на (E', δ) *функции* f *(слабо) сходится соответствующая последовательность функций от множества производящих операторов представлений* T^n:

$$\int_{E'} f(z)\,(\nu^{(n)}(dz)\,h, h) \to \int_{E'} f(z)\,(\nu(dz)\,h, h).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. I, в. 2. с. 177—237.
2. *Прохоров Ю. В., Сазонов В. В.* Некоторые результаты, связанные с теоремой Бохнера.— Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. VI, в. 1, с. 87—93.
3. *Prohorov Yu. V.* The method of characteristic functionals.— In: Proceedings of the Fourth Berkeley Simposium on Mathematical Statistics and Probability. V. 2. Berkeley — Los — Angelos: Univ. California Press, 1961, p. 403—429.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. I. М.: Наука, 1971, 664 с.
5. *Смолянов О. Г.* Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. М.: МГУ, 1979, 864 с.
6. *Смоляков О. Г., Фомин С. В.* Меры на топологических линейных пространствах.— Успехи матем. наук, 1976, т. XXXI, в. 4, с. 3—56.
7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971, 359 с.
8. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962, 895 с.
9. *Le Cam L.* Convergence in distribution of stochastic processes.— Univ. Calif. Publ. Statist., 1957, v. 2, № 11, p. 207—236.
10. *Райков Д. А.* О двух классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях.— В сб.: Труды семинара по функциональному анализу. В. 5. Воронеж: с. 22—34.

Поступила в редакцию
29.III.1981

ON THE WEAK SEQUENTIAL COMPLETENESS OF THE SPACES OF RADON MEASURES

DALECKIĬ Ju. L. (KIEV), SMOLJANOV O. G. (MOSCOW)

(*Summary*)

A wide class of spaces is introduced and investigated such that the corresponding spaces of Radon measures are weakly sequentially complete.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОШИБКИ ПРОГНОЗА В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

БАБАЯН Н. М.

1. Рассмотрим стационарную в широком смысле последовательность $\ldots x_{-1}$ $x_0, x_1 \ldots$ со спектральной плотностью (с. п.) $f(\lambda)$. Обозначим σ^2 ошибку наилучшего линейного прогноза случайной величины x_0 по всему прошлому, а σ_n^2 — ошибку линейного прогноза по прошлому длины n, т. е. по величинам $x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_{-1}$. Положим $\delta_n = \sigma_n^2 - \sigma^2$. Ясно, что $\delta_n \geqslant 0$ и что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Мы будем исследовать скорость убывания величины δ_n к нулю.

Случай, когда с. п. $f(\lambda)$ удовлетворяет условию $\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\,d\lambda > -\infty$, хорошо изучен. В частности, Бакстер [4] указал достаточные, а И. А. Ибрагимов [5] — необходимые и достаточные условия, которые, будучи наложены на с. п. $f(\lambda)$, гарантируют, что разность δ_n убывает достаточно быстро: $\delta_n = O(n^{-\gamma})$, $\gamma > 2$ $(n \to \infty)$.

Гренандер и Розенблатт [2] нашли необходимые и достаточные условия того, что δ_n убывает по крайней мере экспоненциально: $\delta_n = O(e^{-cn})$, $c > 0$ $(n \to \infty)$.

В настоящей заметке мы будем рассматривать сингулярный случай. В этом случае с. п. $f(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\,d\lambda = -\infty. \tag{1}$$

Известно, что $\delta^2 = 0$ и $\delta_n = \sigma_n^2$ при условии (1). Мы будем интересоваться вопросом о существовании и значении предела $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n}$.

Розенблатт в [1], опираясь на результаты Сеге [7], показал, что если с. п. $f(\lambda)$ положительна и непрерывна на отрезке $[\pi/2 - \alpha, \pi/2 + \alpha]$ (т. е. на дуге длины 2α единичной окружности) и равна нулю вне него, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n} = \tau, \tag{2}$$

где $\tau = \sin(\alpha/2)$ — трансфинитный диаметр (см. п. 2) той дуги, на которой с. п. $f(\lambda)$ положительна.

В настоящей заметке показывается, как можно обобщить этот результат Розенблатта на случай нескольких дуг, не требуя при этом непрерывности с. п. $f(\lambda)$.

2. Остановимся на необходимом в дальнейшем понятии трансфинитного диаметра.

Пусть E — ограниченное замкнутое множество на плоскости z. Обозначим $T_n(z, E)$ полином Чебышева, наименее уклоняющейся в равномерной метрике от нуля на множестве E. Положим $m_n = \max\limits_{z\in E} |T_n(z, E)|$. Тогда существует (см., например, [9]) предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n}$, который называется *трансфинитным диаметром* множества E и обозначается $\tau(E)$.

3. Вернемся к нашей задаче. В силу изометрии пространств $L^2(fd\lambda)$ и $H = \operatorname{span}\{x_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ имеем:

$$\sigma_n^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{in\lambda} - \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ik\lambda} \right|^2 f(\lambda)\,d\lambda = \min_{p_n \in \pi_n} \int_{-\pi}^{\pi} |p_n(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)\,d\lambda, \tag{3}$$

где π_n — класс полиномов степени n с единичными старшими коэффициентами.

Введем последовательность ортонормальных относительно с. п. $f(\lambda)$ многочленов $\varphi_n(z) = k_n z^n + \ldots$, $k_n > 0$. Эти многочлены однозначно определяются соотношениями

$$(1/(2\pi)) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\lambda}) \overline{(\varphi_m(e^{i\lambda}))} f(\lambda)\,d\lambda = \delta_{nm},$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Известно, что минимум (3) достигается при $p_n(z) = \varphi_n(z)/k_n$ и равен $2\pi/k_n^2$ (см. [8]). Таким образом, $\sigma_n^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |p_n(e^{i\lambda})|\, f(\lambda)\,d\lambda = 2\pi/k_n^2$.

4. Я. Л. Геронимус в [6] рассматривал схожую с нашей задачу. Именно, пусть $p_n(z)$ — полином, минимизирующий интеграл $\sigma_n^2 = \int_E |p_n(z)|^2\,d\alpha$, где $\alpha(e)$ $(e \subset E)$ —

счетно аддитивная функция множества, плотность абсолютно непрерывной компоненты которой π_* в. положительна, а множество E состоит из конечного числа аналитических дуг и конечного числа замкнутых областей, граница каждой из которых является гладкой кривой Жордана. Положив $M_n = \max\limits_{z\in E} |p_n(z)|$, Геронимус показал, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = \tau(E)$. Это доказательство опирается на одну теорему Мазуркевича, которую мы сейчас приведем. Используя ту же схему доказательства, мы получим обобщение результата (2) Розенблатта.

Далее $\mu(E)$ обозначает линейную меру множества E. Напомним, что континуумом называется непустое связное хаусдорфово бикомпактное пространство.

Теорема 1. *Всякому* $\varepsilon > 0$ *соответствует такое* $\delta > 0$, *что для всякого континуума* Γ *диаметра* d *и всякого замкнутого его подмножества* F *выполняется неравенство*

$$M_n = \max_{\Gamma} |p_n(z)| \leqslant (1+\varepsilon)^n \max_{F} |p_n(z)|,$$

если только $\mu(\Gamma - F) < \delta d$.

Эта теорема доказана Мазуркевичем в [3]. Очевидно, она сохраняет силу, если заменить континуум Γ несколькими дугами единичной окружности.

Теорема 2. *Пусть множество* $E = \{\lambda: f(\lambda) > 0\}$ *состоит из конечного числа дуг единичной окружности. Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n} = \tau(E)$.

Доказательство. Введем для удобства меру α на E следующим образом: $\alpha(e) = \int\limits_e f d\mu$, $e \subset E$, и пусть $\alpha(E) = c$. Тогда

$$\sigma_n^2 = \int\limits_E |p_n(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_E |p_n(z)|^2 d\alpha \leqslant \int\limits_E |T_n(z, E)|^2 d\alpha \leqslant m_n^2 c.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sigma_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n c} = \tau(E). \tag{4}$$

Поэтому достаточно показать, что $\lim \sqrt[n]{\sigma_n} \geqslant \tau(E)$. Для этого рассмотрим те подмножества $e_n \subset E$, для которых выполняются неравенства $|p_n(z)| > \sqrt{\sigma_n m_n}$, $z \in e_n$. Так как $\alpha(e_n) \leqslant c < \infty$, то $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{\alpha(e_n)} \leqslant 1$. Обозначим $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ ту подпоследовательность натурального ряда, для которой

$$\lim_{i\to\infty} \alpha(e_{\gamma_i})^{1/\gamma_j} = 1. \tag{5}$$

Для подпоследовательности $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ оставшихся чисел [1] имеем:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} (\alpha(e_{\beta_j}))^{1/\beta_j} < 1. \tag{6}$$

Далее, $\sigma_{\gamma_i}^2 = \int\limits_E |p_{\gamma_i}(z)|^2 d\alpha \geqslant \int\limits_{e_{\gamma_i}} |p_{\gamma_i}(z)|^2 d\alpha \geqslant \sigma_{\gamma_i} m_{\gamma_i} \alpha(e_{\gamma_i})$, что в силу (5) влечет неравенство

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{\gamma_i}^{1/\gamma_j} \geqslant \lim_{i\to\infty} (m_{\gamma_i} \alpha(e_{\gamma_i}))^{1/\gamma_j} = \tau(E). \tag{7}$$

С другой стороны, $|p_{\beta_j}(z)| \leqslant (\sigma_{\beta_j} m_{\beta_j})^{1/2}$ при $z \in F_j = E - e_{\beta_j}$, причем из неравенства (6) следует, что $\alpha(e_{\beta_j}) \leqslant q^{\beta_j}$, $q < 1$, т. е. $\alpha(e_{\beta_j})$ достаточно малы при достаточно больших j. Поскольку с. п. $f(\lambda)$ положительна на E, в силу известных теорем из теории меры выводим, что $\mu(e_{\beta_j})$ также достаточно малы при достаточно больших j.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ по теореме 1. Для достаточно больших номеров j имеем: $\mu(E - F_{\beta_j}) = \mu(e_{\beta_j}) < \delta d(E)$. Следовательно, по теореме Мазуркевича $m_{\beta_j} \leqslant M_{\beta_j} \leqslant (1+\varepsilon)(\sigma_{\beta_j} m_{\beta_j})^{1/\beta_j}$, $m_{\beta_j} \leqslant (1+\varepsilon)^{2\beta_j} \sigma_{\beta_j}$, поэтому в силу

[1] По крайней мере одна из последовательностей $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ бесконечна.

произвольности ε

$$\varliminf_{j\to\infty} \sigma_{\beta_j}^{1/\beta_j} \geqslant \tau(E). \tag{8}$$

Сопоставляя (4), (7), (8), получим: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n} = \tau(E)$. Теорема доказана.

В заключение пользуюсь случаем выразить свою признательность И. А. Ибрагимову, под руководством которого была написана настоящая заметка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosenblatt M.* Some purely deterministic processes.— J. Rat. Mech. Anal., 1957, v. 6, № 6, p. 801—810.
2. *Grenander U., Rosenblatt M.* An extention of a theorem of A. G. Szegö and its application to the study of stochastic processes.— Trans. Amer. Math. Soc., 1954, v. 76, № 1, p. 112—126.
3. *Mazurkiewicz S.* Un theorem sur les polynomes.— Ann. Soc. Pol. Math., 1954, v. 18, p. 113—117.
4. *Baxter G.* An asymptotic result for the finite predictor.— Math. Scand., 1962, v. 10, № 2, p. 137—145.
5. *Ибрагимов И. А.* Об асимптотическом поведении ошибки прогноза.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. IX, в. 4, с. 695—703.
6. *Геронимус Я. Л.* О некоторых асимптотических свойствах полиномов.— Матем. сб., 1948, т. 23 (65), № 1, с. 77—88.
7. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
8. *Гренандер У., Сеге Г.* Теплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961, 308 с.
9. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966, 628 с.

Поступила в редакцию
10.IV.1981

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE PREDICTION ERROR IN THE SINGULAR CASE

BABAYAN N. M. (LENINGRAD)

(*Summary*)

Let $\{X_j\}$ be a singular stationary in a wide sense stochastic process with the spectral density function $f(\lambda)$. Denote by σ_n^2 the mean square prediction error for the prediction of X_0 by linear forms depending on $X_{-1}, X_{-2}, \ldots X_{-n}$. The rate of convergence $\delta_n = \sigma_n^2 - \sigma_\infty^2 \downarrow 0$, $n \uparrow \infty$, is investigated.

О МОНОТОННОСТИ В ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

КУРИЦЫН Ю. Г.

Напомним определение последовательности перестановочных случайных величин (с. в.)

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность с. в. $\{X_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ называется последовательностью *перестановочных* с. в., если для любого $n > 1$ случайный вектор с координатами $\{X_k(\omega)\}_{k=1}^{n}$ имеет функцию распределения, не изменяющуюся при любых перестановках ее аргументов.