B. I. Shubov, On subsets of Hilbert space having finite Hausdorff dimension, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, Volume 163, 154–165

В.И.Шубов

О ПОДМНОЖЕСТВАХ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНУЮ ХАУСДОРФОВУ РАЗМЕРНОСТЬ

I. Введение

Пусть X_1, X_2 - гильбертовы пространства, $X_2 \subset X_1$, X_2 плотно в X_1 и вложение компактно. Пусть $\mathfrak{M} \subset X_2$ и $dim_H^{(i)} \mathfrak{M}$ - хаусдорфова размерность множества $\mathfrak{M}$ относительно метрики пространства $X_i (i=1,2)$ (см., например, [I]). Ясно, что $dim_H^{(1)} \mathfrak{M} \leq dim_H^{(2)} \mathfrak{M}$. Возникает вопрос - можно ли привести пример множества $\mathfrak{M}$, для которого $dim_H^{(1)} \mathfrak{M} < \infty$, а $dim_H^{(2)} \mathfrak{M} = \infty$?

Этот вопрос естественным образом возникает в теории аттракторов нелинейных эволюционных уравнений с частными производными (см. [2], [3]). Известно много результатов по оценке хаусдорфовой размерности аттракторов. Эта оценка всякий раз проводится в какой-либо норме, связанной с исследуемым уравнением. Однако, с эволюционным уравнением, как правило, бывает связано не одно пространство, а целая шкала пространств. Поставленный выше вопрос можно переформулировать следующим образом. Если получена оценка хаусдорфовой размерности аттрактора в какой-либо норме, то нужно ли после этого отдельно доказывать оценку в более сильной норме? Ответ на этот вопрос неочевиден, так как требование конечности хаусдорфовой размерности множества относительно какой-либо нормы является сильным ограничением на вид множества.

Содержание настоящей работы составляет описание двух примеров, показывающих, что ответ на поставленный выше вопрос утвердителен. Сначала строится пример ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset X_2$, обладающего следующими свойствами: $dim_H^{(1)} \mathfrak{M} < \infty$; $\mathfrak{M}$ не может быть покрыто счетным набором множеств, компактных в X_2. Из последнего свойства следует, что $dim_H^{(2)} \mathfrak{M} = \infty$. Второй пример - это пример множества $\mathfrak{M}$, компактного в X_2, такого, что $dim_H^{(1)} \mathfrak{M} < \infty$ и обладающего свойством: $h^{(2)}(\mathfrak{M}) = \infty$. Здесь $h^{(i)}(\mathfrak{M})$ - это так называемая верхняя метрическая размерность (или информационная размерность, или предельная емкость) множества $\mathfrak{M}$, вычисленная относительно метрики X_i, $i=1,2$ (см. ниже). Свойство $h^{(2)}(\mathfrak{M}) = \infty$ слабее, чем $dim_H^{(2)} \mathfrak{M} = \infty$. Таким образом, в случае, когда на $\mathfrak{M}$ накладывается требование компактности в X_2, поставленный выше вопрос остается не выясненным до конца. Однако, по-видимому, для обоих примеров, о которых идет речь, $dim_H^{(i)} \mathfrak{M} = h^{(i)}(\mathfrak{M})$, $i=1,2$. Отметим, что в обоих примерах вместо свойства $\dim_H^{(1)} \mathfrak{M} < \infty$ доказывается более сильное свойство $h^{(1)}(\mathfrak{M}) < \infty$.

2. Формулировка результатов

Прежде всего напомним определение упоминавшейся во введении величины $h(\mathfrak{M})$. Пусть X - полное метрическое пространство. $\mathfrak{M} \subset X$ - компактное подмножество. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через $N(\mathfrak{M}, \varepsilon)$ число элементов минимального покрытия $\mathfrak{M}$ замкнутыми шарами радиуса ε. Определим ^ж)

$$h(\mathfrak{M}) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln N(\mathfrak{M}, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} . \qquad (\mathrm{I})$$

Хорошо известно, что $\dim_H \mathfrak{M} \leq h(\mathfrak{M})$. Равенство, вообще говоря, не имеет места (см. пример в [5]). В данной работе будет рассматриваться именно $h(\mathfrak{M})$ вместо $\dim_H \mathfrak{M}$. В дальнейшем будет полезно следующее замечание. Если на X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2 и существуют $c_1, c_2 > 0$, такие, что $c_1 \rho_1(x,y) \leq \rho_2(x,y) \leq c_2 \rho_1(x,y)$ для всех $x, y \in X$, то для этих метрик величины $h(\mathfrak{M})$ (как и $\dim_H \mathfrak{M}$) совпадают.

Теперь дадим описание пространств X_1 и X_2. Пусть $X_1 = \ell_2$ - пространство всех последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых конечна норма $\|x\|_1 = (\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2)^{1/2}$.

Пусть задана возрастающая последовательность положительных чисел $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots < \lambda_q^2 < \ldots$, $\lambda_q^2 \to \infty$ при $q \to \infty$. Определим X_2 как множество всех векторов $x \in X_1$, для которых конечна норма $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 x_k^2)^{1/2}$. Ясно, что X_2 плотно в X_1. Компактность вложения эквивалентна условию $\lambda_q^2 \to \infty$. Если $\mathfrak{M} \subset X_2$, то будем в дальнейшем, как и во введении, символом $h^{(i)}(\mathfrak{M})$ обозначать величину (I), вычисленную по отношению к норме пространства X_i $(i = 1, 2)$. Это следует делать, так как нормы в X_1 и X_2 неэквивалентны.

ж) Величина (I) была впервые введена, по-видимому, в работе [4], где она была названа верхней метрической размерностью и обозначалась $\overline{dm}\ \mathfrak{M}$. В современной литературе по аттракторам (см. [5], [6]) она называется предельной емкостью и обозначается $c(\mathfrak{M})$. Наконец, встречается также название "информационная размерность" и обозначение $h(\mathfrak{M})$.

Для построения примеров, о которых шла речь выше, потребуются специального вида подмножества вещественной прямой, которые естественно назвать обобщенными канторовыми множествами.

Пусть n, m – натуральные числа, $n > 2m$, $m > 1$. Определим отображение $I_{n,m}$, сопоставляющее каждому отрезку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ его подмножество

$$I_{n,m}([a,b]) = \bigcup_{i:|i| \le m-1} \left[t_i^{(m)} - \frac{b-a}{2n},\ t_i^{(m)} + \frac{b-a}{2n} \right],$$

где $t_i^{(m)} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2m} i$, $\quad i = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-1)$.

Для объединения непересекающихся отрезков положим

$$I_{n,m}\left(\bigcup_j [a_j, b_j]\right) = \bigcup_j I_{n,m}([a_j, b_j]).$$

Для любого $[a,b] \subset \mathbb{R}$ определим обобщенное канторово множество:

$$J_{n,m}([a,b]) = \bigcap_{s=1}^{\infty} (I_{n,m})^s([a,b]). \tag{2}$$

Здесь $(I_{n,m})^s([a,b])$ означает s-кратное применение к отрезку $[a,b]$ операции $I_{n,m}$.

Теперь можно перейти к описанию примеров.

I) Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ – две возрастающие последовательности натуральных чисел, такие, что $n_k > 2m_k$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k^2} \le \frac{1}{4}; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = d < \infty, \quad \text{где} \quad d_k = \frac{\ln(2m_k - 1)}{\ln n_k}. \tag{4}$$

Так как $\lambda_q \to \infty$ при $q \to \infty$, то из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{\lambda_{q_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lambda_{q_k} \ge 2n_k \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{d}{2d_k}}. \tag{5}$$

Определим $\mathfrak{M}$ как множество $x = (x_1, x_2, \dots) \in X_2$ таких, что

$$\|x\|_2 \le 1; \tag{6}$$

$$x_q = 0\ ,\ \text{при}\ q \neq q_k;\ x_{q_k} \in J_{n_k, m_k}\left(\left[-\frac{1}{\lambda_{q_k}}, \frac{1}{\lambda_{q_k}}\right]\right),\quad k = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

ТЕОРЕМА I. а) $h^{(1)}(\mathfrak{M}) = d < \infty$; б) $\mathfrak{M}$ нельзя покрыть счетным набором множеств, компактных в X_2.

СЛЕДСТВИЕ. а) $\dim_H^{(1)} \mathfrak{M} \leq d < \infty$ (по-видимому, $\dim_H^{(1)} \mathfrak{M} = d$); б) $\dim_H^{(2)} \mathfrak{M} = \infty$.

2) Пусть $a_k = a_1 k^{\alpha}$, $a_1 > 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln a_k}{\ln n_k} < \infty . \tag{8}$$

Пусть $m > 2$ – натуральное число и $n_1 > 2m$. Обозначим

$$d_k = \frac{\ln(2m-1)}{\ln n_k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} d_k = d < \infty . \tag{9}$$

Ряд (9) сходится в силу (8).

Из последовательности $\{\lambda_q\}_{q=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\lambda_{q_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такую, что

$$\lambda_{q_k} \geq \frac{2n_k}{a_k} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{d}{2d_k}} . \tag{10}$$

Пусть

$$\mu_k = a_k \lambda_{q_k} . \tag{11}$$

Определим теперь $\mathfrak{M}$ как множество всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ таких, что

$$x_q = 0\ ,\quad \text{при}\quad q \neq q_k\ ;\quad x_{q_k} \in J_{n_k, m}\left(\left[-\frac{1}{\mu_k}, \frac{1}{\mu_k}\right]\right). \tag{12}$$

Заметим сразу,же, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} < \infty$, так как $\alpha > \frac{1}{2}$. Отсюда, учитывая (II), (I2) и определение нормы в X_2 , можно заключить, что $\mathfrak{M} \subset X_2$.

ТЕОРЕМА 2. $\mathfrak{M}$ компактно в X_2 и а) $h^{(1)}(\mathfrak{M}) = d < \infty$; б) $h^{(2)}(\mathfrak{M}) = \infty$.

Доказательства теорем I и 2 будут даны в пункте 4.

3. Вспомогательные предложения

Пусть X - гильбертово пространство. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в X. Пусть P_n - ортогональный проектор в X на подпространство, порожденное первыми n базисными векторами, а $P_n^{\perp}$ - ортогональный проектор. Для любого ограниченного подмножества $\mathfrak{M} \subset X$ определим $\varepsilon_n(\mathfrak{M}) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \| P_n^{\perp} x \|$. Хорошо известно (см., например, [7]), что замыкание $\mathfrak{M}$ компактно в X том и только том случае, когда $\varepsilon_n(\mathfrak{M}) \to 0$ при $n \to \infty$.

ЛЕММА I. Пусть $\mathfrak{M} \subset X$ и замыкание $\mathfrak{M}$ компактно. Для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n, такого, что $\varepsilon_n(\mathfrak{M}) \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}$, справедливо неравенство

$$N(\mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant N(P_n \mathfrak{M}, \varepsilon/\sqrt{2}) . \tag{I3}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ и любого n

$$N(\mathfrak{M}, \varepsilon) \geqslant N(P_n \mathfrak{M}, \varepsilon) . \tag{I4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_r(x) = \{ y \in X : \| x - y \| \leqslant r \}$ - шар в X радиуса r с центром в точке x. Допустим, что $P_n \mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon/\sqrt{2}}(x_i)$, где $x_i \in P_n X$. Убедимся, что отсюда следует: $\mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon}(x_i)$. Действительно, пусть $x \in \mathfrak{M}$. Тогда существует i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ такое, что $P_n x \in B_{\varepsilon/\sqrt{2}}(x_i)$, то есть $\| P_n x - x_i \| \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}$. Но если $\varepsilon_n(\mathfrak{M}) \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}$ то $\| x - x_i \|^2 = \| P_n x + P_n^{\perp} x - x_i \|^2 = \| P_n x - x_i \|^2 + \| P_n^{\perp} x \|^2 \leqslant$ $\leqslant \varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2 = \varepsilon^2$. Следовательно, $x \in B_{\varepsilon}(x_i)$. Итак, при $\varepsilon_n(\mathfrak{M}) \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}$ каждому покрытию $P_n \mathfrak{M}$ шарами радиуса $\varepsilon/\sqrt{2}$ соответствует покрытие $\mathfrak{M}$ шарами радиуса ε. Отсюда немедленно следует (I3).

Неравенство (I4) очевидно, так как каждому покрытию $\mathfrak{M}$ шарами радиуса ε соответствует покрытие $P_n \mathfrak{M}$ проекциями этих шаров. Лемма доказана.

Пусть X_k $(k = 1, \dots s)$ - гильбертовы пространства, $X = \bigoplus_{k=1}^{s} X_k$, $Q_k : X \to X_k$ - естественная проекция. Пусть $\mathfrak{M}_k \subset X_k$ и замыкание $\mathfrak{M}_k$ - компактно, $\mathfrak{M} = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathfrak{M}_k$.

ЛЕММА 2. Для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$N(\mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant \prod_{k=1}^{s} N(\mathfrak{M}_k, \varepsilon/\sqrt{s}) , \tag{I5}$$

$$N(\mathfrak{M}, \varepsilon) \geqslant \prod_{k=1}^{s} N(\mathfrak{M}_k, \varepsilon) . \tag{I6}$$

Справедлива формула

$$h(\mathcal{M}) = \sum_{k=1}^{s} h(\mathcal{M}_k) . \tag{I7}$$

(Здесь подразумевается, что $h(\mathcal{M}_k)$ вычислена относительно метрики X_k, а $h(\mathcal{M})$ относительно метрики X.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{ B^{(k)}_{\varepsilon/\sqrt{s}}(x_j^{(k)}),\ j=1,\dots,N_k \}$ – покрытие $\mathcal{M}_k$ шарами из X_k радиуса $\varepsilon/\sqrt{s}$ с центрами в точках $x_j^{(k)} \in X_k$ $(k=1,\dots,s)$. Тогда всевозможные множества $\{ \bigoplus_{k=1}^{s} B^{(k)}_{\varepsilon/\sqrt{s}}(x^{(k)}_{j_k}),\ 1 \le j_1 \le N_1, \dots, 1 \le j_s \le N_s \}$ образуют покрытие $\mathcal{M}$. Число этих множеств равно $N_1 \dots N_s$. Теперь заметим, что

$\bigoplus_{k=1}^{s} B^{(k)}_{\varepsilon/\sqrt{s}}(x^{(k)}_{j_k}) \subset B_\varepsilon(x_{j_1\dots j_s})$, где $B_\varepsilon(x_{j_1\dots j_s})$ – шар в X с центром в точке $x_{j_1\dots j_s} \in X:\ Q_k x_{j_1\dots j_s} = x^{(k)}_{j_k}$. Итак, каждому набору покрытий множеств $\mathcal{M}_k$ шарами радиуса $\varepsilon/\sqrt{s}$, содержащих N_k элементов, соответствует покрытие $\mathcal{M}$ шарами радиуса ε, содержащее $N_1 \dots N_s$ элементов. Отсюда немедленно следует (I5).

Докажем (I6). Пусть $\{ B_\varepsilon(x_j),\ j=1,\dots,N \}$ – минимальное покрытие $\mathcal{M}$ шарами радиуса ε. Тогда $\{B^{(k)}_\varepsilon(Q_k x_j),\ j=1,\dots,N\}$ – покрытие $\mathcal{M}_k\ (k=1,\dots,s)$. (Символом $B^{(k)}$ обозначен шар из X_k.) Выберем из него минимальное подпокрытие $\{B^{(k)}_\varepsilon(Q_k x_{j_k})\}$, где j_k принимает некоторые N_k значений из набора $1,2,\dots,N$ $(N_k < N)$. Для каждого набора значений $j_1,\dots,j_s$ в исходном покрытии найдется шар $B_\varepsilon(x_j)$, такой, что $Q_k B_\varepsilon(x_j) = B^{(k)}_\varepsilon(Q_k x_{j_k})$ $(k=1,\dots,s)$. Причем разным наборам будут соответствовать разные шары. Это следует из того, что подпокрытия $\{ B^{(k)}_\varepsilon(Q_k x_{j_k})\}$ $(k=1,\dots,s)$ минимальны и, следовательно, для каждого шара из такого подпокрытия найдется элемент из $\mathcal{M}_k$, принадлежащий только данному шару и никакому другому. Из сказанного следует, что $N \ge N_1 \dots N_s$. Поскольку $N_k \ge N(\mathcal{M}_k, \varepsilon)$ $(k=1,\dots,s)$, то отсюда получаем (I6).

Из (I5), (I6) вытекает двусторонняя оценка:

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\ln(\mathcal{M}_k,\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \le \frac{\ln N(\mathcal{M},\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \le \sum_{k=1}^{s} \frac{\ln N(\mathcal{M}_k, \varepsilon/\sqrt{s})}{\ln(\sqrt{s}/\varepsilon) - \ln\sqrt{s}} .$$

Переходя здесь к верхнему пределу при $\varepsilon \to 0$, получим (I7). Лемма доказана.

Для доказательства теорем I и 2 потребуется некоторая информация о введенных в п.2 обобщенных канторовых множествах. Проследим зависимость от ε величины $N(J_{n,m}([a,b]),\varepsilon)$. Подразумевается, что на $\mathbb{R}$ задана стандартная метрика. Поэтому $N(J_{n,m}([a,b]),\varepsilon)$ – это число элементов минимального покрытия $J_{n,m}([a,b])$ замкнутыми интервалами длины 2ε.

Непосредственно из определения (2) нетрудно вывести следующие факты.

$$N(J_{n,m}([a,b]),\varepsilon)=(2m-1)^s, \quad \text{при } 2\varepsilon\in\left[\frac{b-a}{n^s},\frac{b-a}{2m\,n^{s-1}}\right] (s=1,2,\dots).$$

$N(J_{n,m}([a,b]),\varepsilon)$ убывает от $(2m-1)^s$ до $(2m-1)^{s-1}$ на промежутке $2\varepsilon\in\left[\frac{b-a}{2m\,n^{s-1}},\frac{b-a}{n^{s-1}}\right]$ $(s=1,2,\dots)$. На этом промежутке справедливы оценки:

$$\frac{1}{2}(2m-1)^{s-1}\frac{b-a}{n^{s-1}\,2\varepsilon}\leqslant N(J_{n,m}([a,b]),\varepsilon)\leqslant\left[(2m-1)^{s-1}\frac{b-a}{n^{s-1}\cdot 2\varepsilon}\right]+1 \tag{18}$$

(квадратные скобки означают целую часть числа).
Оценка снизу является грубой, но более точная оценка не потребуется.

Обозначим $d=\ln(2m-1)/\ln n$. Из перечисленных фактов следуют оценки:

$$(b-a)^d\leqslant N(J_{n,m}([a,b],\varepsilon)(2\varepsilon)^d\leqslant(2m-1)(b-a)^d. \tag{19}$$

Первая верна при всех $\varepsilon>0$, а вторая – при $\varepsilon\in[0,b-a]$. Отметим, что $N(J_{n,m}([a,b]),\varepsilon)=1$, при $\varepsilon\geqslant b-a$. Из (19) видно, что $h(J_{n,m}([a,b]))=d$ (На самом деле и $\dim_H J_{n,m}([a,b])=d$. См. [I]).

Величина $N(J_{n,m}([a,b]),\varepsilon)(2\varepsilon)^d$, как функция ε, осциллирует. В точках $2\varepsilon_s=(b-a)/n^s$ $(s=1,2,\dots)$ она принимает минимальное значение $(b-a)^d$. На каждом промежутке $2\varepsilon\in[(b-a)/n^s,(b-a)/2mn^{s-1}]$ она растет от $(b-a)^d$ до $(2m-1)(b-a)^d/(2m)^d$. На промежутке $2\varepsilon\in[(b-a)/2mn^{s-1},(b-a)/n^{s-1}]$ она достигает максимального значения, которое не превосходит $(2m-1)(b-a)^d$ и затем убывает до $(b-a)^d$. Из первого неравенства (18) следует оценка снизу:

$$N(J_{n,m}([a,b],\varepsilon)(2\varepsilon)^d\geqslant\frac{1}{2}m^{1-d}(b-a)^d, \text{ при } 2\varepsilon\in\left[\frac{b-a}{2mn^{s-1}},\frac{b-a}{mn^{s-1}}\right]. \tag{20}$$

Для пояснения доказательств теорем I и 2, в заключение данного пункта укажем какие условия необходимы и какие достаточны, для того, чтобы компактное подмножество $\mathfrak{M}$ гильбертова пространства X имело конечную величину $h(\mathfrak{M})$.

В силу (I4), для $h(\mathfrak{M}) = d < \infty$ необходимо, чтобы $h(P_n \mathfrak{M}) \leqslant d$ для всех n. Этого, однако, не достаточно. Поясним, в чем тут дело.

Равенство $h(\mathfrak{M}) = d < \infty$, в силу определения (I), означает, что для любого $\sigma > 0$ существует $\delta(\sigma) > 0$, такое, что

$$N(\mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+\sigma}, \qquad \text{при} \quad \varepsilon < \delta(\sigma).$$

Обозначим $h(P_n \mathfrak{M}) = h_n$. Для любого $\sigma > 0$ существует $\delta_n(\sigma)$ такое, что

$$N(P_n \mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{h_n+\sigma}, \qquad \text{при} \quad \varepsilon < \delta_n(\sigma).$$

Пусть известно, что $h_n \leqslant d < \infty$. Допустим, что существует $\delta_0 > 0$, такое, что $\delta_n(\sigma) \geqslant \delta_0$ для всех n и всех $\sigma > 0$. Тогда для любого n

$$N(P_n \mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+\sigma}, \qquad \text{при} \quad \varepsilon < \delta_0.$$

(Считаем, что $\delta_0 < 1$). Отсюда и из (I3) следует

$$N(\mathfrak{M}, \varepsilon) \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right)^{d+\sigma} \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d+2\sigma}, \quad \text{при} \quad \varepsilon \leqslant \delta(2\sigma) = \min\{\delta_0, (\sqrt{2})^{-1/\sigma}\}.$$

Это означает, что $h(\mathfrak{M}) \leqslant d$.

Итак, из $h(P_n \mathfrak{M}) \leqslant d$ выведено, что $h(\mathfrak{M}) \leqslant d$. В этом выводе предполагалось, что $\delta_n(\sigma) \geqslant \delta_0 > 0$ для всех σ. Нетрудно убедиться, что если найдется хоть одно σ_0, для которого $\delta_n(\sigma_0) \geqslant \delta_0$, то из $h(P_n \mathfrak{M}) \leqslant d$ следует $h(\mathfrak{M}) \leqslant d + \sigma_0$. Однако, может оказаться, что $\delta_n(\sigma) \to 0$, при $n \to \infty$ для всех $\sigma > 0$, и приведенное рассуждение окажется неверным.

4. Доказательства теорем I и 2

В данном пункте P_n – это ортогональный проектор в X_1 на линейную оболочку первых n векторов стандартного ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$: $(e_k)_\ell = \delta_{k\ell}$. Ясно, что P_n также является ортогональным проектором в X_2 на то же подпространство. В дальнейшем все введенные выше объекты, относящиеся к пространству X_i $(i=1,2)$ будем помечать сверху индексом i : $\varepsilon^{(i)}(\mathfrak{M})$, $N^{(i)}(\mathfrak{M},\varepsilon)$. Исключение составляют величины $h(P_n\mathfrak{M})$. Они не зависят от $i=1,2$, так как все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны. Если условие $h(P_n\mathfrak{M})\leqslant d<\infty$ выполнено, то оно выполнено одновременно для X_1 и X_2. Однако, как было объяснено в конце п.3, это условие является лишь необходимым, но не достаточным, для конечности $h^{(i)}(\mathfrak{M})$. Поэтому, может оказаться, что $h^{(1)}(\mathfrak{M})<\infty$, но $h^{(2)}(\mathfrak{M})=\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.

а) Пусть $2\varepsilon\leqslant 1$. Оценим сверху величину $N^{(1)}(\mathfrak{M},\varepsilon)$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$N^{(1)}(\mathfrak{M},\varepsilon)\leqslant N^{(1)}(P_{q_s}\mathfrak{M},\varepsilon/\sqrt{2})\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{s}N\left(J_{n_k,m_k}\left(\left[-\frac{1}{\lambda_{q_k}},\frac{1}{\lambda_{q_k}}\right]\right),\frac{\varepsilon}{\sqrt{2s}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{s_1}(2m_k-1)\left(\frac{2}{\lambda_{q_k}}\right)^{d_k}\left(\frac{\sqrt{2s}}{2\varepsilon}\right)^{d_k}\leqslant\prod_{k=1}^{s_1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{d}{2}}\left(\frac{\sqrt{2s}}{2\varepsilon}\right)^{d}=$$

$$=\left(\frac{2s}{s_1+1}\right)^{\frac{d}{2}}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{d}\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}}{2\varepsilon}\right)^{d}. \tag{21}$$

Поясним эти неравенства. Первое выполняется, в силу (13), при достаточно больших s : $1/\lambda_{q_s}\leqslant\varepsilon/\sqrt{2}$, поскольку $\varepsilon^{(1)}_{q_s}(\mathfrak{M})=1/\lambda_{q_s}$. На втором шаге использовано (15). На третьем шаге использовано второе неравенство (19). Причем s_1 – это наибольшее целое число, такое, что из $k\leqslant s_1$ следует $2\varepsilon\leqslant 2/\lambda_{q_k}$ $(s_1\leqslant s)$. Заметим, что $N(J_{n_k,m_k}([-\frac{1}{\lambda_{q_k}},\frac{1}{\lambda_{q_k}}]),\varepsilon)=1$, при $2\varepsilon\geqslant 2/\lambda_{q_k}$. Наконец, на четвертом шаге использовано условие (5), которое эквивалентно неравенству $(2m_k-1)(2/\lambda_{q_k})^{d_k}\leqslant(k/k+1)^{d/2}$, а также, очевидное неравенство $\sum\limits_{k=1}^{s}d_k<d$.

Из оценки (21) немедленно следует, что $h^{(1)}(\mathfrak{M})\leqslant d$. Остается заметить, что на самом деле $h^{(1)}(\mathfrak{M})=d$. Действительно из (14) и (17) следует: $h^{(1)}(\mathfrak{M})\geqslant h(P_{q_s}\mathfrak{M})=\sum\limits_{k=1}^{s}d_k$, при любом s. Поэтому, $h^{(1)}(\mathfrak{M})\geqslant d$.

б) Допустим, что $A_j\subset X_2$, $j=1,2,\dots$ – произвольная последовательность компактных в X_2 множеств. Докажем, что существует элемент $x\in\mathfrak{M}$, такой, что $x\notin\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j$.

В силу упомянутого в п.3 критерия компактности $\varepsilon^{(2)}_n(A_j)\to 0$ при $n\to\infty$, для любого $j=1,2,\dots$. Рассмотрим последовательность номеров $n = q_k$, определяемую условием (5). Из нее, в силу $\varepsilon_n^{(2)}(A_j) \to 0$, можно выбрать подпоследовательность $\{q_{k(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\varepsilon_{q_{k(j)}}^{(2)}(A_j)\right]^2 \leqslant \frac{1}{4} \quad . \tag{22}$$

Пусть теперь $x = (x_1, x_2, \ldots)$ – последовательность вещественных чисел, определяемая правилом

$$x_q = 0 \quad , \qquad \text{при} \quad q \neq q_{k(j)} ,$$

$$x_{q_{k(j)}} = \frac{1}{\lambda_{q_{k(j)}}} \cdot \frac{\ell_j}{m_{k(j)}} \quad ,$$

где $\ell_j = \min\{\ell : \ell/m_{k(j)} > \varepsilon_{q_{k(j)}}^{(2)}(A_j)\}$.

Убедимся сначала, что $x \in X_2$ и, более того, $x \in \mathfrak{M}$. Для этого достаточно проверить (6), так как (7) следует непосредственно из определения x и множеств $J_{n_k, m_k}([-1/\lambda_{q_k}, 1/\lambda_{q_k}])$. Имеем: $x_{q_{k(j)}} \leqslant \left[\varepsilon_{q_{k(j)}}^{(2)}(A_j) + \frac{1}{m_{k(j)}}\right] \frac{1}{\lambda_{q_{k(j)}}}$. Следовательно, $\lambda_{q_{k(j)}}^2 x_{q_{k(j)}}^2 \leqslant 2\left(\left[\varepsilon_{q_{k(j)}}^{(2)}(A_j)\right]^2 + \frac{1}{m_{k(j)}^2}\right)$. Поэтому, учитывая (3) и (22), получаем $\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{q_{k(j)}}^2 x_{q_{k(j)}}^2 \leqslant$

$$\leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left[\varepsilon_{q_{k(j)}}^{(2)}(A_j)\right]^2 + \frac{1}{m_{k(j)}^2}\right) \leqslant 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 .$$

Остается проверить, что $x \notin A_j$ при любом j . Если $x \in A_j$, то для любого n должно выполняться неравенство $\|P_n^{\perp} x\|_2 \leqslant \varepsilon_n^{(2)}(A_j)$ и, следовательно, $\lambda_n x_n \leqslant \varepsilon_n^{(2)}(A_j)$. Но, в силу определения x ,

$$\lambda_{q_{k(j)}} x_{q_{k(j)}} = \ell_j / m_{k(j)} > \varepsilon_{q_{k(j)}}^{(2)}(A_j) .$$

Теорема I доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

а) Первое утверждение доказывается точно так же, как и первое утверждение теоремы I. Действительно, в этом доказательстве использовались условия (4) и (5). Но (9) совпадает с (4), а из (I0) и (II) следует неравенство $\mu_k \geqslant 2n_k\left(\frac{k+1}{k}\right)^{d/2d_k}$, аналогичное (5).

б) Достаточно привести пример последовательности $\varepsilon_s \to 0$ при $s \to \infty$, такой, что

$$\frac{\ln N^{(2)}(\mathfrak{M}, \varepsilon_s)}{\ln(1/\varepsilon_s)} \longrightarrow \infty \,. \tag{23}$$

Положим $\varepsilon_s = 1/a_s m$ и докажем (23).

Заметим, что при любом ε и любом s

$$N^{(2)}(\mathfrak{M},\varepsilon) \geqslant N^{(2)}(P_{q_s}\mathfrak{M},\varepsilon) \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{s} N\left(J_{n_k,m}\left(\left[-\frac{1}{\mu_k},\frac{1}{\mu_k}\right]\right),\frac{\varepsilon}{\lambda_{q_k}}\right) = \prod_{k=1}^{s} N\left(J_{n_k,m}\left(\left[-\frac{1}{a_k},\frac{1}{a_k}\right]\right),\varepsilon\right). \tag{24}$$

Здесь первое неравенство следует из (14). На втором шаге использовано (15) и то обстоятельство, что проекция любого шара $B_\varepsilon^{(2)}(x) = \{ y \in X_2 : \|y - x\|_2 \leqslant \varepsilon \}$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_{q_k}, представляет собой интервал длиной $2\varepsilon/\lambda_{q_k}$. Наконец, последнее равенство отражает тот факт, что при увеличении масштаба в λ_{q_k} раз число элементов покрытия не изменяется.

Напомним, что в силу первого неравенства (19)

$$N\left(J_{n_k,m}\left(\left[-\frac{1}{a_k},\frac{1}{a_k}\right]\right),\varepsilon\right)(2\varepsilon)^{d_k} \geqslant \left(\frac{2}{a_k}\right)^{d_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant s\,. \tag{25}$$

Из (20) с $s=1$ следует, что для k, таких, что $2\varepsilon \in \left[\frac{1}{a_k m},\frac{2}{a_k m}\right]$, справедливо неравенство

$$N\left(J_{n_k,m}\left(\left[-\frac{1}{a_k},\frac{1}{a_k}\right]\right),\varepsilon\right)(2\varepsilon)^{d_k} \geqslant \frac{1}{2} m^{1-d_k}\left(\frac{2}{a_k}\right)^{d_k}. \tag{26}$$

Пусть теперь в (24), (25), (26) $\varepsilon = \varepsilon_s$. Заметим, что условие $2\varepsilon_s \in [1/a_k m, 2/a_k m]$ выполняется при $2^{-1/\alpha} s \leqslant k \leqslant s$. Число таких k равно $L(s) = [(1-2^{-1/\alpha})s]$.

Учитывая это замечание и подставляя (25), (26) в (24), получим

$$N^{(2)}(\mathfrak{M},\varepsilon_s) \geqslant \prod_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{2\varepsilon_s}\right)^{d_k}\left(\frac{2}{a_k}\right)^{d_k} m^{-d}\left(\frac{1}{2}m\right)^{L(s)}. \tag{27}$$

Здесь учтено, что $\prod\limits_{k=1}^{s} m^{-d_k} \geqslant m^{-d}$, так как $\sum\limits_{k=1}^{s} d_k \leqslant d$.

Существует s_0, такое, что из $s \geqslant s_0$ следует $2/a_s \leqslant 1$ и подавно

$2\varepsilon_s \leq 1$. Поэтому, $\prod_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{2\varepsilon_s}\right)^{d_k} \geqslant \prod_{k=1}^{s_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_s}\right)^{d_k}$. Из (8) следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} d_k \ln a_k = C < \infty$ и, следовательно, $\prod_{k=1}^{s}\left(\frac{2}{a_k}\right)^{d_k} \geqslant \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{a_k}\right)^{d_k} = 2^d e^{-C} > 0$. Обозначая $C_2 = \prod_{k=1}^{s_0}\left(\frac{1}{2\varepsilon_s}\right)^{d_k} m^{-d} 2^d e^{-C}$, получим из (27):

$$N^{(2)}(\mathcal{M}, \varepsilon_s) \geqslant C_2\left(\tfrac{1}{2}m\right)^{L(s)} . \tag{28}$$

Остается заметить, что из (28) следует (23), так как $\frac{1}{2}m > 1$ и $L(s)/\ln s \longrightarrow \infty$ при $s \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Отметим, что утверждение б) теоремы 2 верно и при $m = 2$. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно в (20) заменить множитель I/2 на любое число, большее I/2, взяв для этого ε из чуть более узкого интервала.

Содержание настоящей работы представляет собой ответ на вопрос, поставленный перед автором О.А.Ладыженской.

Литература

I. Б и л л и н г с л е й П. Эргодическая теория и информация. М., I969.

2. Б а б и н А.В., В и ш и к М.И. Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. - Успехи мат. наук, I983, т.38, вып.4, с.I32-I87.

3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О нахождении минимальных глобальных В -аттракторов для полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для нелинейных диссипативных уравнений с частными производными. - Препринт ЛОМИ Р-I-87, Л., I987.

4. К о л м о г о р о в А.Н., Т и х о м и р о в В.М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. - Успехи мат.наук, I959, т.I4, вып.2, с.3-86.

5. M a n é R. On the dimension of the compact invariant sets of certain non linear maps. - Lecture Notes in Math., 1981, v.898, p.230-242.

6. H a l e J.K., M a g a l h a e s L.T. O l i v a W.M. An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems - Geometric Theory. Appl.Math.Sciences. v.47, 1984.

7. Л ю с т е р н и к Л.А., С о б о л е в В.И. Элементы функционального анализа. М., I965.