

УДК 519.634

О МАЖОРАНТНЫХ СХЕМАХ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ (ХАОТИЧЕСКИХ) СЕТКАХ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

© 1999 г. О. М. Белоцерковский*, А. С. Холодов**

(*123865 Москва, 2-я Брестская ул., 19/18, Ин-т автоматизации проектирования РАН;

**141700 Долгопрудный, М. о., Институтский пр., 9, МФТИ)

Поступила в редакцию 25.02.99 г.

На основе анализа разностных схем в пространстве неопределенных коэффициентов для уравнений гиперболического и параболического типов разработаны явные разностные схемы, обладающие (в линейном приближении для задачи Коши) свойствами абсолютной устойчивости и мажорантности, пригодные для расчетов на неструктурированных (хаотических) сетках в сложных областях со многими границами, не требующие предварительной информации о соседстве сеточных узлов. Аналогичные схемы построены для уравнений эллиптического типа. Приводятся результаты тестирования схем.

ВВЕДЕНИЕ

При численном решении задач со сложной, в том числе многосвязной областью интегрирования далеко не всегда удается построить преобразование независимых переменных, отображающее исходную область интегрирования на более удобную для введения регулярной разностной сетки. Кроме того, уравнения в новых переменных могут иметь “плохие” коэффициенты, дополнительные члены, процесс построения таких отображений может занимать существенную часть общего объема вычислений и т.п., что существенно осложняет численное решение подобных задач. В этом отношении предпочтительнее методы типа конечных элементов (конечных объемов), в которых сложная область интегрирования не преобразуется к каноническому виду, а покрывается нерегулярной (неструктурированной) сеткой. Однако для многих важных свойств численных методов, хорошо разработанных и сравнительно легко реализуемых в случае регулярных сеток, заранее не очевидны пути их конструктивного обобщения на случай таких неструктурированных сеток.

В данной работе на основе предложенного в [1] анализа разностных схем в пространстве неопределенных коэффициентов для многомерных уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов рассматриваются мажорантные (положительно-определенные, по Фридрихсу [2]) разностные схемы на неструктурированных сетках и некоторые их приложения.

1. МАЖОРАНТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1.1. При численном решении задач, содержащих в области интегрирования разрывы искомых функций и другие особенности, важную роль играют разностные схемы с положительной аппроксимацией (по другой терминологии – монотонные или мажорантные схемы). Для уравнений гиперболического типа понятие о таких схемах впервые введено Фридрихсом [2]. К этому классу принадлежат известные методы Куранта–Изаксона–Риса [3], С.К. Годунова [4], Лакса [5], сеточно-характеристический [6] и ряд других известных численных методов. Как было доказано в 1959 г. Годуновым для простейшего одномерного линейного уравнения переноса $u_t + \lambda u_x = 0$, $\lambda = \text{const}$, и для явных двуслойных линейных разностных схем на регулярных сетках

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} u_{m+\mu}^n, \quad \mu = 0, \pm 1, \dots,$$

схемы с положительной аппроксимацией, для которых все коэффициенты $\alpha_{\mu} \geq 0$, могут иметь только первый порядок точности. Это, конечно, несколько ограничивает область их применения, однако и при построении разностных схем высокого порядка точности разностные схемы с

положительной аппроксимацией являются той основой, на которой строятся схемы высокого порядка точности с хорошими диссипативными свойствами.

В [1], [7]–[11] для уравнений и систем гиперболического типа была построена общая теория линейных разностных схем с положительной аппроксимацией и близких к ним схем более высокого, чем первый, порядка точности, основанная на использовании метода неопределенных коэффициентов и введении линейных пространств этих коэффициентов. Основные результаты исследований, изложенные в обобщающей монографии [12], проиллюстрируем на примере многомерного уравнения переноса

$$u_t + \lambda_1 u_{x_1} + \lambda_2 u_{x_2} = 0, \quad \lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_2 = \text{const}, \quad (1)$$

лежащего в основе широко распространенных в самых разных практических приложениях систем уравнений гиперболического типа (уравнения газовой динамики, многие модели механики деформируемого твердого тела, уравнения Максвелла и др.).

Если в области интегрирования ввести равномерную разностную сетку $t^n = n\tau$ ($n = 0, 1, \dots$), $x_{1m} = mh_1$ ($m = 0, \pm 1, \dots$), $x_{2l} = lh_2$ ($l = 0, \pm 1, \dots$) и выбрать произвольную совокупность из I сеточных узлов (сеточный шаблон) $\{n + \nu_i, m + \mu_{1i}, l + \mu_{2i}\}$ ($\nu_i = 1, 0, -1, \dots$; $\mu_{1i}, \mu_{2i} = 0, \pm 1, \dots$; $i = 1, 2, \dots, I$), то все линейные разностные схемы на выбранном сеточном шаблоне можно записать в виде

$$u_{ml}^{n+1} = \sum_{i=1}^I \alpha_i u_{m+\mu_{1i}, l+\mu_{2i}}^{n+\nu_i}, \quad (2)$$

где α_i ($i = 1, 2, \dots, I$) – неопределенные коэффициенты, совокупность которых $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_I\}$ будем рассматривать в качестве I -мерного линейного пространства с какой-либо (например, евклидовой) метрикой в нем.

Разлагая $u_{m+\mu_{1i}, l+\mu_{2i}}^{n+\nu_i}$ в ряд Тейлора относительно некоторой узловой точки (для линейных уравнений с постоянными коэффициентами выбор этой точки безразличен), например относительно (t^n, x_{1m}, x_{2l}) , и используя (1) и его следствия типа $u_{tx_1} = -\lambda_1 u_{x_1 x_1} - \lambda_2 u_{x_2 x_1}, \dots$ (т.е. рассматривая аппроксимацию на решениях (1)), получаем первое дифференциальное приближение разностных схем (2):

$$u_t + \lambda_1 u_{x_1} + \lambda_2 u_{x_2} = \frac{\delta_0}{\tau} u + \frac{h_1 \delta_1}{\tau} u_{x_1} + \frac{h_2 \delta_2}{\tau} u_{x_2} + \frac{h_1^2 \delta_{11}}{2\tau} u_{x_1 x_1} + \frac{h_1 h_2 \delta_{12}}{\tau} u_{x_1 x_2} + \frac{h_2^2 \delta_{22}}{2\tau} u_{x_2 x_2} + \dots \quad (3)$$

Для того чтобы имела место аппроксимация с минимальным, первым порядком точности, на неопределенные коэффициенты α_i следует наложить ограничения

$$\delta_0 = -1 + \sum_{i=1}^I \alpha_i = 0, \quad \delta_j = \sigma_j + \sum_{i=1}^I (\mu_{ji} - \sigma_j \nu_i) \alpha_i = 0, \quad \sigma_j = \lambda_j \tau / h_j, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

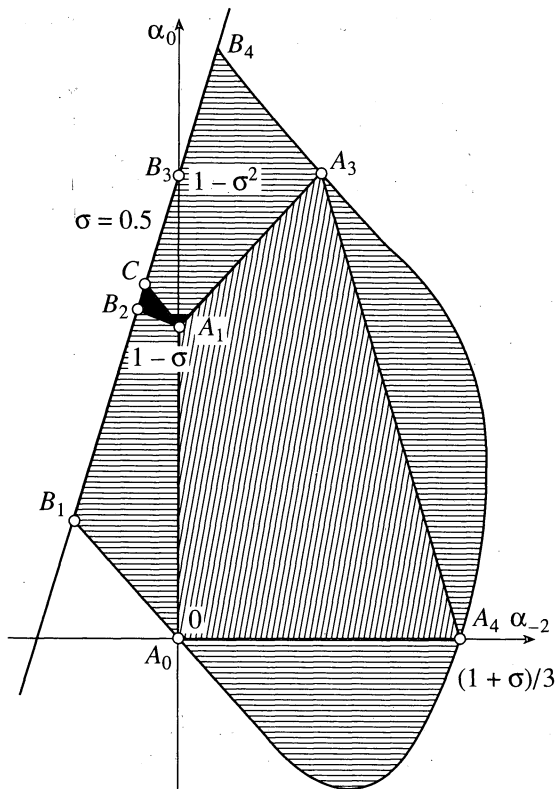
которые являются линейными относительно коэффициентов α_i уравнениями. Наряду с I -мерным пространством α будем рассматривать также линейное пространство $\tilde{\alpha} = \{\alpha_4, \dots, \alpha_I\}$ с размерностью на три меньше, которое получается, если с использованием (4) исключить три каких-либо коэффициента, например $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Любая точка в пространстве $\tilde{\alpha}$ является разностной схемой первого порядка аппроксимации для (1).

Условиями второго порядка аппроксимации будут три также линейных относительно коэффициентов α_i , $i = 1, 2, \dots, I$, уравнения:

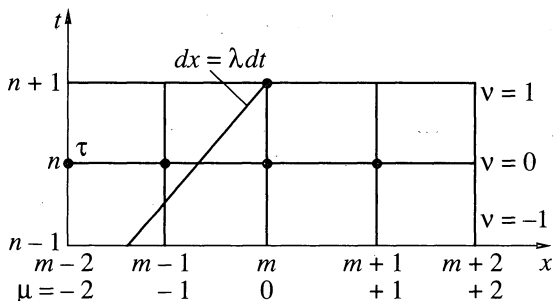
$$\delta_{jj} = -\sigma_j^2 + \sum_{i=1}^I (\mu_{ji} - \sigma_j \nu_i)^2 \alpha_i = 0, \quad j = 1, 2, \quad \delta_{12} = -\sigma_1 \sigma_2 + \sum_{i=1}^I (\mu_{1i} - \sigma_1 \nu_i)(\mu_{2i} - \sigma_2 \nu_i) \alpha_i = 0, \quad (5)$$

или аналогичные уравнения относительно оставшихся свободными коэффициентов $\alpha_4, \dots, \alpha_I$:

$$(\tilde{\alpha}, C_{11}) + b_{11} = 0, \quad (\tilde{\alpha}, C_{12}) + b_{12} = 0, \quad (\tilde{\alpha}, C_{22}) + b_{22} = 0, \quad C_{pr} = \{C_{pr}^A, \dots, C_{pr}^I\}, \quad p, r = 1, 2,$$



Фиг. 1. Области устойчивости и мажорантности разностных схем в пространстве неопределенных коэффициентов.



Фиг. 2.

где компоненты C_{pr}^i векторов C_{pr} определяются через $\mu_{1i}, \mu_{2i}, \nu_i, \sigma_1, \sigma_2$ из соотношений (5). В пространстве $\tilde{\alpha}$ линейные уравнения (5) определяют три пересекающиеся гиперплоскости. Если сеточный шаблон позволяет построить схемы более высокого, чем второй, порядка точности, то на коэффициенты α_i можно налагать дальнейшие ограничения (линейные относительно этих коэффициентов уравнения), пока не будут исчерпаны все допускаемые выбранным шаблоном возможности, т.е. пока в пространстве $\tilde{\alpha}$ не будет найдена точка, соответствующая максимально точной схеме, допускаемой этим шаблоном.

В качестве примера на фиг. 1 для наглядности в случае одномерного уравнения и пятиточечного сеточного шаблона с узлами ($I = 4$): $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), \dots, (t^n, x_{m+1})$ (см. фиг. 2) в координатах $\{\alpha_{-2}, \alpha_0\}$ показана прямая B_1B_4 , соответствующая схемам второго порядка точности (в данном случае одно уравнение (5)). Точка C на этой прямой соответствует единственной на данном шаблоне схеме третьего порядка точности, точка B_3 – известная схема Лакса–Вендроффа или Мак-Кормака, что в линейном одномерном случае одно и то же.

Введение линейного пространства коэффициентов разностных схем позволяет, используя обширный аппарат линейной алгебры, решить ряд достаточно общих задач построения эффективных разностных схем. При этом используется естественное предположение о том, что близким в пространстве точкам соответствуют близкие по своим свойствам (точности, устойчивости, монотонности и т.п.) разностные схемы. При таком подходе многие параметры разностных схем, которые обычно характеризуются лишь на качественном уровне (порядок аппроксимации, устойчивость, монотонность), можно оценивать более точно, количественно. Ниже рассматриваются некоторые из таких задач.

1.2. Присоединяя к условиям аппроксимации (4) неравенства

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (6)$$

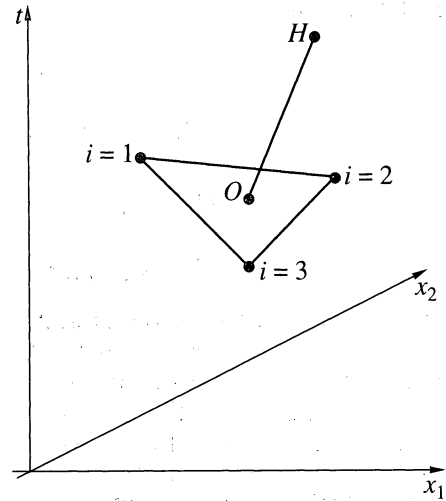
и решая соответствующую систему (4), (6), можно для произвольных сеточных шаблонов (в том числе неявных и многослойных) найти все множество схем с положительной аппроксимацией, играющих большую роль в вычислительной практике. Минимальный сеточный шаблон, на котором можно построить для (1) разностную схему, должен включать не лежащие в одной плоскости рассчитываемую точку $H(t^{n+1}, x_{1m}, x_{2l})$ и еще три узла $(t^{n+\nu_j}, x_{1m+\mu_j}, x_{2l+\mu_j})$ ($i = 1, 2, 3$) (чтобы система (4) имела решение). А для того чтобы разностные схемы (2), (4) удовлетворяли еще и условиям (6), необходимо и достаточно, чтобы характеристика HO уравнения (1) пересекалась с плоскостью в пространстве $\{t, x_1, x_2\}$, проведенной через узлы $i = 1, 2, 3$, внутри или на границах треугольника с вершинами в этих точках (см. фиг. 3).

Таким схемам в пространстве $\tilde{\alpha}$ соответствуют вершины замкнутого многогранника разностных схем с положительной аппроксимацией $\tilde{\alpha}_b$. Общее же решение задачи (4), (6) после того, как найдены все допускаемые выбранным сеточным шаблоном вершины $\tilde{\alpha}_b$, строится в виде ли-

нейной комбинации с неотрицательными коэффициентами γ_b , в сумме равными единице, этих частных решений $\tilde{\alpha}_b$, т.е.

$$\bar{\alpha} = \sum_b \gamma_b \alpha_b, \quad \gamma_b \geq 0, \quad \sum_b \gamma_b = 1. \quad (7)$$

Сформулированный результат не зависит от размерности уравнения (1), регулярности разностной сетки и положения точки H относительно узлов сеточного шаблона. На фиг. 1 множество схем с положительной аппроксимацией составляет многогранник $OA_1A_3A_4$ с вертикальной штриховкой. Точка O соответствует известной схеме из [5], точка A_1 – известная схема Куранта–Изаксона–Риса (“явный угол”) [3]. Горизонтальной штриховкой отмечена область устойчивых разностных схем на данном сеточном шаблоне, полученная с использованием спектрального критерия устойчивости разностных схем (2) в случае сеточного шаблона, показанного на фиг. 2. Естественно, множество схем с положительной аппроксимацией содержится внутри области устойчивых схем, так как (6) является также достаточным условием устойчивости. Заметим, что используемому часто в качестве необходимого условия устойчивости разностных схем условию неотрицательности коэффициента аппроксимационной вязкости в (3), т.е. $\delta_{11} \geq 0, \delta_{22} \geq 0$, соответствует на фиг. 1 полуплоскость, находящаяся справа от прямой B_1B_4 .



Фиг. 3.

1.3. Коэффициенты $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}$ в (3) при вторых производных $u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_2}$ в пространстве $\tilde{\alpha}$ для схем первого порядка точности являются расстоянием (с учетом знака) от какой-либо точки в $\tilde{\alpha}$ до гиперплоскостей $\delta_{11} = 0, \delta_{12} = 0, \delta_{22} = 0$ и в определенной мере количественно характеризуют реальную точность разностной схемы. Можно строго показать, что для схем (2), (4), (6) с положительной аппроксимацией $\delta_{kk}(\bar{\alpha}) \geq 0$ ($k = 1, 2$), т.е. множества схем с порядком аппроксимации выше первого и схем с положительной аппроксимацией не имеют пересечений. Равенство достигается только в тривиальном случае, когда характеристика уравнения (1) точно попадает в один из узлов сеточного шаблона. Тогда эти множества соприкасаются в одной из вершин. Соответственно, отмечавшаяся выше теорема Годунова при использовании данного подхода может быть доказана в самом общем случае.

1.4. Опираясь на результаты пп. 1.1–1.3, можно сформулировать и в общем случае решить следующие две сопряженные задачи. Во-первых, среди всех схем с положительной аппроксимацией найти ту единственную, которой в пространстве $\tilde{\alpha}$ соответствует ближайшая к пересечению гиперплоскостей (5) вершина замкнутого многогранника (4), (6). Т.е. для произвольного сеточного шаблона найти наиболее точную разностную схему с положительной аппроксимацией (с минимальными коэффициентами аппроксимационной вязкости в (3)). Для этого следует решить типичную в линейном программировании задачу оптимизации, например, функционала:

$$\bar{\delta} = [(1 + \sigma_2^2)\delta_{11} - 2\sigma_1\sigma_2\delta_{12} + (1 + \sigma_1^2)\delta_{22}]/(1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \rightarrow \min. \quad (8)$$

Решение задачи (4), (6), (8) можно сформулировать следующим образом: наиболее точной разностной схемой с положительной аппроксимацией является схема, построенная на сеточном шаблоне, удовлетворяющем условиям (7), причем узловые точки $i = 1, 2, 3$ должны быть в пространстве $\{t, x_1, x_2\}$ ближайшими к характеристике уравнения (1).

Соответствующую точку в пространстве $\tilde{\alpha}$ обозначим через $\tilde{\alpha}_0^1$. На фиг. 1 такой схеме соответствует точка A_1 (схема Куранта–Изаксона–Риса [3]).

1.5. Опуская из найденной точки $\tilde{\alpha}_0^1$ нормаль на пересечение гиперплоскостей (5), т.е. выбирая в пространстве $\tilde{\alpha}$ ближайшую к $\tilde{\alpha}_0^1$ точку, лежащую на пересечении этих трех

гиперплоскостей:

$$\tilde{\alpha}_0^2 = \tilde{\alpha}_0^1 + \gamma_{11} C_{11} + \gamma_{12} C_{12} + \gamma_{22} C_{22}, \quad (9)$$

$$(C_{11}, C_{11})\gamma_{11} + (C_{12}, C_{11})\gamma_{12} + (C_{22}, C_{11})\gamma_{22} + b_{11} + (\alpha_0^1, C_{11}) = 0,$$

$$(C_{11}, C_{12})\gamma_{11} + (C_{12}, C_{12})\gamma_{12} + (C_{22}, C_{12})\gamma_{22} + b_{12} + (\alpha_0^1, C_{12}) = 0,$$

$$(C_{11}, C_{22})\gamma_{11} + (C_{12}, C_{22})\gamma_{12} + (C_{22}, C_{22})\gamma_{22} + b_{22} + (\alpha_0^1, C_{22}) = 0,$$

для каждого сеточного шаблона можно построить в определенном смысле оптимальную разностную схему второго порядка точности. Такие схемы, как показали многочисленные примеры расчетов, из всех линейных схем второго порядка точности дают наименее осциллирующие на разрывах решения. Если сеточный шаблон допускает построение на нем не единственной схемы более высокого (выше второго) порядка точности, то аналогичными построениями могут быть получены такие “наименее осциллирующие на разрывах” схемы повышенного порядка точности. На фиг. 1 оптимальной схеме второго порядка точности соответствует точка B_2 (см. [7]).

1.6. В вычислительной практике получили широкое распространение, особенно в последнее время, так называемые гибридные разностные схемы (первая схема такого рода принадлежит, по-видимому, Р.П. Федоренко (см. [13]), другим примером таких схем являются популярные сейчас TVD-схемы). В этих схемах для регуляризации разрывных численных решений и устранения нефизических осцилляций, возникающих при численном расчете разрывов сквозным образом, используется какая-либо схема высокого порядка точности в области гладкого решения и переход к той или иной монотонной схеме первого порядка вблизи разрывов. В таких схемах сочетаются положительные свойства обеих используемых опорных схем, т.е. получается практически монотонное решение и при этом крутизна численного фронта разрыва остается такой же, как в схемах высокого порядка точности. В рамках данного подхода построение гибридных схем сводится к выбору двух опорных схем-точек в пространстве $\tilde{\alpha}$, одна из которых $\tilde{\alpha}_A$ является схемой с положительной аппроксимацией, а другая $\tilde{\alpha}_B$ имеет второй или более высокий порядок аппроксимации, и к построению однопараметрического семейства схем

$$\tilde{\alpha}_G = \gamma \tilde{\alpha}_A + (1 - \gamma) \tilde{\alpha}_B, \quad (10)$$

которому в пространстве $\tilde{\alpha}$ соответствует отрезок AB . Параметр γ следует связать с поведением искомого решения так, чтобы в области гладкого решения $\gamma = 0$, а вблизи разрыва $\gamma \approx 1$. Естественно ожидать, что наилучшие результаты будут достигнуты при использовании оптимальных схем в качестве опорных, обсуждавшихся в пп. 1.4, 1.5, т.е. при $\tilde{\alpha}_A = \tilde{\alpha}_0^1$, $\tilde{\alpha}_B = \tilde{\alpha}_0^2$ (на фиг. 1 такой гибридной схеме соответствует отрезок A_1B_2). Возможны и другие варианты гибридных схем, например с более чем двумя опорными схемами.

1.7. Таким образом, анализ разностных схем в пространстве коэффициентов позволяет более целенаправленно искать разностные схемы с нужными свойствами, проводить ту или иную их оптимизацию, если удастся сформулировать критерий оптимальности того или иного свойства разностной схемы, и т.д. В частности, ясно, что для рассмотренного примера поиск эффективных разностных схем следует вести вблизи треугольника A_1B_2C , включающего достаточно разнообразный по своим свойствам набор разностных схем (от монотонной схемы (точка A_1) до наиболее точной на этом шаблоне схемы с третьим порядком аппроксимации (точка C)).

В линейном случае для обобщения рассматриваемого подхода, например на случай систем уравнений гиперболического типа, наиболее естественный путь – использование характеристических свойств этих уравнений, т.е. расщепление систем вида $v_t + Av_x = 0$ на совокупность уравнений переноса $u_{jt} + \lambda_j u_{jx} = 0$, $u_j = \omega_j v$, где ω_j – линейно независимые левые собственные векторы матрицы A , определяемые из совокупности однородных систем $\omega_j(A - \lambda_j E) = 0$, λ_j – ее собственные значения, являющиеся решениями характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, u_j – инварианты Римана. Этот же подход возможен и для многомерных систем уравнений гиперболического типа

$$v_t + A_1 v_{x_1} + A_2 v_{x_2} + \dots = 0, \quad A_k = \{a_{pq}^k\}, \quad k = 1, 2, \dots, p, q = 1, 2, \dots, J, \quad v = \{v_1, \dots, v_J\}, \quad (11)$$

если только матрицы A_k попарно коммутируют, т.е.

$$A_1 A_2 = A_2 A_1, \dots \tag{12}$$

В последнем случае в системе (11) матрицы $A_k = \Omega_k^{-1} \Lambda_k \Omega_k$, $\Omega_k = \{\omega_j^k\}$, $\Lambda_k = \{\lambda_j^k\}$, имеют один и тот же базис из собственных векторов $\Omega = \Omega_k$ и система (11) при $a_{pq}^k = \text{const}$ расщепляется на J независимых многомерных уравнений переноса (1):

$$u_{jt} + \lambda_j^1 u_{jx_1} + \lambda_j^2 u_{jx_2} + \dots = 0, \quad u_j = \omega_j v,$$

для каждого из которых можно воспользоваться всеми предыдущими построениями и затем (уже на разностном уровне) вернуться к исходной системе (11). При таком подходе аналог разностных схем (2) для системы (11) имеет вид

$$v_{ml}^{n+1} = \sum_{i=1}^I \Omega^{-1} B_i \Omega v_{m+\mu_{1i}, l+\mu_{2i}}^{n+v_i} \tag{13}$$

с диагональными матрицами $B_i = \{\alpha_j^i\}$, $j = 1, 2, \dots, J$, составленными из рассмотренных ранее коэффициентов α_j^i , и для случая систем (11), (12) сохраняются все свойства, закладываемые в разностные схемы для простейших уравнений переноса (1). Выбор коэффициентов α_j^i может быть разным для каждого j , т.е. для каждого из характеристических направлений системы (11).

Другой путь (например, при $A_p A_q \neq A_q A_p$, что почти всегда имеет место на практике) – использование методов расщепления по пространственным переменным, в частности таких, которые обеспечивают сохранение мажорантности разностной схемы и в многомерном случае, если она имеет место для соответствующей одномерной системы (например, типа предложенного в [1] или расщепление системы (11) на последовательность одномерных систем [14]).

В качестве примера рассмотрим явную абсолютно устойчивую (в линейном приближении) и абсолютно мажорантную (т.е. мажорантную при любом шаге интегрирования по времени τ) явную схему для системы (11) с не коммутирующими матрицами A_k . Для этого представим систему (11) в виде линейной комбинации одномерных операторов с неотрицательными коэффициентами γ_k , в сумме равными единице:

$$\gamma_1(v_t + D_1 v_{x_1}) + \gamma_2(v_t + D_2 v_{x_2}) + \dots = 0, \quad \gamma_k \geq 0, \quad \sum_k \gamma_k = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{14}$$

$$D_k = \frac{1}{\gamma_k} A_k = \frac{1}{\gamma_k} \Omega_k^{-1} \Lambda_k \Omega_k = \Omega_k^{-1} \tilde{\Lambda}_k \Omega_k, \quad \tilde{\Lambda}_k = \{\tilde{\lambda}_j^k\} = \frac{1}{\gamma_k} \Lambda_k = \left\{ \frac{\lambda_j^k}{\gamma_k} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Каждый из одномерных операторов в (14) представим в характеристической форме:

$$\sum_k \gamma_k \Omega_k^{-1} (\Omega_k v_t + \tilde{\Lambda}_k \Omega_k v_{x_k}) = \sum_k \gamma_k \Omega_k^{-1} \left\{ \omega_j^k \frac{dv}{dt_j^k} \right\} = 0, \tag{15}$$

где $\{\omega_j^k dv/dt_j^k\}$ – вектор, компонентами которого являются скалярные произведения векторов ω_j^k и $dv/dt_j^k = \partial v/\partial t + \tilde{\lambda}_j^k \partial v/\partial x_k$, т.е. производных вдоль “характеристик” с уравнениями

$$dx_k = \lambda_j^k dt. \tag{16}$$

Аппроксимируя (15) в произвольной точке $H(t^{n+1}, x_{1H}, x_{2H})$ рассчитываемого слоя $t = t^{n+1} = t^n + \tau$ с использованием $dv/dt_j^k = (v_H^{n+1} - v_{kj}^n)/\tau$, где v_{kj}^n – значение сеточной функции на слое $t = t^n$ в точке пересечения “характеристики” (16) с этой плоскостью, т.е. в точке с координатами

$$t = t^n, \quad x_{kj} = x_{kH} - \tilde{\lambda}_j^k \tau, \quad x_{mj} = x_{mH} \quad (m \neq k), \tag{17}$$

получаем

$$\sum_k \gamma_k \Omega_k^{-1} \left\{ \omega_{kj} \frac{(v_H^{n+1} - v_{kj}^n)}{\tau} \right\} = 0.$$

Отсюда следует

$$v_H^{n+1} = \sum_k \gamma_k \Omega_k^{-1} \{ \omega_{kj} v_{kj}^n \}. \quad (18)$$

Используя в соответствии с построениями пп. 1.1–1.6 монотонную кусочно-линейную “треугольную” интерполяцию для вычисления v_{kj}^n в точках (17) (например, в случае двух пространственных координат x_1, x_2)

$$v_{kj}^n = \alpha_{kj}^1 v_{i_{kj}^1}^n + \alpha_{kj}^2 v_{i_{kj}^2}^n + \alpha_{kj}^3 v_{i_{kj}^3}^n, \quad \alpha_{kj}^m \geq 0, \quad \sum_{m=1}^3 \alpha_{kj}^m = 1, \quad (19)$$

имеем в случае задачи Коши для (11) с учетом

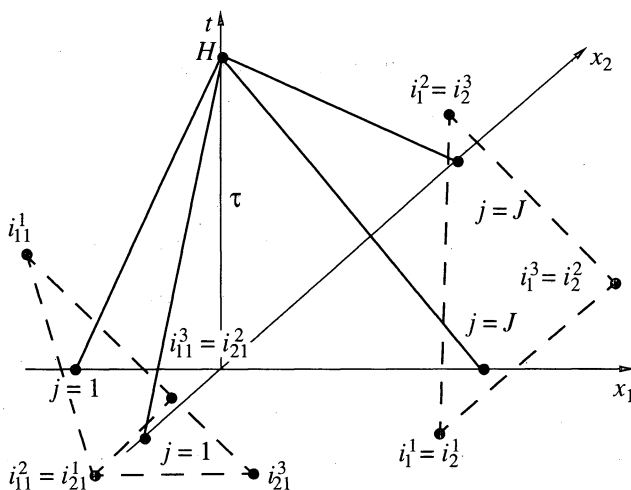
$$\sum_k \gamma_k \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^3 \Omega_k^{-1} C_{kj}^m \Omega_k = \sum_k \gamma_k \Omega_k^{-1} \Omega_k = \sum_k \gamma_k E = E$$

положительно-определенную по Фридрихсу (т.е. мажорантную) при любых τ разностную схему

$$v_H^{n+1} = \sum_k \gamma_k \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^3 \Omega_k^{-1} C_{kj}^m \Omega_k v_{i_{kj}^m}^n, \quad C_{kj}^m = \{0, \dots, 0, \alpha_{kj}^m, 0, \dots, 0\}, \quad \alpha_{kj}^m \geq 0, \quad (20)$$

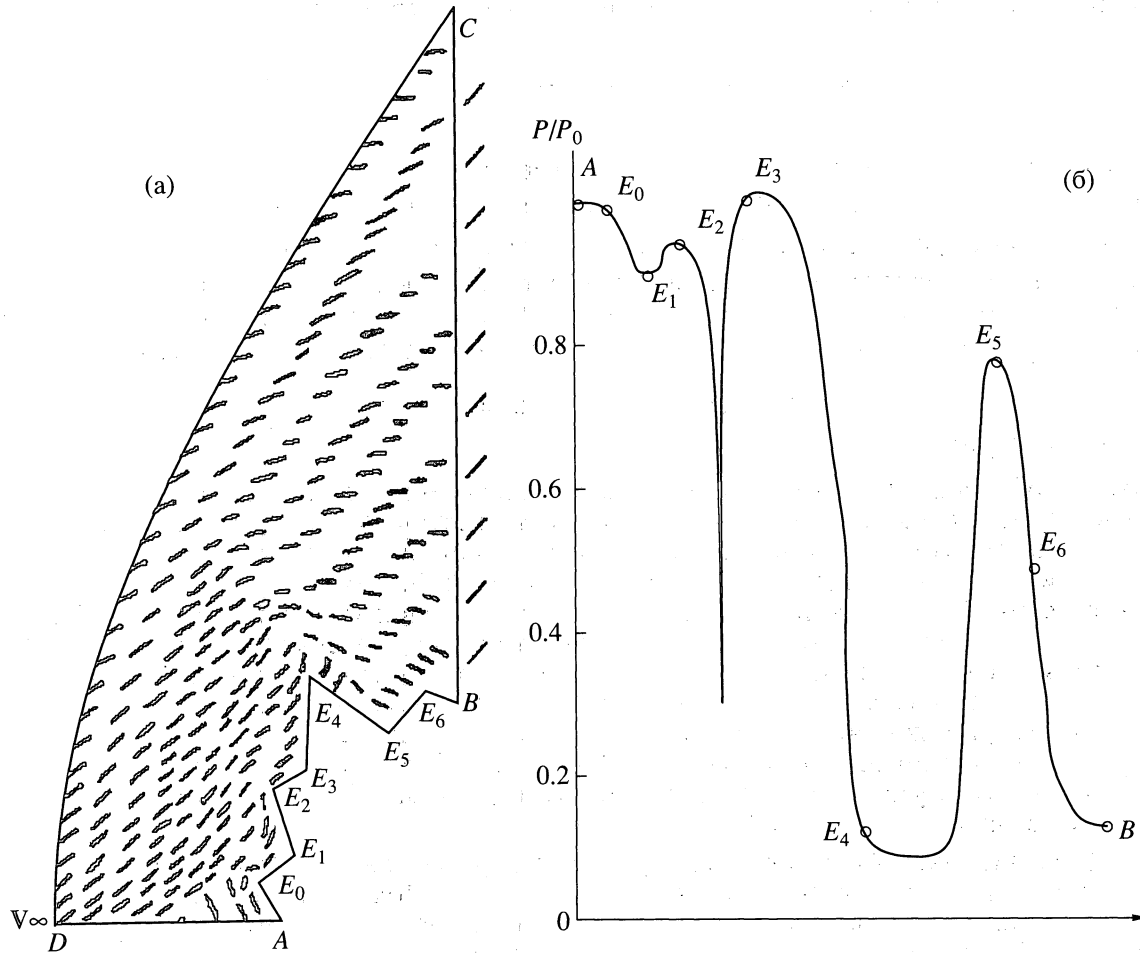
где J -мерные диагональные матрицы C_{kj}^m имеют лишь по одному ненулевому (неотрицательно-му) коэффициенту α_{kj}^m в j -й строке (столбце).

Наиболее сложным элементом в этом методе, как и во всех аналогичных методах на неструктурированных сетках, начало которым положено еще в 60-х годах (метод “свободных точек” В.Ф. Дьяченко [15] и др.), является алгоритм выбора ближайших к интерполируемым точкам (17) (и включающих их) треугольников из узловых точек разностной сетки (фиг. 4). Разработан соответствующий алгоритм поиска, затрачивающий число операций, пропорциональное общему числу узлов разностной сетки, и не требующий информации об их “соседстве”. Это позволяет использовать независимое построение сеток на временных слоях $t = \text{const}$, сквозную одноиндексную нумерацию узлов и т.д. Построение вычислительного алгоритма для расчета граничных точек аналогично описанному выше и включает локальный переход от (t, x_1, x_2) к новой системе координат, в которой рассчитываемый элемент границы является одной из координатных поверхностей, а также аппроксимации лишь части условий совместности (15) в дополнение к соответствующим граничным условиям.



Фиг. 4. Сеточный шаблон для гиперболических систем при неструктурированных сетках.

1.8. Описанный в п. 1.7 метод реализован для случая трех независимых переменных. Программа на языке ФОРТРАН-77 позволяет использовать произвольное число границ области интегрирования (задав их число и координаты граничных точек), различные квазилинейные системы уравнений гиперболического типа (11) (задав матрицы



Фиг. 5.

$\Omega_k^{-1}(t, x_1, x_2, v)$, $\Lambda_k(t, x_1, x_2, v)$ и $\Omega_k(t, x_1, x_2, v)$ произвольной размерности J), а также различные граничные условия, сетки и начальные данные.

В качестве примера на фиг. 5 показаны результаты расчета сверхзвукового обтекания при числе Маха $M_\infty = 3$ набегающего потока газа с показателем адиабаты $k = 1.4$ тела со многими изломами, порождающими внутренние скачки уплотнения и волны разрежения (плоская задача, AD – плоскость симметрии). Головная ударная волна CD в расчетах выделялась явно с помощью постановки соответствующих граничных условий, остальные особенности течения рассчитывались сквозным образом. Как видно из фиг. 5а, на которой изображена картина обтекания и поле скоростей, течение имеет сложный характер. Тем не менее метод позволяет получить монотонное на каждом участке тела AE_0, \dots, E_6B распределение давления вдоль контура, приведенное на фиг. 5б.

2. МАЖОРАНТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

2.1. В [16] для численного решения одномерных уравнений параболического типа

$$u_t = \varepsilon u_{xx}, \quad \varepsilon = \text{const}, \quad \varepsilon > 0,$$

в случае равномерных сеток

$$x_k = kh, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

симметричных разностных схем на таких сетках и произвольных (в том числе неявных и многослойных) сеточных шаблонов построено все множество линейных “положительных по Фрид-

рихсу" (см. [2], монотонных или мажорантных – по другой терминологии) разностных схем

$$u_k^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu} u_{k+\mu}^{n+\nu}, \quad \alpha_{\mu}^{\nu} > 0, \quad \mu = 0, \pm 1, \dots, \quad \nu = 1, 0, -1, \dots, \quad (21)$$

с порядком аппроксимации $O(\tau, h^2)$, а для не более чем трехслойных по времени схем также с порядком $O(\tau^2, h^2)$. Доказано, что частными решениями этой общей задачи (вершинами замкнутых многогранников в пространстве неопределенных коэффициентов α_{μ}^{ν}) являются разностные схемы, построенные на симметричных сеточных шаблонах, включающих рассчитываемую точку с координатами $\{0, 1\}$ на плоскости $\{\mu, \nu\}$ ($\mu = (x - x_k)/h$, $\nu = (t - t^n)/\tau$), два сеточных узла, лежащих выше, и два (один, если он на прямой $\mu = 0$) узла, лежащих ниже параболы, с уравнением

$$\mu^2 + 2\sigma(\nu - 1) = 0, \quad \sigma = \varepsilon\tau/h^2 \quad (22)$$

на плоскости $\{\mu, \nu\}$.

Поскольку ограничения, связанные с симметрией коэффициентов разностных схем (и сеточных шаблонов), а также с равномерностью разностной сетки, не являются здесь принципиальными, этот подход может быть использован в более общем случае, в том числе для многомерных уравнений и нерегулярных (неструктурированных) сеток. Следует отметить принципиальную роль уравнения (22) при построении разностных схем с положительной аппроксимацией вида (21). В частности, если выбрать две произвольные точки на параболе (22), расположенные по обе стороны от рассчитываемой точки ($\mu = 0, \nu = 1$), и определить с использованием монотонной интерполяции значения сеточной функции в этих точках через ее значение в сеточных узлах, то можно построить разностные схемы, удовлетворяющие неравенствам из (21) при любом шаге интегрирования по времени, т.е. абсолютно устойчивые (так как неравенства в (21) являются достаточным условием устойчивости) схемы с положительной аппроксимацией, в том числе явные схемы такого типа.

В [17] для численного решения в областях сложной формы с несколькими несвязными границами многомерных задач, моделируемых уравнениями параболического типа, предложен один из таких методов, сочетающий высокую эффективность конечно-элементных методов при дискретизации области интегрирования (неструктурированные сетки, одноиндексная нумерация сеточных узлов и т.д.) с возможностями обычных сеточных подходов (анализ аппроксимации, устойчивости и т.п.). Используемый при построении этого метода подход аналогичен рассмотренному в [11] для гиперболических уравнений и иллюстрируется ниже для случая простейшего двумерного уравнения теплопроводности.

2.2. Рассмотрим простейшее уравнение параболического типа с двумя пространственными переменными

$$u_t = \varepsilon_1 u_{xx} + \varepsilon_2 u_{yy}, \quad \varepsilon_m = \text{const}, \quad \varepsilon_m > 0, \quad m = 1, 2, \quad (23)$$

в замкнутой области D , ограниченной в общем случае несколькими несвязными границами G_g ($g = 1, 2, \dots$), и первую краевую задачу для (23):

$$u|_{G_g} = u_g(t, s_g), \quad u(0, x, y) = u^0(x, y), \quad (24)$$

где s_g – расстояние вдоль соответствующей границы. Введем на границах и внутри области интегрирования в моменты времени $t = t^{n+1}$ и $t = t^n$ ($\tau = t^{n+1} - t^n$) расположенные достаточно произвольно сеточные узлы с одноиндексной нумерацией и координатами $\{t^n, x_{gk}^n, y_{gk}^n\}$, $\{t^{n+1}, x_{gk}^{n+1}, y_{gk}^{n+1}\}$ ($k = 1, 2, \dots, K_g$), $\{t^n, x_k^n, y_k^n\}$, $\{t^{n+1}, x_k^{n+1}, y_k^{n+1}\}$ ($k = 1, 2, \dots, K$), а также значения сеточной функции в этих точках $u_{gk}^n, u_{gk}^{n+1}, u_k^n$ (они заданы в (24)) и u_k^{n+1} (искомые). Для каждой из внутренних точек $\{t^{n+1}, x_k^{n+1}, y_k^{n+1}\}$ обозначим через $\{t^1, x^1, y^1\}, u^1$ и $\{t^2, x^2, y^2\}, u^2$ ($t^n \leq t^j \leq t^{n+1}, j = 1, 2$) координаты и сеточную функцию в двух точках параболы

$$(x - x_k^{n+1})^2 = 4\varepsilon_1(t^{n+1} - t), \quad y = y_k^{n+1} \quad (25)$$

(они расположены по разные стороны от рассчитываемой точки $\{t^{n+1}, x_k^{n+1}, y_k^{n+1}\}$).

Аналогично, через $\{t^3, x^3, y^3\}, u^3$ и $\{t^4, x^4, y^4\}, u^4$ ($t^n \leq t^j \leq t^{n+1}, j = 3, 4$) обозначим координаты и сеточную функцию в двух точках параболы

$$x = x_k^{n+1}, \quad (y - y_k^{n+1})^2 = 4\varepsilon_2(t^{n+1} - t) \quad (26)$$

(они также расположены по обе стороны от рассчитываемой точки (см. фиг. 6)) и рассмотрим разностное выражение

$$u_k^{n+1} = \sum_{j=1}^4 \alpha_j u^j. \quad (27)$$

Предполагая существование соответствующих производных и разлагая (27) в ряд Тейлора относительно некоторой точки (в линейном случае безразлично какой), например, относительно $\{t^{n+1}, x_k^{n+1}, y_k^{n+1}\}$, с учетом (25), (26) получаем (индексы n и k у $u, u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}$ опущены)

$$\begin{aligned} & \left(-1 + \sum_{j=1}^4 \alpha_j\right)u - \left(\sum_{j=1}^4 \tau^j \alpha_j\right)u_t + \left(\sum_{j=1}^2 X^j \alpha_j\right)u_x + \left(\sum_{j=3}^4 Y^j \alpha_j\right)u_y + 0.5 \left(\sum_{j=1}^2 (X^j)^2 \alpha_j\right)u_{xx} + \\ & + 0.5 \left[\sum_{j=3}^4 (Y^j)^2 \alpha_j\right]u_{yy} + O(\tau^2, \tau h_1, \tau h_2) = 0, \quad \tau = t^{n+1} - t^n, \quad X^j = x^j - x_k^{n+1}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$Y^j = y^j - y_k^{n+1}, \quad h_1 = \max\{|X^1|, |X^2|\}, \quad h_2 = \max\{|Y^3|, |Y^4|\}.$$

Так как из (25), (26) вытекает, что

$$(X^j)^2 = 4\varepsilon_1 \tau^j, \quad Y^j = 0, \quad j = 1, 2, \quad X^j = 0, \quad (Y^j)^2 = 4\varepsilon_2 \tau^j, \quad j = 3, 4, \quad (29)$$

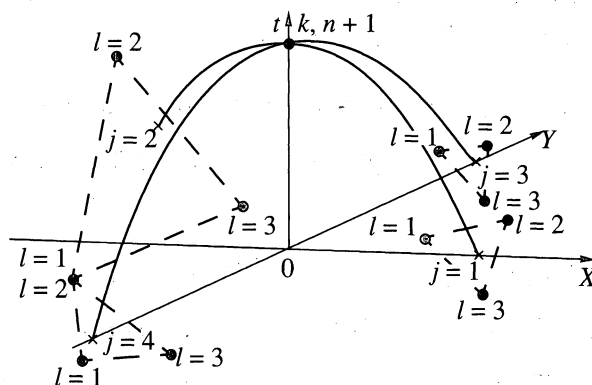
то при выполнении условий

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \quad X^1 \alpha_1 + X^2 \alpha_2 = 0, \quad Y^3 \alpha_3 + Y^4 \alpha_4 = 0, \quad \tau^1 \alpha_1 + \tau^2 \alpha_2 - \tau^3 \alpha_3 - \tau^4 \alpha_4 = 0 \quad (30)$$

разностное выражение (27) при $t^j \neq t^n$ будет аппроксимировать исходное уравнение (23) в общем случае с первым порядком $O(\tau, h_1, h_2)$ (или $O(\sqrt{\tau})$), независимо от точности интерполяции значений u^j по значениям сеточной функции $u_{gk}^n, u_{gk}^{n+1}, u_k^n$. В случае $t^j = t^n$ ($j = 1, 2, 3, 4$) (т.е. при $X^2 = -X^1, Y^4 = -Y^3$) разностная схема (27) будет иметь порядок аппроксимации $O(\tau, h_1^2, h_2^2)$, т.е. $O(\tau)$.

Для коэффициентов α_j ($j = 1, 2, 3, 4$) разностной схемы (27) из (30) имеем

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1 X^2 Y^3 Y^4}{(X^2 - X^1) \Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{-\varepsilon_1 X^1 Y^3 Y^4}{(X^2 - X^1) \Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{\varepsilon_2 X^1 X^2 Y^4}{(Y^4 - Y^3) \Delta}, \quad \alpha_4 = \frac{-\varepsilon_2 X^1 X^2 Y^3}{(Y^4 - Y^3) \Delta},$$



Фиг. 6. Сеточный шаблон для параболических уравнений при неструктурированных сетках.

где

$$\Delta = \varepsilon_1 Y^3 Y^4 + \varepsilon_2 X^1 X^2, \quad (31)$$

причем так как $X^1 X^2 \leq 0$, $Y^3 Y^4 \leq 0$, то все коэффициенты

$$\alpha_j \geq 0, \quad (32)$$

т.е. при любом шаге интегрирования τ разностная схема (27) будет мажорантной (обеспечивая выполнение принципа максимума), а значит, явной, абсолютно устойчивой схемой, так как условие (32) является, как известно, достаточным условием устойчивости. В отличие от известных абсолютно устойчивых и по существу явных схем на регулярных сетках (см. [18], [19]), разностная схема (27), (30), (31) является мажорантной при любых τ (схемы в [18], как известно, аппроксимируют (21) и мажорантны только при $\varepsilon\tau/h^2 \leq 1/2$, схема "классики" из [19, с. 145] является мажорантной при еще более жестком ограничении на τ).

Для вычисления u^j через известные значения сеточной функции u_{gk}^n , u_{gk}^{n+1} , u_k^n в узлах неструктурированной (с произвольной одноиндексной нумерацией) разностной сетки найдем точки пересечения парабол (25), (26) со слоем $t = t^n$ (см. фиг. 6):

$$\begin{aligned} X^{1,2} &= \pm 2\sqrt{\varepsilon_1 \tau}, & Y^{1,2} &= 0, & X^{3,4} &= 0, & Y^{3,4} &= \pm 2\sqrt{\varepsilon_2 \tau}, \\ x^j &= x_k^{n+1} + X^j, & y^j &= y_k^{n+1} + Y^j, & t^j &= t^n, & j &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (33)$$

(если эти точки пересечения лежат внутри области интегрирования), или с поверхностью, натянутой на контуры границ интегрирования в моменты $t = t^n$ и $t = t^{n+1}$, и воспользуемся трехточечной монотонной линейной интерполяцией. Пусть какие-либо три сеточных узла, расположенные либо все на слое $t = t^n$ (они могут быть все внутренними или частично граничными), либо все на одной из границ (тогда часть из них – на слое $t = t^n$, а остальные – на слое $t = t^{n+1}$), имеют координаты $r_l = \{t_l, x_l, y_l\}$. Все множество точек, расположенных внутри и на границах треугольника с вершинами в точках r_1, r_2, r_3 на плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид

$$r_{pl} = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \beta_3 r_3, \quad \sum_{l=1}^3 \beta_l = 1, \quad \beta_l \geq 0, \quad l = 1, 2, 3. \quad (34)$$

Обозначим через $r_k^{n+1} = \{t^{n+1}, x_k^{n+1}, y_k^{n+1}\}$ рассчитываемую точку, через

$$r^{1,2} = \{t^{n+1} - (x - x_k^{n+1})^2 / (4\varepsilon_1), x, y_k^{n+1}\}, \quad (35)$$

$$r^{3,4} = \{t^{n+1} - (y - y_k^{n+1})^2 / (4\varepsilon_2), x_k^{n+1}, y\} \quad (36)$$

обозначим координаты точек парабол (25) и (26) соответственно, где x в (35) и y в (36) – свободные параметры.

Для точек пересечения парабол (35) и (36) с плоскостью (34) имеем $r^{1,2} = r_{pl}$ и $r^{3,4} = r_{pl}$, откуда и получаем необходимые уравнения для определения координат точек пересечения $r^j = \{t^j, x^j, y^j\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) и коэффициентов $\beta_1^j, \beta_2^j, \beta_3^j$, а именно:

$$\begin{aligned} \beta_1^j + \beta_2^j + \beta_3^j &= 1, & \tau_1 \beta_1^j + \tau_2 \beta_2^j + \tau_3 \beta_3^j &= (X^j)^2 / (4\varepsilon_1), & X_1 \beta_1^j + X_2 \beta_2^j + X_3 \beta_3^j &= X^j, \\ Y_1 \beta_1^j + Y_2 \beta_2^j + Y_3 \beta_3^j &= 0, & \beta_1^j \geq 0, & \beta_2^j \geq 0, & \beta_3^j \geq 0, & j = 1, 2, \end{aligned} \quad (37)$$

и

$$\begin{aligned} \beta_1^j + \beta_2^j + \beta_3^j &= 1, & \tau_1 \beta_1^j + \tau_2 \beta_2^j + \tau_3 \beta_3^j &= (Y^j)^2 / (4\varepsilon_2), & X_1 \beta_1^j + X_2 \beta_2^j + X_3 \beta_3^j &= 0, \\ Y_1 \beta_1^j + Y_2 \beta_2^j + Y_3 \beta_3^j &= Y^j, & \beta_1^j \geq 0, & \beta_2^j \geq 0, & \beta_3^j \geq 0, & j = 3, 4. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь $\tau_l = t^{n+1} - t_l$, $X_l = x_l - x_k^{n+1}$, $Y_l = y_l - y_k^{n+1}$, $l = 1, 2, 3$. Определив $X^j, \beta_1^j, \beta_2^j, \beta_3^j$ ($j = 1, 2$) из (37) (из квадратного уравнения относительно X^j , к которому приводится первое уравнение в (37) по-

сле решения линейной относительно $\beta_1^j, \beta_2^j, \beta_3^j$ системы остальных уравнений в (37)) и $Y^j, \beta_1^j, \beta_2^j, \beta_3^j$ ($j = 3, 4$) из (38) для u^j ($j = 1, 2, 3, 4$), имеем, например, в случае линейной интерполяции

$$u^j = \beta_1^j u_1 + \beta_2^j u_2 + \beta_3^j u_3, \quad (39)$$

где u_1, u_2, u_3 — значения сеточной функции в трех выбираемых для интерполирования сеточных узлах.

Окончательно для $X^j, Y^j, \beta_1^j, \beta_2^j, \beta_3^j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) имеем

$$X^{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 + 4c})/(2c), \quad Y^{1,2} = 0, \quad X^{3,4} = 0, \quad Y^{3,4} = (-b \pm \sqrt{b^2 + 4c})/(2c),$$

$$b = \left(\sum_{l=1}^3 b_l \right) d^{-1}, \quad c = \left(\sum_{l=1}^3 c_l \right) d^{-1}, \quad d = \sum_{l=1}^3 \tilde{\tau}_l c_l, \quad (40)$$

$$c_1 = X_3 Y_2 - X_2 Y_3, \quad c_2 = X_1 Y_3 - X_3 Y_1, \quad c_3 = X_2 Y_1 - X_1 Y_2.$$

При $j = 1, 2$ получаем

$$b_1 = \tilde{\tau}_2 Y_3 - \tilde{\tau}_3 Y_2, \quad b_2 = \tilde{\tau}_3 Y_1 - \tilde{\tau}_1 Y_3, \quad b_3 = \tilde{\tau}_1 Y_2 - \tilde{\tau}_2 Y_1, \quad (41)$$

$$\tilde{\tau}_l = 4\varepsilon_1(t^{n+1} - t_l), \quad \beta_l^j = (b_l + c_l X^j) X^j / d, \quad l = 1, 2, 3.$$

При $j = 3, 4$ имеем

$$b_1 = \tilde{\tau}_3 X_2 - \tilde{\tau}_2 X_3, \quad b_2 = \tilde{\tau}_1 X_3 - \tilde{\tau}_3 X_1, \quad b_3 = \tilde{\tau}_2 X_1 - \tilde{\tau}_1 X_2, \quad (42)$$

$$\tilde{\tau}_l = 4\varepsilon_2(t^{n+1} - t_l), \quad \beta_l^j = (b_l + c_l Y^j) Y^j / d, \quad l = 1, 2, 3.$$

Поиск в каждой рассчитываемой точке $\{t^{n+1}, x_n^{k+1}, y_n^{k+1}\}$ для каждой из точек пересечения $\{t^j, x^j, y^j\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) парабол (25), (26) с плоскостью $t = t^n$ или “граничной поверхностью” трех ближайших к интерполируемой точке опорных сеточных узлов $\{t_l, x_l, y_l\}$ ($l = 1, 2, 3$) содержащих на плоскости, проходящей через эти опорные узлы, интерполируемую точку j внутри или на границах треугольника, построенного на этих опорных узлах как на вершинах, осуществляется соответствующим полным перебором по всем граничным узлам $\{t^n, x_{gk}^n, y_{gk}^n\}, \{t^{n+1}, x_{gk}^{n+1}, y_{gk}^{n+1}\}$ ($k = 1, 2, \dots, K_g$) (если вычисленная предварительно из (33) точка $\{t^j, x^j, y^j\}$ лежит вне области интегрирования) или направленным перебором (с числом операций, пропорциональным общему числу сеточных узлов $K + \sum_g K_g$ на слое $t = t^n$) по внутренним и граничным сеточным узлам $\{t^n, x_k^n, y_k^n\}, \{t^n, x_{gk}^n, y_{gk}^n\}$ слоя $t = t^n$ до тех пор, пока не будет обеспечено выполнение неравенств

$$\beta_l^j \geq 0, \quad l = 1, 2, 3. \quad (43)$$

Для линейного уравнения (23) (в том числе с переменными коэффициентами $\varepsilon_1(x, y), \varepsilon_2(x, y)$) этот наиболее трудоемкий этап вычислительного алгоритма может быть осуществлен один раз для всех t , в нелинейном случае его необходимо повторять на каждом шаге по t (или через несколько шагов, если нелинейность достаточно слабая). Впрочем, это характерный элемент всех методов, в которых “соседство” сеточных узлов заранее не фиксируется. В случае регулярной разностной сетки интерполяционные формулы (34)–(43) существенно упрощаются, необходимость в переборных алгоритмах отпадает и данный метод по числу арифметических операций ничем не отличается от известных явных схем.

Обобщение данного метода на случай одного квазилинейного уравнения (23) с $\varepsilon_m = \varepsilon_m(t, x, y, u)$ ($m = 1, 2$) или системы с диагональными матричными коэффициентами $E_m = \text{diag}\{\varepsilon_m^1, \dots, \varepsilon_m^I\}$ очевидно. В случае параболической системы с недиагональными некоммутирующими матричными коэффициентами $E_m = \{\varepsilon_m^{ij}\}$ и большего числа пространственных переменных может быть использовано расщепление по пространственным координатам, например аналогичное [1].

2.3. Описанный выше алгоритм реализован для решения краевых задач (23), (24) (в том числе в случае квазилинейной системы с диагональными матричными коэффициентами в (23) и более общими, чем (24), краевыми условиями) в произвольной замкнутой области с несколькими несвязными границами. В программе на языке ФОРТРАН-77 предусмотрен интерактивный режим работы при задании области интегрирования и других входных параметров, а также графическое представление результатов.

В качестве первого примера на фиг. 7 сравниваются результаты установившегося (при $t \rightarrow \infty$) численного и аналитического решения

$$u(x, y) = x + y \quad (44)$$

для задачи (23), (24) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ в единичном квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ со стационарными граничными условиями $u(t, 0, y) = y, u(t, x, 0) = x, u(t, 1, y) = 1 + y, u(t, x, 1) = x + 1$ и нулевыми начальными условиями $u(0, x, y) = 0$. Наклонные прямые на фиг. 7 соответствуют изолиниям $u = 2/3$ и $u = 4/3$ из аналитического решения (44). Точками, крестиками и кружочками отмечено положение сеточных узлов, для которых $0 < u < 2/3, 2/3 < u < 4/3, 4/3 < u < 2$ соответственно (т.е. границы раздела между точками, крестиками и кружочками соответствуют изолиниям $u = 2/3$ и $u = 4/3$). Стационарное численное решение получено при $\tau = 0.5$ за один шаг по времени, поскольку в данной задаче соотношения (27), (31), (39)–(43) совпадают с точным решением (44).

На фиг. 8 представлено аналогичное сравнение установившегося численного и аналитического решения

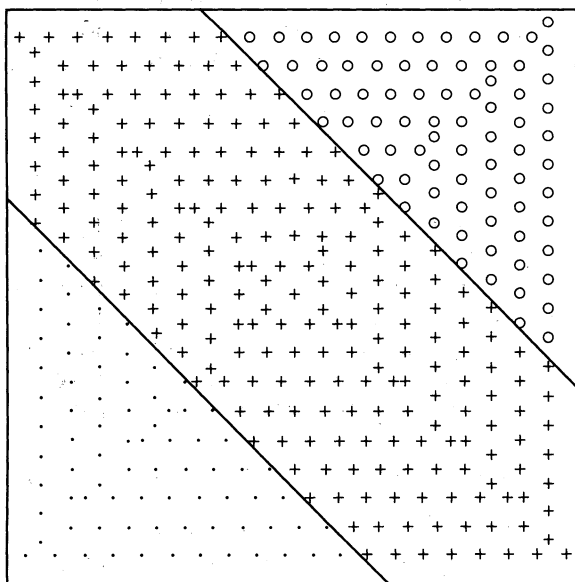
$$u(x, y) = \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2) \quad (45)$$

для задачи

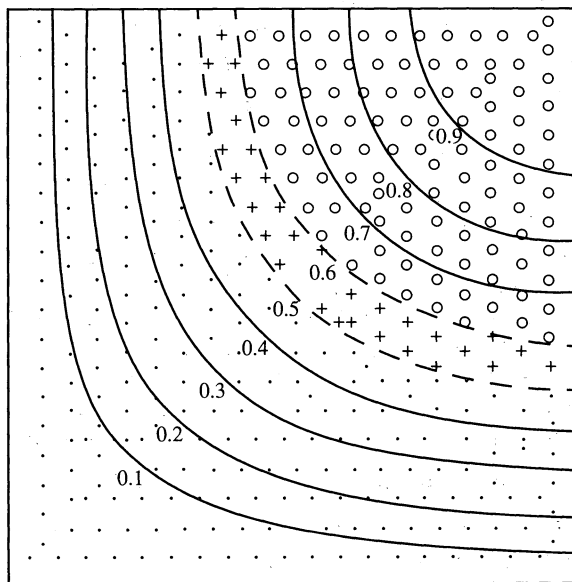
$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + \pi^2 u/2$$

в единичном квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ с начальными условиями $u(0, x, y) = 0$ и стационарными граничными условиями $u(t, x, 0) = 0, u(t, 0, y) = 0, u(t, 1, y) = \sin(\pi y/2), u(t, x, 1) = \sin(\pi x/2)$. Сплошными кривыми отмечены изолинии $u(x, y) = \text{const}$ из численного решения, штриховыми линиями – изолинии $u(x, y)$ из аналитического решения (45). Точками, крестиками и кружочками отмечено положение сеточных узлов, в которых $0 < u < 0.5, 0.5 < u < 0.6, 0.6 < u < 1$ соответственно. Расчеты проведены при $\tau = 0.1$ до установления с точностью $\max_k |u_k^{n+1} - u_k^n| / \tau \leq 10^{-4}$ (9 шагов по времени).

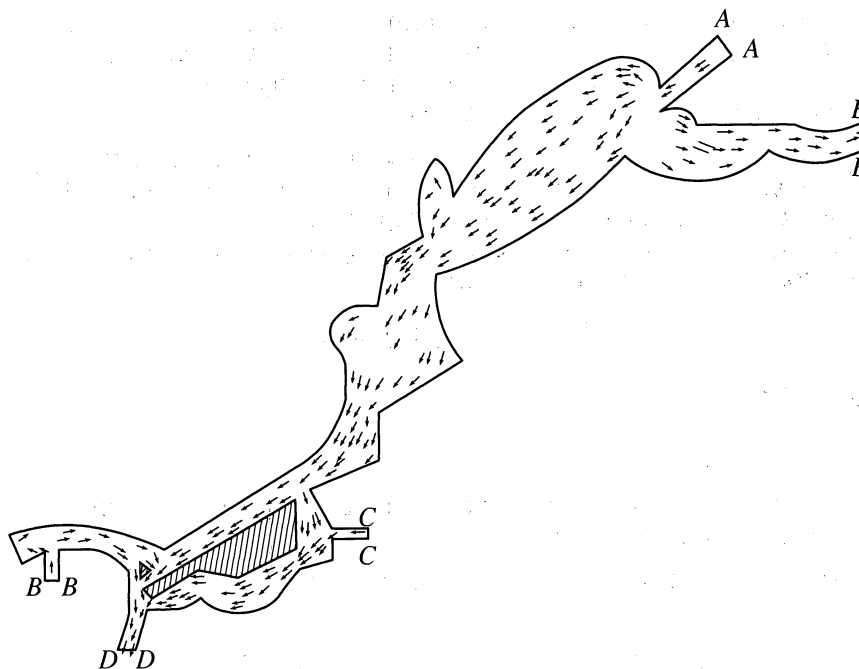
При изменении τ от 0.1 до 0.001 результаты расчетов (полученные по существу на разных сеточных шаблонах, так как выбор шаблона зависит от τ) отличались не более чем на 1%. При $\tau = 0.001$ для установления потребовалось 318 шагов по t .



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

На фиг. 9 приведено установившееся поле скоростей (штрихи) осредненного по глубине водоема потенциального течения несжимаемой жидкости (уравнение (23) с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ и нулевыми начальными и стационарными граничными условиями типа (24)) в Клязьминском водохранилище для одного из вариантов расхода воды: через вход канала им. Москвы А–А (70%), через вход р. Клязьма В–В (25%), через вход р. Безымянной С–С (5%), через выход канала D–D (70%), через выход Пироговского водохранилища Е–Е (30%). Область интегрирования достаточно сложна, поскольку имеет три несвязных границы из-за наличия двух островов и покрывалась, в отличие от предыдущих примеров, сильно нерегулярной сеткой, включающей 1054 внутренних и 485 граничных узлов. Представленные на фиг. 9 результаты получены за 70 шагов по времени при $\tau = 0.5$ и мало отличаются друг от друга в расчетах с $\tau = 0.1$ (80 шагов по времени) и с $\tau = 2.0$ (12 шагов по времени) при установлении с критерием $\max_k |u_k^{n+1} - u_k^n| / \tau \leq 10^{-4}$. Минимальный линейный размер области интегрирования был равен 1. При изменении τ от 0.1 до 2.0 максимальные значения скорости в потоке (модуль вектора, нормального градиенту искомой функции, т.е. функции тока) изменялись от 1.89 до 2.04.

3. НЕКОТОРЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ

3.1. Наряду с глобальными и региональными моделями распространения загрязнений в атмосфере, в которых обычно рельеф подстилающей поверхности (и тем более городская застройка) не учитываются (что вполне оправдано анализом соответствующих масштабов и характером источников загрязнений на этих масштабах, см. [20], [21] и др.), необходимы также локальные модели, которые позволяли бы рассматривать распространение загрязнений в воздушной и других средах на существенно меньших масштабах и более детально учитывали бы рельеф местности, городскую застройку и т.д. Это необходимо для таких источников загрязнений, как городской автомобильный транспорт, промышленные и бытовые предприятия с низко расположенными дымовыми трубами, при загрязнении водоемов и грунтовой среды поверхностными стоками. В отличие от глобальных и региональных моделей, в которых область интегрирования обычно имеет простую форму, а основные трудности заключаются в правильном учете физических характеристик явлений, таких как турбулентность атмосферы, стратификации и т.д., здесь на первый план выходят трудности, связанные с существенно пространственным характером движения загрязнителя, и, как следствие, с многосвязностью и сложной геометрией области интегрирова-

ния. В этих условиях особенно затруднительна монотонность получаемого численного решения, что может быть весьма существенным фактором, например, при исследовании распространения высокотоксичных и радиоактивных загрязнений, при которых представляющий интерес перепад концентраций составляет несколько порядков.

Для описания стационарных течений носителя (воздушных и жидких потоков) в данной работе использовались модель потенциальных (безвихревых) течений и модель Стокса (медленные течения вязкой несжимаемой жидкости). В двумерном случае после введения функции тока $\psi(x, y)$: $\partial\psi/\partial x = -v$, $\partial\psi/\partial y = u$, где u, v – проекции вектора скорости на оси x, y , для описания безвихревых течений получаем уравнение Лапласа

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 0 \quad (46)$$

и первую краевую задачу

$$\psi|_G = g(s) \quad (47)$$

(где s – расстояние вдоль границы, G – одна или несколько ограничивающих область интегрирования границ, в общем случае несвязных).

Для уравнений Стокса после введения завихренности $\omega = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$ имеем систему из двух уравнений:

$$\partial^2\omega/\partial x^2 + \partial^2\omega/\partial y^2 = 0, \quad \partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = -\omega. \quad (48)$$

Аналогичные (46) уравнения с использованием функции тока ψ или потенциала ϕ ($\partial\phi/\partial x = u$, $\partial\phi/\partial y = v$) могут быть получены для простейших стационарных задач фильтрации однородной жидкости через грунтовые среды. Граничные условия для системы (48) включают соотношения (47), условия Тома для ω на участках границ, соответствующих твердой стенке, и условия I или II рода для ω на открытых участках границ. После определения поля скоростей $\{u, v\}$ из решения задач (46), (47) или (48) рассматривалось распространение загрязнений с использованием конвективно-диффузионной системы уравнений

$$\begin{aligned} \partial C_j/\partial t + u\partial C_j/\partial x + v\partial C_j/\partial y + f_j(t, x, y, C_1, \dots, C_J, u, v) = \\ = (\text{Re}_j)^{-1}(\partial^2 C_j/\partial x^2 + \partial^2 C_j/\partial y^2), \quad j = 1, 2, \dots, J, \end{aligned} \quad (49)$$

и граничных условий I (типа 47) или II рода. Здесь C_j – удельные концентрации переносимых веществ, $1/\text{Re}_j$ – соответствующие эффективные коэффициенты диффузии (постоянные или переменные). Правые части f_j позволяют моделировать источники и стоки компонент либо их химические взаимодействия.

3.2. Для решения описанных в п. 3.1 и других аналогичных задач, моделируемых квазилинейными эллиптическими уравнениями второго порядка и системами таких уравнений с диагональными матричными коэффициентами (или с попарно коммутирующими матричными коэффициентами более общего вида)

$$\begin{aligned} V_{xx} + e_{12}V_{xy} + e_{22}V_{yy} + e_1V_x + e_2V_y = f(x, y, V), \quad V = \{V_1, \dots, V_J\}, \quad f = \{f_1, \dots, f_J\}, \\ e_{ml}(x, y, V) = \{e_{mlj}\}, \quad e_m(x, y, V) = \{e_{mj}\}, \quad m, l = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad e_{22} > e_{12}^2/4, \end{aligned} \quad (50)$$

в произвольной замкнутой области с несколькими несвязными границами, в [22] предложен новый подход к построению разностных схем с положительной по Фридрихсу аппроксимацией:

$$V_k = \sum_i \alpha_{ki} V_i, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i = i_1, \dots, i_I, \quad I \geq 5, \quad (51)$$

$$\alpha_{ki} \geq 0. \quad (52)$$

Здесь K – общее число внутренних сеточных узлов с одноиндексной (как в методах конечных элементов или конечных объемов) нумерацией; i_1, \dots, i_I – номера расположенных достаточно произвольно в области интегрирования внутренних и граничных сеточных узлов, α_{ki} – неопреде-

ленные коэффициенты, часть из которых (все, если $I = 5$) определяются условиями аппроксимации первого (53) или второго (53), (54) порядка на решениях (50):

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_{ki} &= 1, \quad \sum_i \alpha_{ki} X_i \{1 - 0.5 X_i [e_1 - X_i (e_1^2 + f_v - e_{1x})/3 + Y_i e_{1y}]\} = 0, \\ \sum_i \alpha_{ki} \{Y_i - 0.5 X_i^2 [e_2 + X_i (e_2 f_v - e_1 e_2 + e_{2x})/3 - Y_i (f_v - e_{2y})]\} &= 0, \\ \sum_i \alpha_{ki} X_i \{Y_i - 0.5 X_i [e_{12} + X_i (e_2 + e_{12x} - 2e_{12} e_1)/3 + Y_i (e_1 + e_{12y})]\} &= 0, \\ \sum_i \alpha_{ki} \{Y_i^2 - X_i^2 [e_{22} - X_i (e_{12} e_2 + e_{22} e_1 - e_{22x})/3 + Y_i (e_2 + e_{22y})]\} &= 0, \end{aligned} \tag{53}$$

$$\beta_0 = -\sum_i \alpha_{ki} (X_i^2 (1 - e_1 X_i)/3)/2 = 0,$$

$$\sum_i \alpha_{ki} X_i [3Y_i (Y_i - e_{12} X_i) - X_i^2 (e_{22} - e_{12}^2)] = 0,$$

$$\sum_i \alpha_{ki} [Y_i^3 - e_{22} X_i^2 (3Y_i - e_{12} X_i)] = 0;$$

$$\beta_1 = -\sum_i \alpha_{ki} X_i^3/6 = 0, \quad \beta_2 = -\sum_i \alpha_{ki} X_i^2 Y_i/2 = 0. \tag{54}$$

В отличие от традиционных сеточных методов, в которых область интегрирования с помощью преобразования независимых переменных $\{x, y\}$ отображается на более удобную для введения регулярной сетки область, и методов конечных элементов, в которых сеточный шаблон (как и в традиционных сеточных методах) заранее фиксируется, как только осуществляется покрытие области интегрирования сеточными узлами (конечными элементами) и больше, как правило, не меняется, в данном подходе для каждой рассчитываемой точки $k = 1, 2, \dots, K$ специальным образом подбираются соседи (сеточный шаблон) так, чтобы выполнялись условия неотрицательности коэффициентов α_{ki} в (51) (т.е. условия (52)), обеспечивающие неотрицательность разностного оператора (мажорантность схемы). Это позволяет полностью избавиться от трудностей с "плохими" коэффициентами в преобразованных дифференциальных уравнениях или в аппроксимирующей системе.

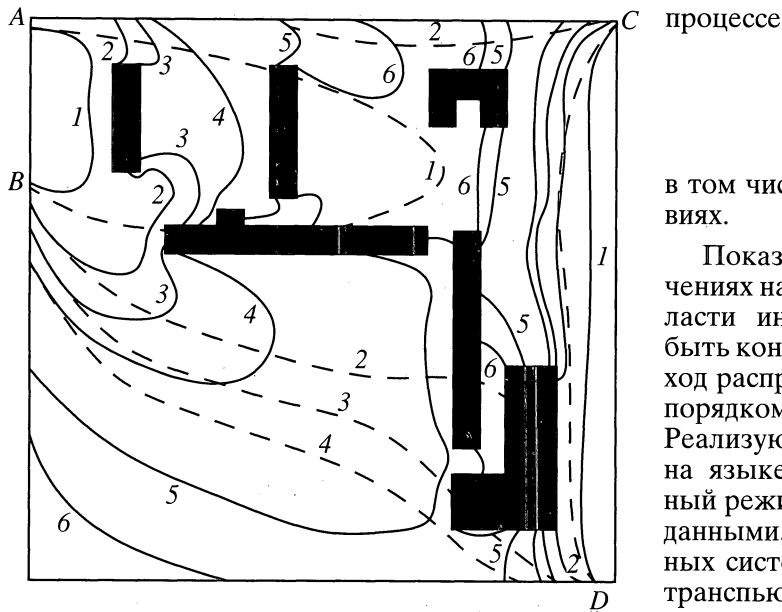
Получающийся в результате решения уравнений (53) и неравенств (52) для каждого $k = 1, 2, \dots, K$ набор коэффициентов α_{ki} приводит к знакопостоянной и быстро итерируемой линейной (или нелинейной для квазилинейных уравнений) системе

$$AV = b, \quad V^T = \{V_1, \dots, V_K\}, \tag{55}$$

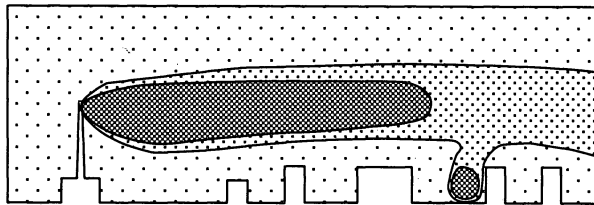
$$A = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0, -\alpha_{1i_1}, 0, \dots, 0, -\alpha_{1i_p}, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, \dots, 0, -\alpha_{1i_1}, 0, \dots, 0, -\alpha_{1i_p}, 0, \dots, 0, 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ki} \geq 0, \quad \sum_i \alpha_{ki} \leq 1,$$

методы решения которой хорошо разработаны (см. [23] и др.).

В частности, неравенства (52) обеспечивают выполнение достаточных условий сходимости и принципа максимума, например, в простейшем (легко распараллеливаемом) итерационном



Фиг. 10. Изолинии концентрации загрязнения с учетом (сплошные кривые) и без учета (штриховые линии) городской застройки.



Фиг. 11. Разностная сетка (точки) и изолинии концентрации загрязнения (сплошные кривые) участка приземного слоя атмосферы городской застройки.

ции загрязнителя $C = 0.2, 0.05, 0.02, 0.01, 0.001, 0.0001$ (сплошные кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6), рассчитанные на основе уравнений (49) с учетом стоковского поля скоростей носителя (ветер), которое рассчитывалось на основе уравнений Стокса (48) внутри области интегрирования и задавалось однородным и единичным на левой и правой внешних границах области интегрирования (верхняя и нижняя внешние границы и все внутренние границы считались непроницаемыми). Коэффициент диффузии в (49) принимался равным $1/Re = 0.5$, линейные источники загрязнителя с концентрацией $C = 1$ располагались на участках AB и CD внешней границы области интегрирования (на остальных участках внешней границы и внутренних границах принималось $\partial C/\partial n = 0$). Результаты расчетов уровней загрязнений довольно слабо изменяются при использовании в (49) поля скоростей, полученного на основе потенциальных (безвихревых) уравнений (46). Существенно большую роль играет выбор коэффициента диффузии $1/Re$ и учет застройки, что видно, например, из сравнения тех же изолиний $C = \text{const}$, полученных из (49) с использованием однородного поля скоростей носителя $u = 1, v = 0$ (штриховые кривые 1, 2, 3, 4 на фиг. 10).

Решение аналогичной двумерной задачи о распространении загрязнений в одном из вертикальных сечений приземного слоя атмосферы того же участка городской застройки представлено на фиг. 11. Ветровое поле скоростей рассчитывалось на основе потенциальной модели (46) с однородным распределением на левой границе, конвективно-диффузионный перенос загрязнений из заводской трубы и от автомагистрали (части нижней границы) – с использованием уравнений (49), $J = 1$. Точки различного размера на фиг. 11 обозначают положение сеточных узлов и уровни концентрации загрязнителя (сплошные кривые на фиг. 11 – изолинии $C = \text{const}$).

$$V_k^{n+1} = \sum_i \alpha_{ki} V_i^n, \quad (56)$$

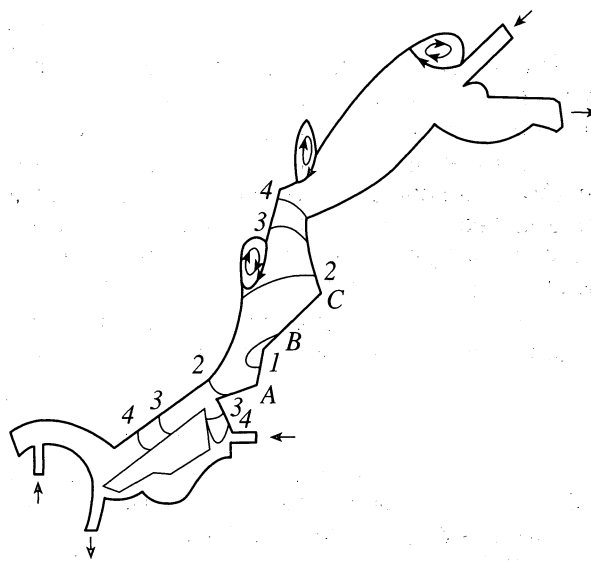
в том числе при разрывных граничных условиях.

Показано, что при весьма слабых ограничениях на расположение сеточных узлов в области интегрирования такие схемы могут быть конструктивно построены. Этот же подход распространен на случай схем со вторым порядком аппроксимации на решениях (50). Реализующая изложенный метод программа на языке ФОРТРАН-77 имеет интерактивный режим работы с входными и выходными данными, реализована в рамках операционных систем MS DOS, UNIX, в том числе для транспьютерных вычислительных систем.

3.3. На фиг. 10–13 представлены результаты расчетов некоторых двумерных стационарных задач распространения загрязнений в приземном слое участка городской застройки (включающего 6 достаточно высоких сооружений, см. фиг. 10, 11), в регулируемом водоеме (Клязьминское водохранилище вблизи Москвы, см. фиг. 12) и задачи о фильтрации жидкости в проницаемом грунтовом слое из двух расположенных на разных уровнях водоемов см. фиг. 13). Использовались постановки задач, описанные в п. 3.1, и численный метод из п. 3.2.

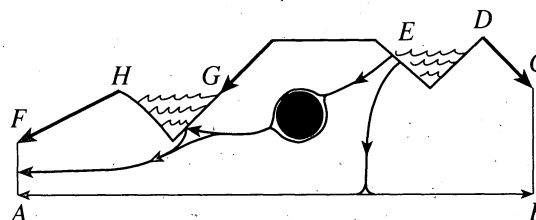
На фиг. 10 показана многосвязная область интегрирования (участок городской застройки, составленный из прямоугольных блоков), а также линии равных значений концентра-

Для исследования стационарных, осредненных по глубине водоема течений и конвективно-диффузионного стационарного распространения загрязнений использованы постановки задач и численный метод, описанные в пп. 3.1, 3.2. В качестве примера на фиг. 12 представлены результаты расчета распространения загрязнений от стационарного распределенного источника на участке береговой линии ABC (линейное распределение интенсивности с максимумом в точке B) в регулируемом водоеме (Клязьминское водохранилище вблизи г. Москвы), включающем три источника поступления воды: входы канала им. Москвы, р. Клязьма и р. Безымянная и два стока: выходы канала и Пироговского водохранилища. Поступление воды в водохранилище было задано постоянным: 70% через вход канала, 25% – из р. Клязьма, 5% – из р. Безымянная; сток распределен был в следующих пропорциях: 70% – выход канала, 30% – выход Пироговского водохранилища. Область интегрирования также неодносвязна и включала 2 имеющих на водохранилище острова.



Фиг. 12. Изолинии концентрации загрязнения (сплошные кривые с номерами) и линии тока в областях возвратных течений (кривые со стрелками) стоков стокового течения в Клязьминском водохранилище.

Поле скоростей несущей фазы рассчитывалось с использованием уравнений Стокса (48). Отличие от потенциального течения (см. фиг. 9) заключается в появлении вихревых образований в заливах (сплошные кривые со стрелками без номеров на фиг. 12) и уменьшении на 25% значения максимальной скорости потока при использовании модели Стокса. Распространение загрязнений от описанного выше линейного источника при чисто конвективном переносе (нулевой коэффициент диффузии в (49)) осуществляется вдоль струи, омывающей береговой участок ABC . Для одного из конечных значений коэффициента диффузии $1/Re = 0.1$ и стокового поля скорости несущей фазы изолинии концентраций $C = 0.5, 0.01, 0.0001, 0.00001$ показаны на фиг. 12 сплошными кривыми 1, 2, 3, 4 соответственно.



Фиг. 13.

Из представленных здесь и других расчетов следует, что наиболее существенным параметром, как и в атмосферных течениях, является величина эффективного коэффициента диффузии и в меньшей степени – способ определения поля скоростей несущей фазы.

На фиг. 13 представлены предельные линии тока (сплошные кривые со стрелками) при стационарной фильтрации в грунтовую среду однородной несжимаемой жидкости из расположенных на разных уровнях и полностью заполненных водоемов ED и HG .

Участки границ AB, CD, EG, HF считались непроницаемыми ($\partial C/\partial n = 0$), на участках DE и GH значение потенциала принималось равным 0 и -1 , на участках AF и BC потенциал линейно по вертикальной координате изменялся от -3 до -2 на AF и от -3 до -1 на BC . Область интегрирования содержала непроницаемое включение (круг на фиг. 13).

Видно, что в данной задаче образуется довольно сложная картина течения: жидкость из правой части бассейна DE и его нижней левой части вытекает через BC ; из середины левой части – через нижнюю часть AF ; из верхней левой части (окрестность точки E) просачивается в правую часть бассейна GH , из левой части этого бассейна – в верхнюю часть AF . Соответственно, совершенно различным может быть характер загрязнения грунтовых вод и бассейна GH в зависимости от того, какая часть верхнего бассейна DE стационарно загрязняется.

Видно, что в данной задаче образуется довольно сложная картина течения: жидкость из правой части бассейна DE и его нижней левой части вытекает через BC ; из середины левой части – через нижнюю часть AF ; из верхней левой части (окрестность точки E) просачивается в правую часть бассейна GH , из левой части этого бассейна – в верхнюю часть AF . Соответственно, совершенно различным может быть характер загрязнения грунтовых вод и бассейна GH в зависимости от того, какая часть верхнего бассейна DE стационарно загрязняется.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Изложенный выше подход к построению и анализу разностных схем с использованием пространства неопределенных коэффициентов позволяет более целенаправленно строить разностные схемы с заданными свойствами, в том числе оптимальные в том или ином смысле.

2. На основании такого подхода для уравнений гиперболического и параболического типов разработаны явные разностные схемы, обладающие (в линейном приближении для задачи Коши) свойствами абсолютной устойчивости и мажорантности, пригодные для расчетов на нерегулярных (неструктурированных) сетках в сложных областях со многими границами, не требующие предварительной информации о соседстве сеточных узлов.

3. Реализация методов для случая двух пространственных координат показала их эффективность при решении достаточно сложных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 6. С. 1476–1492.
2. Fridrichs K.O. Symmetric hyperbolic linear differential equations // *Communs Pure and Appl. Math.* 1954. V. 7. № 2. P. 345–392.
3. Courant R., Isacson E., Rees M. On the solutions of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // *Communs Pure and Appl. Math.* 1952. V. 5. № 5. P. 243–254.
4. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47(89). Вып. 3. С. 271–306.
5. Lax P.D. Weak solution nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations // *Communs Pure and Appl. Math.* 1954. V. 7. № 1. P. 159–193.
6. Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 2. С. 373–386.
7. Холодов А.С. О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1601–1620.
8. Петров И.Б., Холодов А.С. О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 8. С. 1172–1188.
9. Belotserkovskii O.M., Kholodov A.S., Turchak L.I. Grid-characteristic methods in multidimensional problems of gas dynamics // *Current Problems in Comput. Fluid Dynamics*. М.: Мир, 1986. С. 125–189.
10. Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы для многомерных задач механики сплошных сред // *Вопр. кибернетики*. М.: НСК АН СССР. Вып. 15. 1987. С. 140–163.
11. Холодов А.С. Разностные схемы с положительной аппроксимацией для многомерных систем уравнений гиперболического типа на нерегулярных сетках // *Рациональное численное моделирование в нелинейной механике*. М.: Наука, 1990. С. 49–62.
12. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
13. Федоренко Р.П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2. № 6. С. 1122–1128.
14. Самарский А.А. Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 4. С. 638–648.
15. Дьяченко В.Ф. Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 4. С. 680–688.
16. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений параболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 9. С. 1346–1358.
17. Холодов А.С. О мажорантных разностных схемах для уравнения параболического типа на неструктурированных сетках // *Матем. моделирование*. М.: Изд-во МГУ, 1993. С. 105–113.
18. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматгиз, 1960.
19. Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1.
20. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
21. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнений в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1985.
22. Холодов А.С. Монотонные разностные схемы на нерегулярных сетках для эллиптических уравнений в области со многими несвязными границами // *Матем. моделирование*. 1991. Т. 3. № 9. С. 104–113.
23. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1977.