$  с этой плоскостью. Это можно сделать, умножив многочлен  $F$  на  $x_2/x_1$ . С учетом выполняющихся на свитке соотношений

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{z} = \frac{z}{y_1}, \quad (15)$$

вытекающих из (4), мы получим при этом другой кубический многочлен  $\tilde{F}$  из идеала поверхности  $Y$ , который будет обращаться в нуль на слое  $PL(v_1)$  вместо  $PL(v_2)$ . Мы будем называть этот новый многочлен *сателлитом* многочлена  $F$ . Из условия (14) следует, что он не содержит членов  $x_0^2 x_2$  и  $x_0^2 y_2$ , а это равносильно тому, что исходный многочлен  $F$  не содержит членов  $x_0^2 x_1$  и  $x_0^2 z$ .

Таким образом, единственным членом многочлена  $F$ , содержащим  $x_0$ , может быть  $x_0^2 y_1$ . С другой стороны, такой член должен присутствовать, иначе поверхность  $Y$  была бы конусом, что невозможно.

Далее, из предыдущего следует, что ограничение многочлена  $F$  на подпространство  $L(0) = \langle v_1, v_2 \rangle$  есть некоторая кубическая форма  $f(x_1, x_2)$  и, значит, уравнение  $F = 0$  задает в плоскости  $PL(0)$  тройку прямых, пересекающихся в точке  $o$ . Одной из них является прямая  $l = PL(0) \cap PL(v_2)$ , задаваемая в  $PL(0)$  уравнением  $x_1 = 0$ . Две другие прямые должны принадлежать поверхности  $Y$  и, значит, тоже лежать в плоскости  $P(v_2)$ . Таким образом, уравнение  $F = 0$  задает в плоскости  $PL(0)$  тройную прямую  $l$ . Это означает, что  $f(x_1, x_2) = Bx_1^3$ , где  $B \neq 0$ .

**7.2.** Действуя на многочлен  $F$  преобразованиями (6) и (7) из унипотентного радикала группы  $B(v_2) \cap \text{Aut}(\mathfrak{S}, \sigma)$ , с помощью члена  $x_1^3$  можно сделать равными нулю коэффициенты при членах  $x_1^2 y_1, x_1^2 z$  и  $x_1 x_2 z$  соответственно. При этом параметры  $\alpha, \beta, \gamma$  указанных преобразований будут определены однозначно.

В результате получаем:

$$F = Ax_0^2y_1 + Bx_1^3 + Cx_2^2z + (ax_1 + by_1)y_1^2 + (a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + b_1y_1^2 + b_2y_2^2)z + (f_1x_1 + f_2x_2 + g_1y_1 + g_2y_2 + hz)z^2 \quad (A, B \neq 0). \quad (16)$$

Такой вид многочлена  $F$  определен однозначно с точностью до преобразований (8) из максимального тора группы  $B(v_2) \cap \text{Aut}(\mathfrak{S}, \sigma)$ .

Сателлит многочлена (16) имеет вид

$$\tilde{F} = Ax_0^2z + Bx_1^2x_2 + (Cx_2^2 + a_2x_2y_2 + b_2y_2^2)y_2 + (ax_1 + by_1)y_1z + (f_2x_2 + g_2y_2)y_2z + (a_1x_1 + f_1x_2 + b_1y_1 + hy_2 + g_1z)z^2. \quad (17)$$

Легко видеть, что во всех точках прямой  $P\langle 1, v_2 \rangle$  на касательном пространстве свитка  $P\mathfrak{S}$  на аффинной карте  $x_0 = 1$  выполняется равенство  $d\tilde{F} = Cx_2^2 dy_2$ , так что при  $C = 0$  все точки этой прямой являются особыми точками поверхности  $Y$ , что невозможно. Следовательно,  $C \neq 0$ .

Обозначим через  $T^\circ$  трехмерный тор, образованный преобразованиями (8), сохраняющими форму  $\Omega$ , т. е. удовлетворяющими условию

$$t_0t_1t_2t = 1.$$

Действуя преобразованиями из тора  $T^\circ$ , можно сделать коэффициенты  $A, B, C$  равными единице. В самом деле, это сводится к решению системы уравнений

$$t_0t_1t_2t = 1, \quad t_0^2t_2t^2 = A, \quad t_1^3t^3 = B, \quad t_1^2t_2t^{-2} = C.$$

Легко видеть, что эта система имеет решение. Более того, ее решение единственно с точностью до одновременного умножения  $t_1$  и  $t$  на  $-1$ , что не меняет элемента тора, и одновременного умножения  $t_0, t_1$  и  $t_2$  на кубический корень из 1, что не меняет действия элемента тора в пространстве кубических форм.

Таким образом, действуя на многочлен  $F$  преобразованиями из группы  $B(v_2) \cap \text{Aut}(\mathfrak{S}, \sigma)$ , сохраняющими форму  $\Omega$ , его можно привести к виду

$$F = x_0^2y_1 + x_1^3 + x_2^2z + (ax_1 + by_1)y_1^2 + (a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + b_1y_1^2 + b_2y_2^2)z + (f_1x_1 + f_2x_2 + g_1y_1 + g_2y_2 + hz)z^2. \quad (18)$$

причем такой вид определен однозначно. Многочлены  $F$  этого вида будем называть *каноническими*.

**7.3.** Обозначим через  $R$  совокупность всех канонических многочленов (18). Это 11-мерное аффинное пространство. Помимо тора  $T^\circ$ , на нем действует одномерный тор  $T^1 \subset T$ , сохраняющий одночлены  $x_0^2y_1, x_1^3$  и  $x_2^2z$ . Нетрудно видеть, что этот тор состоит из преобразований вида

$$g(t): (x_0, x_1, x_2, y_1, y_2, z) \mapsto (t^3x_0, x_1, t^2x_2, t^{-6}y_1, t^{-2}y_2, t^{-4}z). \quad (19)$$

Непосредственное вычисление показывает, что преобразование  $g(t)$  умножает форму  $\Omega$  на  $t$ , а одночлены, входящие в канонический многочлен (18) с неопределенными коэффициентами, — на степени  $t$  с показателями, указанными в следующей таблице. (В первой строке таблицы указаны обозначения соответствующих коэффициентов.)

$a$	$b$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$f_1$	$f_2$	$g_1$	$g_2$	$h$
$x_1 y_1^2$	$y_1^3$	$x_1 y_1 z$	$x_2 y_2 z$	$y_1^2 z$	$y_2^2 z$	$x_1 z^2$	$x_2 z^2$	$y_1 z^2$	$y_2 z^2$	$z^3$
12	18	10	4	16	8	8	6	14	10	12

## § 8. Исследование канонической поверхности

**8.1.** Рассмотрим обратную задачу. Пусть  $F$  — канонический многочлен, заданный формулой (18). Тогда уравнение  $F = 0$  задает в свитке  $P\mathfrak{S}$  объединение некоторой поверхности  $Y$  степени 8 и плоскости  $PL(v_2)$ , а уравнение  $\tilde{F} = 0$ , где  $\tilde{F}$  — сателлит многочлена  $F$ , — объединение поверхности  $Y$  и плоскости  $PL(v_1)$ . Сама поверхность  $Y$  задается в  $P\mathfrak{S}$  системой уравнений

$$F = \tilde{F} = 0. \quad (20)$$

Найдем достаточные условия для того, чтобы таким образом определенная поверхность  $Y$  была  $K3$ -поверхностью с простыми особенностями.

Пересечение поверхности  $Y$  с плоскостью  $PL(v_2)$  задается в этой плоскости уравнением

$$(x_2^2 + a_2 x_2 y_2 + b_2 y_2^2) y_2 = 0 \quad (21)$$

и представляет собой тройку прямых  $l_1, l_2, l_3$ , пересекающихся в точке  $o$ , первые две из которых сливаются при

$$4b_2 = a_2^2. \quad (22)$$

Найдем теперь пересечения поверхности  $Y$  с другими слоями свитка  $P\mathfrak{S}$ . Слой  $L(v_1 + \tau v_2)$  свитка  $\mathfrak{S}$  задается в  $\mathbb{C}^6$  линейными уравнениями

$$x_2 = \tau x_1, \quad y_2 = \tau^2 y_1, \quad z = \tau y_1.$$

Подставляя эти выражения для  $x_2, y_2$  и  $z$  в (18), мы получаем представление ограничения многочлена  $F$  на  $L(v_1 + \tau v_2)$  в нормальной форме Вейерштрасса:

$$F = x_0^2 y_1 + x_1^3 + \tau^3 x_1^2 y_1 + \phi_2(\tau) x_1 y_1^2 + \phi_3(\tau) y_1^3, \quad (23)$$

где

$$\phi_2(\tau) = a_2 \tau^4 + f_2 \tau^3 + f_1 \tau^2 + a_1 \tau + a, \quad (24)$$

$$\phi_3(\tau) = b_2 \tau^5 + g_2 \tau^4 + h \tau^3 + g_1 \tau^2 + b_1 \tau + b. \quad (25)$$

Отсюда видно, что пересечение

$$Y(\tau) = Y \cap PL(v_1 + \tau v_2)$$

является неприводимой кубической кривой. Следовательно, и сама поверхность  $Y$  неприводима.

**8.2.** Исследуем теперь, какие особые точки может иметь поверхность  $Y$  помимо точки  $o$ .

Прежде всего, ясно, что точка  $p \in Y \cap PL(v)$ , отличная от точки  $o$ , может быть особой точкой поверхности  $Y$ , только если она является особой точкой кривой  $Y \cap PL(v)$ . Применительно к  $v = v_2$  это означает, что поверхность  $Y$  может иметь особые точки в слое  $PL(v_2)$ , отличные от точки  $o$ , только при

условии (22), когда прямые  $l_1$  и  $l_2$  сливаются, и этими точками могут быть только какие-то точки этой двойной прямой, которую мы обозначим через  $l_0$ .

Более точно, при выполнении условия (22) прямая  $l_0$  задается в  $PL(v_2)$  уравнением

$$2x_2 + a_2y_2 = 0.$$

В точках этой прямой на касательном пространстве свитка  $\mathfrak{S}$  на аффинной карте  $x_0 = 1$  выполняется равенство

$$d\tilde{F} = (1 + (f_2x_2 + g_2y_2)y_2)dz = (1 + (g_2 - \frac{1}{2}a_2f_2)y_2^2) dz.$$

Следовательно, поверхность  $Y$  имеет на прямой  $l_0$ , помимо точки  $o$ , две особые точки, задаваемые в однородных координатах условием

$$x_0^2 + (g_2 - \frac{1}{2}a_2f_2)y_2^2 = 0;$$

они сливаются в одну особую точку при

$$2g_2 = a_2f_2. \tag{26}$$

Кроме того, поверхность  $Y$  может иметь одну особую точку, отличную от точки  $o$ , на кривой  $Y(\tau)$  при условии, что дискриминант  $D(\tau)$  кубического многочлена

$$f = x^3 + \tau^3x^2 + \phi_2(\tau)x + \phi_3(\tau) \in \mathbb{C}[\tau][x] \tag{27}$$

обращается в нуль в точке  $\tau$ . Может случиться, что этот дискриминант тождественно равен нулю. Покажем, что это бывает достаточно редко.

Обозначим через  $R$  совокупность всех канонических многочленов (18). Это 11-мерное аффинное пространство. Множество  $R_0$  многочленов  $F \in R$ , для которых дискриминант  $D(\tau)$  тождественно равен нулю, — это какое-то замкнутое подмногообразие в  $R$ .

**Предложение 6.**  $\dim R_0 = 2$ .

**Доказательство.** Если дискриминант  $D(\tau)$  тождественно равен нулю, то многочлен (27) имеет кратный корень в  $\mathbb{C}[\tau]$  и, следовательно, представляется в виде

$$f = (x - p(\tau))^2(x - q(\tau)),$$

где  $p, q$  — какие-то многочлены. Из равенств

$$2p(\tau) + q(\tau) = -\tau^3, \quad p(\tau)^2q(\tau) = -\phi_3(\tau)$$

следует, что  $p$  и  $q$  — многочлены степеней 1 и 3 соответственно, причем многочлен  $q$  однозначно восстанавливается по многочлену  $p$ , который может быть выбран произвольно. Таким образом, многочлен  $F \in R_0$  зависит от двух параметров.  $\square$

**8.3.** Из предыдущего следует, что при  $F \in R \setminus R_0$  поверхность  $Y$  имеет лишь конечное число особенностей. Найдем достаточные условия для того, чтобы все они были простыми.

**Предложение 7.** Для любого многочлена  $F \in R \setminus R_0$  поверхность  $Y$  имеет в точке  $o$  простую особенность типа  $A$ .

**Доказательство.** Поверхность  $Y$  задается в  $\mathbb{C}P^5$  тремя квадратными уравнениями (4) и двумя кубическими уравнениями (20). На аффинной карте  $x_0 = 1$  в окрестности точки  $o$  из уравнений (20) можно выразить координаты  $y_1$  и  $z$  в виде формальных степенных рядов от  $x_1, x_2$  и  $y_2$  с младшими членами степени 3. Тем самым особенность поверхности  $Y$  в точке  $o$  определяется некоторым идеалом  $I$  кольца  $\mathbb{C}[[x_1, x_2, y_2]]$ . В частности, подставляя найденное выражение для  $z$  в уравнение  $x_1 y_2 = y_2 z$ , мы получаем элемент идеала  $I$  с младшим членом  $x_1 y_2$ , являющимся квадратичной формой коранга 1. Следовательно,  $o$  — простая особенность типа  $A$  [15].  $\square$

Пусть теперь  $p \in Y(\tau_0)$  — особая точка поверхности  $Y$ , отличная от точки  $o$ . Тогда  $p$  — особая точка кривой  $Y(\tau_0)$ . Если эта особенность — простое самопересечение, то ее 2-струя невырождена и, значит, ранг ее 2-струи как особенности поверхности  $Y$  не меньше 2. Следовательно, в этом случае  $p$  — простая особенность типа  $A$  поверхности  $Y$ .

Предположим теперь, что  $p$  — острие кривой  $Y(\tau_0)$ , т. е. многочлен (27) является полным кубом при  $\tau = \tau_0$ . Сделав замену  $x = \bar{x} - \frac{1}{3}\tau^3$ , мы получим

$$f = \bar{x}^3 + \bar{\phi}_2(\tau)\bar{x} + \bar{\phi}_3(\tau), \quad (28)$$

где

$$\bar{\phi}_2(\tau) = -\frac{1}{3}\tau^6 + \phi_2(\tau), \quad (29)$$

$$\bar{\phi}_3(\tau) = \frac{2}{27}\tau^9 - \frac{1}{3}\tau^3\phi_2(\tau) + \phi_3(\tau), \quad (30)$$

причем  $\bar{\phi}_2(\tau_0) = \bar{\phi}_3(\tau_0) = 0$ . Особенность поверхности  $Y$  в точке  $p$  эквивалентна особенности многочлена (28) как функции от  $\bar{x}$  и  $\tau$  в точке  $\bar{x} = 0, \tau = \tau_0$ .

Разложим многочлены  $\bar{\phi}_2(\tau)$  и  $\bar{\phi}_3(\tau)$  по степеням  $\bar{\tau} = \tau - \tau_0$  и посмотрим, каким может быть младший член полученного представления многочлена  $f$  в виде многочлена от  $\bar{x}$  и  $\bar{\tau}$ . Это не может быть член первой степени, так как тогда точка  $p$  не была бы особой точкой поверхности  $Y$ . Если это член второй или третьей степени, то  $p$  — простая особенность типа  $A_1, A_2$  или  $D_4$ . Если это  $\bar{\tau}^4, \bar{\tau}^3\bar{x}$  или  $\bar{\tau}^5$ , то  $p$  — простая особенность типа  $E_6, E_7$  или  $E_8$  соответственно.

Таким образом, точка  $p$  является не простой особенностью поверхности  $Y$ , только если  $\tau_0$  — корень кратности  $\geq 4$  многочлена  $\bar{\phi}_2$  и одновременно — корень кратности  $\geq 6$  многочлена  $\bar{\phi}_3$ .

Обозначим через  $R_1$  множество тех многочленов  $F \in R$ , для которых существует такое  $\tau_0$ . Это замкнутое алгебраическое подмногообразие в  $R$ .

**Предложение 8.**  $\dim R_1 = 2$ .

**Доказательство.** Рассматриваемое условие означает, что многочлены  $\bar{\phi}_2$  и  $\bar{\phi}_3$  могут быть представлены в виде

$$\bar{\phi}_2(\tau) = -\frac{1}{3}\tau^6 + \phi_2(\tau) = -\frac{1}{3}(\tau^2 + p_1\tau + p_2)(\tau - \tau_0)^4, \quad (31)$$

$$\bar{\phi}_3(\tau) = \frac{2}{27}\tau^9 - \frac{1}{3}\tau^3\phi_2(\tau) + \phi_3(\tau) = \frac{2}{27}(\tau^3 + q_1\tau^2 + q_2\tau + q_3)(\tau - \tau_0)^6. \quad (32)$$

Прибавив ко второму из этих равенств первое, умноженное на  $\frac{1}{3}\tau^3$ , получим равенство

$$-\frac{1}{27}\tau^9 + \phi_3(\tau) = \frac{2}{27}(\tau^3 + q_1\tau^2 + q_2\tau + q_3)(\tau - \tau_0)^6 - \frac{1}{9}\tau^3(\tau^2 + p_1\tau + p_2)(\tau - \tau_0)^4. \quad (33)$$

Сравнение коэффициентов при  $\tau^5$  в (31) и при  $\tau^8$  в (32) позволяет выразить  $p_1$  и  $q_1$  через  $\tau_0$ , а сравнение коэффициентов при  $\tau^7$  и  $\tau^6$  в (33) позволяет выразить

$q_2$  и  $q_3$  через  $\tau_0$  и  $p_2$ . Параметры  $\tau_0$  и  $p_2$  могут быть выбраны произвольно. Таким образом, многочлен  $F \in R_1$  зависит от двух параметров.  $\square$

Исследуем, наконец, особые точки, лежащие на двойной прямой  $l_0 \subset Y \cap PL(v_2)$  (при выполнении условия (22)).

На аффинной карте  $y_2 = 1$  свиток  $P\mathfrak{S}$  задается уравнениями

$$x_1 = x_2 z, \quad y_1 = z^2, \quad (34)$$

так что в качестве его внутренних координат можно взять  $x_0$ ,  $x_2$  и  $z$ . В этих координатах прямая  $l_0$  задается уравнениями

$$x_2 = -\frac{1}{2}a_2, \quad z = 0,$$

а особые точки на ней задаются условием

$$x_0^2 = \frac{1}{2}a_2 f_2 - g_2.$$

В окрестности слоя  $PL(v_2)$  свитка  $P\mathfrak{S}$  без точки  $o$  поверхность  $Y$  задается уравнением  $\tilde{F} = 0$ . С учетом соотношений (34) многочлен  $\tilde{F}$  в выбранных нами внутренних координатах свитка записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & x_0^2 z + x_2^2 z^3 + x_2^2 + a_2 x_2 + b + (a x_2 + b z) z^4 + (f_2 x_2 + g_2) z \\ & + (a_1 x_2 + b_1 z) z^3 + (f_1 x_2 + h) z^2 + g_1 z^3. \end{aligned} \quad (35)$$

Непосредственно проверяется, что в интересующих нас особых точках

$$\frac{1}{2} d^2 \tilde{F} = 2x_0 dx_0 dz + (dx_2)^2 + f_2 dx_2 dz + f_1 x_2 (dz)^2.$$

При  $x_0 \neq 0$  ранг этой квадратичной формы не меньше 2, так что мы имеем две простые особые точки типа  $A$ . При  $x_0 = 0$ , когда особые точки сливаются, ранг этой квадратичной формы равен 1 и ее ядро задается линейным уравнением  $dx_2 + \frac{1}{2}f_2 dz = 0$ . Вычисляя третий дифференциал, получаем

$$\frac{1}{6} d^3 \tilde{F} = (dx_0)^2 dz + (x_2^2 + a_1 x_2 + g_1) (dz)^3 + f_1 dx_2 (dz)^2,$$

что при ограничении на ядро второго дифференциала дает кубическую форму вида  $(dx_0)^2 dz + k(dz)^3$ , где  $k$  — некоторый коэффициент. Это означает, что в этом случае мы имеем особую точку типа  $D$ .

Таким образом, при  $F \in R \setminus (R_0 \cup R_1)$  поверхность  $Y$  неприводима и имеет только простые особенности.

**8.4.** Предполагая, что  $F \in R \setminus (R_0 \cup R_1)$ , построим теперь в явном виде симплектическую форму на многообразии  $Y^{\text{reg}}$  неособых точек поверхности  $Y$ .

Обозначим через  $\hat{Y}$  конус над  $Y$  и через  $\hat{Y}^{\text{reg}}$  многообразие его неособых точек. В каждой точке  $v \in \hat{Y}^{\text{reg}} \setminus L(v_2)$  «разделим» 4-форму  $\Omega$ , построенную в §6, на  $dF$ , т.е. найдем такую 3-форму  $\Phi$ , что

$$\Omega = dF \wedge \Phi.$$

Это деление не однозначно, но ограничение формы  $\Phi$  на касательное пространство конуса определено однозначно.

Для того чтобы определить форму  $\Phi$  в точках  $v \in \hat{Y}^{\text{reg}} \cap L(v_2)$ , воспользуемся представлением (12) формы  $\Omega$ , из которого следует, что

$$\frac{x_2}{x_1} \Omega = \tilde{\Omega} = \frac{dx_0 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge dz}{y_2}.$$

Таким образом, в этом случае вместо того, чтобы делить  $\Omega$  на  $dF$ , мы можем делить  $\tilde{\Omega}$  на  $d\tilde{F} = \frac{x_2}{x_1} dF$ . Это позволяет определить форму  $\Phi$  на всем многообразии  $\hat{Y}^{\text{reg}}$ . Очевидно, что она нигде не обращается в нуль.

Далее, подставив в форму  $\Phi$  в качестве одного из аргументов радиус-вектор точки  $v$ , мы получим 2-форму  $\hat{\omega}$  на  $\hat{Y}^{\text{reg}}$ , ядро которой в каждой точке есть одномерное подпространство, натянутое на радиус-вектор этой точки.

Наконец, докажем, что форма  $\hat{\omega}$  инвариантна относительно гомотетий. В самом деле, гомотетия с коэффициентом  $\lambda$  в пространстве  $\mathbb{C}^6$  осуществляется элементом тора  $T$  с  $t_0 = t_1 = t_2 = \lambda$ ,  $t = 1$ . Этот элемент умножает форму  $\Omega$  и многочлен  $F$  на  $\lambda^3$  и, стало быть, сохраняет форму  $\Phi$ . Так как поле радиус-векторов также инвариантно относительно гомотетий, то из инвариантности формы  $\Phi$  следует, что и форма  $\hat{\omega}$  инвариантна.

Тем самым форма  $\hat{\omega}$  определяет 2-форму  $\omega$  на  $Y^{\text{reg}} = P\hat{Y}^{\text{reg}}$ , нигде не обращающуюся в нуль. Это означает, что  $Y$  является проективной моделью некоторой КЗ-поверхности из нашего семейства.

## §9. Доказательство основной теоремы

**9.1.** Согласно теореме Торелли для КЗ-поверхностей (см., например, [16]), интегрируя по трансцендентным циклам поверхности  $Y$  построенную выше каноническим способом по многочлену  $F$  форму  $\omega$ , мы получаем изоморфизм аналитических многообразий

$$p: R \setminus (R_0 \cup R_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{10}/\Gamma_{10} \quad (36)$$

(отображение периодов).

**Предложение 9.** *Отображение  $p$  эквивариантно по отношению к действию одномерного тора  $T^1$ , введенного в разд. 7.3, если считать, что на  $\mathcal{L}_{10}$  он действует умножением на  $t^{-1}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $F \in R \setminus (R_0 \cup R_1)$  и  $Y \subset P\mathfrak{S}$  — соответствующая проективная поверхность. Для элемента  $g(t) \in T^1$  многочлену  $g(t)F$  соответствует поверхность  $g(t)Y$ , изоморфная  $Y$ , и нам нужно только сравнить образ формы  $\omega$  на  $Y$ , построенной по многочлену  $F$ , как в разд. 8.4, путем «деления» формы  $\Omega$  на  $dF$ , с аналогичной формой  $\omega_t$  на поверхности  $g(t)Y$ .

Ясно, что форма  $g(t)\omega$  может быть получена путем деления формы  $g(t)\Omega = t\Omega$  на  $g(t)dF = d(g(t)F)$ . С другой стороны, форма  $\omega_t$  получается путем деления формы  $\Omega$  на  $d(g(t)F)$ . Следовательно,  $\omega_t = t^{-1}g(t)\omega$ .  $\square$

Действие тора  $T^1$  на  $R$ , описанное в разд. 7.3, определяет градуировку алгебры  $\mathbb{C}[R]$ , представляющей собой алгебру многочленов от коэффициентов  $a, b, \dots, h$  канонического многочлена. Степени переменных в этой градуировке равны соответственно

$$12, 18, 10, 4, 16, 8, 8, 6, 14, 10, 12.$$

Предложение 9 означает, что отображение  $p$  индуцирует изоморфизм градуированных алгебр

$$p^*: A(\mathcal{D}_{10}, \Gamma_{10}) \rightarrow \mathbb{C}[R],$$

что и дает утверждение основной теоремы для  $n = 10$ .

**9.2.** Рассмотрим возможные вырождения. В случае, когда  $S(X) \supset D_{1,10}$ , прямые  $l_1$  и  $l_2$  на поверхности  $Y$  сливаются (см. рис. 3), т. е. выполнено соотношение (22). Это означает, что из числа образующих алгебры автоморфных форм выпадает одна из форм веса 8, которая становится пропорциональна квадрату образующей веса 4. Какие-то дополнительные соотношения невозможны по соображениям размерности. Это дает утверждение теоремы для  $n = 9$ .

Далее, если  $S(X) \supset D_{1,11}$ , то две особые точки типа  $A_1$ , лежащие на двойной прямой  $l_0$ , сливаются (см. рис. 4), т. е. выполнено соотношение (26). Это означает, что одна из образующих веса 10 становится пропорциональна произведению образующих весов 4 и 6. Отсюда следует утверждение теоремы для  $n = 8$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. C. Shephard, J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, *Canad. J. Math.*, **6** (1954), 274–304.
- [2] C. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections*, *Amer. J. Math.*, **77** (1955), 778–782.
- [3] О. В. Шварцман, *О коциклах групп комплексных отражений и сильной одно-связности факторпространств*, в кн.: Вопросы теории групп и гомологической алгебры, Ярославск. гос. университет, Ярославль, 1991, 32–39.
- [4] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Алгебраическая геометрия–4, т. 55, ВИНТИ, М., 1989, 137–309.
- [5] E. B. Vinberg, *Some free algebras of automorphic forms on symmetric domains of type IV*, *Transform. Groups*, **15**:3 (2010), 701–741.
- [6] W. L. Baily, A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, *Ann. of Math. (2)*, **84** (1966), 442–528.
- [7] J. Igusa, *On Siegel modular forms of genus two*, *Amer. J. Math.*, **84** (1962), 175–200.
- [8] Э. Б. Винберг, *Об алгебре модулярных форм Зигеля рода 2*, *Труды ММО*, **74**:1 (2013), 2–17.
- [9] Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, *Критерий гладкости в бесконечности арифметического фактора трубы будущего*, *Функц. анализ и его прил.*, **51**:1 (2017), 40–59.
- [10] В. В. Никулин, *Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения*, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177.
- [11] Э. Б. Винберг, *О группах единиц некоторых квадратичных форм*, *Матем. сб.*, **87** (129):1 (1972), 18–36.
- [12] B. Saint-Donat, *Projective models of K3 surfaces*, *Amer. J. Math.*, **96** (1974), 602–639.
- [13] E. B. Vinberg, *The two most algebraic K3 surfaces*, *Math. Ann.*, **265**:1 (1983), 1–21.
- [14] T. Johnsen, A. L. Knutsen, *K3 Projective Models in Scrolls*, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [15] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, Наука, М., 1982.
- [16] В. С. Куликов, П. Ф. Курчанов, *Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов и структуры Ходжа*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Алгебраическая геометрия–3, т. 36, ВИНТИ, М., 1997, 5–231.