Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 3

Посвящается Людвигу
Дмитриевичу Фаддееву

О ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГЕССИАНА ИЛИ ГЛАВНЫМИ КРИВИЗНАМИ ИСКОМОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ЧАСТЬ I: ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МОНЖА АМПЕРА

Н. М. Ивочкина, О. А. Ладыженская

В работе доказана глобальная однозначная разрешимость уравнения $-u_t + (\det u_{xx})^{1/n} = g$, $(x,t) \in Q_T = \Omega \times [0,T)$ при начально-краевых условиях $u(x,0) = \varphi(x,0)$ для $x \in \Omega$; $u(x,t) = \varphi(x,t)$ для $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$, если g и φ суть достаточно гладкие функции, удовлетворяющие необходимым условиям согласования, $\varphi(x,0)$ — строго выпукла в $\bar{\Omega}$, а Ω — выпуклая область с достаточно гладкой границей и если выполнено любое из двух условий

$$\min_{Q_T} g + \min\Big\{\min_{(x,t)\in\partial' Q_T} \varphi_t(x,t)\Big\} - \frac{1}{2}ad^2 > 0,$$

где $\partial' Q_T$ —боковая поверхность цилиндра Q_T вместе с нижним основанием, d есть радиус наименьшего шара, содержащего Ω, а $a = \max\{0; \max_{Q_T} g_t\}$, или

$$\min\Big\{\min_{(x,t)\in\partial' Q_T} [\varphi_t(x,t) + g(x,t)]\Big\} > 0,$$

причем матрицы $g_{xx}(x,t)$, $((\det \varphi_{xx}(x,0))^{1/n})_{xx}$, $(x,t) \in Q_T$, неположительны.

В последнем параграфе дано сравнительно простое доказательство предложения общего характера о гельдеровости некоторого семейства функции. Из этого предложения следуют оценки констант Гёльдера для $u_{x_i x_j}$ в $\bar{Q}_T$.

Введение

В данной работе мы исследуем вопрос о глобальной однозначной разрешимости уравнений

$$M[u] \equiv -u_t + F(u_{xx}) = g, \quad F(u_{xx}) = (\det u_{xx})^{1/n}, \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

в классах гладких функций при начально-краевом условии

$$(u-\varphi)|_{\partial' Q_T} = 0, \quad \partial' Q_T = \partial'' Q_T \cup \Omega_0, \tag{2}$$

где
$$\partial'' Q_T = \{\,(x,t) \parallel x \in \partial\Omega, t \in [0,T]\,\}, \qquad \Omega_0 = \{\,(x,t) \parallel x \in \bar\Omega, t = 0\,\}.$$

Здесь u_{xx} есть Гессиан функции u, т.е. матрица $(u_{x_ix_j})$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Область Ω предполагается строго выпуклой, а ее граница $\partial\Omega$ равно, как и функции g и φ, считаются достаточно гладкими. Для упрощения формулировок будем считать, что
$$M[\varphi](x,0) = g(x,0), \quad x \in \bar\Omega. \tag{2'}$$

Мы используем слудующие обозначения: $\mathcal{H}^{2l+\alpha} \equiv H^{2l+\alpha,l+\alpha/2}(\bar Q_T)$, $\alpha \in (0,1)$, $l \in N^+$ — пространства Гёльдера (см. [1]); $C^{l,k}(Q_T)$ — пространство непрерывных в Q_T функций u, имеющих непрерывные в Q_T производные $D_x^i y$, $i \leqslant l$, $D_t^j u$, $j \leqslant k$.

Обозначим через K *класс функций из* $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar Q_T)$, *являющихся строго выпуклыми по* $x \in \bar\Omega$ *при любом* $t \in [0,T]$. Пересечение K с $\mathcal{H}^{2l+\alpha}$ будем обозначать $K^{2l+\alpha}$, а $K \cap C^{2l,l}(\bar Q_T) \equiv K^{2l}$.

Тип уравнения (1) зависит от функции u, но на функциях из K оно параболично. Именно в этом классе функций будет доказана разрешимость задачи (1), (2). Функцию φ считаем определенной во всем $\bar Q_T$ и выпуклой при $t = 0$. Теорема единственности в этом случае хорошо известна.

Мы докажем справедливость следующего предложения:

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *однозначно разрешима в классе* $K^{4+\alpha}$, *если* Ω — *строго выпукла,* $\partial\Omega \subset \mathcal{H}^{4+\alpha}$, $g \in \mathcal{H}^{2+\alpha}$, $\varphi \in \mathcal{H}^{4+\alpha}$, $\varphi(\cdot,0) \in K^{4+\alpha}$, *если выполнено одно из условий*:
$$\min_{Q_T} g + \min_{\partial' Q_T} \varphi_t - \frac{1}{2} a d^2 \equiv \nu_1 > 0, \tag{3}$$
где d *есть радиус наименьшего шара* $B_d(x^0)$, *содержащего* Ω, *а* $a = \max\{0; \max_{Q_T} g_t\}$, *или*
$$\min_{\partial' Q_T} (\varphi_t + g) \equiv \tilde\nu_1 > 0 \tag{4}$$
и матрицы $g_{xx}(x,t)$, $(F(\varphi_{xx}(x,0)))_{xx}$, $(x,t) \in Q_T$) *неположительны.*

Заметим благодаря (2′) $u_t(x,0) = \varphi_t(x,0)$, $x \in \bar\Omega$.

Наша работа — это получение априорных оценок для решений и задач вида (1), (2) при выполнении условий (3) или (4). Известно, что достаточно найти мажоранту для нормы решений в пространстве $\mathcal{H}^{2+\beta}$ с каким-либо $\beta > 0$. Дальнейшие оценки получаются на основании теории линейных равномерно параболических уравнений.

Для доказательства разрешимости задачи (1), (2) удобно воспользоваться методом продолжения по параметру, соединив ее с задачей того же характера, имеющей гладкое решение. В качестве такого семейства задач можно взять следующие:
$$M[u^\tau] = g^\tau, \ u^\tau|_{\partial' Q_T} = \varphi^\tau, \quad \tau \in [0,1], \tag{5}$$
где $g^\tau = \tau g + (1-\tau) g^0$, $g^0(x,t) \equiv F(\varphi_{xx}(x,0))$, $\varphi^\tau = \tau\varphi + (1-\tau)\varphi^0$, $\varphi^0(x,t) \equiv \varphi(x,0)$. При $\tau = 1$ задача (5) совпадает с задачей (1), (2), а при $\tau = 0$ она имеет решение $u^0 = \varphi^0$. Легко проверить, что в случае (3) при любом $\tau \in [0,1)$ выполняется неравенство
$$\min_{Q_T} g^\tau + \min_{\partial' Q_T} \varphi_t^\tau - \frac{1}{2} a^\tau d^2 \geqslant \tau\nu_1 + (1-\tau) g^0 \geqslant \nu > 0. \tag{3'}$$

Благодаря этому, как будет доказано в этой работе, для всех возможных решений u^τ из $K^{4+\alpha}$ равномерно ограничены нормы в пространстве $H^{4+\alpha}$. Это же, как известно, гарантирует разрешимость всех задач (5) (см., например, [1], или [2], или [3]). Аналогично во втором случае из условия (4) для (1), (2) следует выполнимость этого условия для задач (5), если в качестве $\tilde{\nu}$ взять число $\tau\tilde{\nu}_1 + (1-\tau)\min_\Omega g^0$. Это же, как будет доказано далее, позволяет получить оценки выше указанных норм и разрешимость задач (5). Отметим еще, что при любом $\tau \in [0,1)$ для задачи (5) выполнены те же условия согласования, что и для задач (1), (2).

Итак, наша цель — получение мажорант для выпуклых решений задач (1), (2) в пространстве $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ с каким-либо $\beta > 0$. Для этого мы используем результаты разных авторов как по эллиптическим, так и по параболическим уравнениям. Их мы будем цитировать по ходу дела.

Здесь же отметим, что исследованию полностью нелинейных, но тотально параболических уравнений вида (1) посвящены работы Н. В. Крылова (см. [4, 5]) и Line Wang [6, 7]. В них имеются указания и на работы других математиков по такого рода уравнениям. Уравнению $-u_t \det u_{xx} = g$ посвящены работы Н. В. Крылова [8, 4] и Wang Guanglie [9].

Эволюции типа (1) замкнутых поверхностей исследованы в работах K. Tso[10] и B. Chow [11].

Мы не приводим здесь обширную литературу, посвященную квазилинейным уравнениям, хотя и для них имеется прогресс, особенно по тепловым потокам под действием средней кривизны. Из последних публикаций на эту тему укажем на работу [12].

§1. Ряд известных фактов о функции F

Обозначим через S^n множество всех симметричных матриц $n \times n$, а через S^n_+ — множество всех положительно определенных симметричных матриц. Известно, что функция $F : r \in S^n_+ \to (\det r)^{1/n}$ вогнута, т.е. для $r = (r_{ij}) \in S^n_+$ при любых ξ^{ij} верно неравенство

$$\sum_{i,j,k,m=1}^{n} \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r_{ij} \partial r_{km}} \xi^{ij} \xi^{km} \leqslant 0. \tag{1.1}$$

Выведем уточненный вариант (1.1). Для матрицы $r = (r_{ij})$ с $\det r \neq 0$ элементы обратной матрицы обозначим буквами r^{ij}, так что $r^{-1} = (r^{ij})$, а алгебраическое дополнение к r_{ij} в r обозначим через R^{ij}. Тогда, как известно, $u^{ji} = R^{ij}(\det r)^{-1}$ и $\sum_{m=1}^{n} r_{km} R^{lm} = \delta^l_k \det r$ при $\forall k, l$. Дифференцируя это равенство при $k = l$ по r_{km}, получим

$$\frac{\partial}{\partial r_{km}} \det r = R^{km} = r^{mk} \det r.$$

Отсюда следует, что для $r > 0$ (т.е. $r \in S^n_+$) справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial r_{km}} \log \det r = r^{mk} = r^{km}, \quad r > 0,$$

и

$$F_{km}(r) \equiv \frac{\partial F(r)}{\partial r_{km}} = \frac{1}{n} F(r) r^{km}, \quad r > 0. \tag{1.2}$$

Верны также равенства

$$\frac{\partial r^{pm}}{\partial r_{ij}} = -r^{pi}r^{jm}, \quad \det r \neq 0. \tag{1.3}$$

Они выводятся из равенств $\sum_{q=1}^{n} r^{pq}r_{ql} = \delta_p^l$, продифференцированных по r_{ij}, а также самих этих равенств. Дифференцирование (1.2) по r_{ij} дает с учетом (1.3) равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{ij}\partial r_{km}} \log\det r = -r^{ki}r^{jm}, \quad r > 0. \tag{1.4}$$

Благодаря им для $r > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial r_{ij}\partial r_{km}}(\det r)^{1/n}\\
&= \frac{\partial}{\partial r_{ij}}\left[\frac{1}{n}(\det r)^{1/n-1}\frac{\partial \det r}{\partial r_{km}}\right] = \frac{1}{n}\frac{\partial}{r_{ij}}\left[(\det r)^{1/n}\frac{\partial}{\partial r_{km}}\log\det r\right]\\
&= \frac{1}{n}\frac{\partial}{r_{ij}}[(\det r)^{1/n}r^{km}] = \frac{1}{n^2}(\det r)^{1/n}r^{km}\frac{\partial}{\partial r_{ij}}\log\det r + \frac{1}{n}(\det r)^{1/n}\frac{\partial r^{km}}{\partial r_{ij}}\\
&= \frac{1}{n}(\det r)^{1/n}\left[\frac{1}{n}r^{ij}r^{km} - r^{ik}r^{jm}\right].
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ суть собственные числа матрицы $r > 0$. Используя инвариантность $F(r)$ относительно ортогональных преобразований r, найдем миноранту для левой части (1.1), считая, что $r_{ij} = \delta_i^j\lambda_i$. А именно, используя это и (1.5), выводим

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,j,k,m=1}^{n}\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r_{ij}\partial r_{km}}\xi^{ij}\xi^{km} &= \frac{1}{n}F(r)\left[\sum_{i,m}\lambda_i^{-1}\lambda_m^{-1}(\xi^{im})^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}\xi^{ii}\right)^2\right]\\
&\geqslant \frac{1}{n}F(r)\sum_{i\neq m}\lambda_i^{-1}\lambda_m^{-1}(\xi^{im})^2, \quad r > 0,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

при любых (ξ^{im}) и любых $r \in S_+^n$.

Свойство (1.1) есть свойство (нестрогой) вогнутости (выпуклости вверх) функции F на S_+^n. Ввиду выпуклости самого множества S_+^n это свойство F можно записать в нелокальной форме

$$F(\tau r_1 + (1-\tau)r_2) \geqslant \tau F(r_1) + (1-\tau)F(r_2), \tag{1.7}$$

где $\tau \in [0,1]$, а $r_1, r_2 \in S_+^n$, или в форме

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F(r)}{\partial r_{ij}}q_{ij} \equiv \sum_{i,j=1}^{n}F_{ij}(r)q_{ij} \geqslant F(q), \quad \forall r, q \in S_+^n, \tag{1.8}$$

если учесть еще, что $F(r)$ 1-однородна по r. Помимо вогнутости функция F на S_+^n обладает еще свойством положительной монотонности, т.е.

$$F(r+\eta) \geqslant F(r) > 0 \quad \text{для } \forall r \in S_+^n \text{ и } \forall \eta \in \overline{S_+^n}. \tag{1.9}$$

Более того, справедлива

Лемма 1.1. *Для принадлежности матрицы r к S_+^n необходимо и достаточно, чтобы* $\det r > 0$ *и* (1.9), (1.8) *выполнялось для любой неотрицательной матрицы* η.

Действительно, необходимость условий леммы следует из (1.7). Для проверки достаточности рассмотрим полином $P_n(t) = \det(r + tI)$. Соотношение (1.9) дает положительность $P_n(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Поэтому все собственные члены матрицы r (а они равны корням полинома $P_n(t)$, взятыми с обратными знаками) положительны, и потому $r \in S_+^n$.

Из (1.2) видно, что матрица $(F_{ij}(r))$ положительно определенна на S_+^n и при $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ с $|\xi| \neq 0$

$$F_{ij}(\tau r_1 + (1-\tau)r_2)\xi_i\xi_j > 0 \quad \text{при } \forall r_1, r_2 \in S_+^n,\ \tau \in [0,1]. \tag{1.10}$$

Приведем еще одно нужное нам свойство функции F:

Лемма 1.2. *Для любой* $r \in S_+^n$ *матрицы* $(F_{ij}(r))$ *удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname{tr}(F_{ij}(r)) \equiv \sum_{i=1}^n F_{ij}(r) \geqslant 1.$$

Действительно, след матрицы инвариантен относительно ортогональных преобразований. Поэтому мы можем считать, что матрица $(F_{ij}(r))$ диагональна.

При этом будут диагональны и матрицы r и r^{-1} (см.(1.2)). Пусть $r_{ij} = \lambda_i \delta_i^1$, тогда

$$\operatorname{tr}(F_{ij}(r)) = \frac{1}{n} F(r) \sum_{i=1}^n r^{ii} = \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \sum_{i=1}^n \lambda_j^{-1} \geqslant 1.$$

§2. Теоремы сравнения

Уравнение (1) параболично на функциях u, принадлежащих K, ибо для них матрицы $(u_{xx}(x,t))$ принадлежат S_+^n при любой $(x,t) \in \bar{Q}_T$ и потому $F_{ij}(u_{xx}) \equiv \frac{\partial F(u_{xx})}{\partial u_{ij}}$, $i,j \in 1,\dots,n$ в любой точке $(x,t) \in \bar{Q}_T$ образуют положительно определенную матрицу $(F_{ij}(u_{xx}))$ (см. (1.2) и (1.10)). Здесь и далее мы пользуемся сокращенными обозначениями для производных:

$$u_i = u_{x_i}, \qquad u_{ij} = u_{x_i x_j}, \qquad (u_{ij}) = u_{xx}.$$

Введем по функции $u \in C^{2,0}(Q_T)$ линейный оператор

$$L_u(v) = -v_t + F_{ij}(u_{xx})v_{ij}. \tag{2.1}$$

Для $u \in K$ этот оператор параболичен в $\bar{Q}_T$, и потому для него справедливо следующее утверждение, являющееся частным случаем теоремы Хопфа:

Лемма 2.1. *Пусть* $u \in K$ *и для* $v \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ *в* Q_T *выполняется неравенство* $L_u(v) \leqslant 0$. *Тогда* $\min_{Q_T} v = \min_{\partial' Q_T} v$. *Если же* $L_u(v) \geqslant 0$, *то* $\max_{Q_T} v = \max_{\partial Q_T} v$.

Убедимся в справедливости такого утверждения:

Лемма 2.2. *Пусть* $u' \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, $\det u'_{xx} \geqslant 0$ *и в тех точках, где* $u'_{xx} > 0$ *выполняется неравенство*

$$-u'_t(x,t) + h(x,t,u'_x(x,t))F(u'_{xx}(x,t) \leqslant f(x,t,u'_x(x,t)), \tag{2.2}$$

а $u'' \in K$ *и удовлетворяет в* Q_T *неравенству*

$$-u''_t(x,t) + h(x,t,u''_x(x,t))F(u''_x(x,t)) \geqslant f(x,t,u'_x(x,t)). \tag{2.3}$$

Здесь h и f суть непрерывные функции указанных аргументов, причем $h \geqslant 0$. Тогда если $u'' - u' \leqslant 0$ на $\partial' Q_T$, то $u'' - u' \leqslant 0$ и $\bar{Q}_T$.

Для доказательства этого утверждения введем функции $w'(x,t) = u'(x,t)e^{-\lambda t}$ и $w''(x,t) = u''(x,t)e^{\lambda t}$ с $\lambda > 0$. Для них из (2.2) и (2.3) следуют неравенства

$$-w'_t - \lambda w' + h(x,t,u'_x)F(u'_{xx})e^{-\lambda t} \leqslant e^{-\lambda t} f(x,t,u'_x) \tag{2.2$'$}$$

и

$$-w''_t - \lambda w'' + h(x,t,u'_x)F(u''_{xx})e^{-\lambda t} \geqslant e^{-\lambda t} f(x,t,u''_x). \tag{2.3$'$}$$

Если функция $w(x,t) = w''(x,t) - w'(x,t)$ имеет свой максимум $\bar{Q}_T$ на $\partial' Q_T$, то в силу условия леммы он неположителен, и потому $w(x,t) = e^{-\lambda t}(u'' - u'(x,t)) \leqslant 0$ в $\bar{Q}_T$. В противном случае, максимум w реализуется в какой-либо точке $(x^0, t^0) \in \bar{Q}_T \setminus \partial' Q_T$ и в ней мы имеем: $w_x = 0$, $w_t \geqslant 0$ и $w_{xx} \leqslant 0$. Отсюда следуют соотношения: $u'_x = u''_x$, $u'_{xx} \geqslant u''_{xx} > 0$ (ибо $u'' \in K$), и потому в этой точке выполняются оба неравенства: (2.2$'$) и (2.3$'$), причем h и f в них совпадают. Разность этих неравенств дает

$$-w_t - \lambda w + he^{-\lambda t}[F(u''_{xx}) - F(u'_{xx})] \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Но в рассматриваемой точке $w_t \geqslant 0$ и $F(u''_{xx}) - F(u'_{xx}) \leqslant 0$ (ибо в ней $u'_{xx} \geqslant u''_{xx} > 0$). Поэтому из (2.4) следует $w(x^0, t^0) \leqslant 0$. Отсюда же имеем $w(x,t) = 0$, а потому и $u''(x,t) - u'(x,t) \leqslant 0$ во всех $(x,t) \in Q_T$. Лемма доказана.

Из леммы 2.2 следует известный факт:

Теорема 2.1. *Задача* (1), (2) *может иметь не более одного решения в классе* K.

§3. Оценки для u_t, u и u_x

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для решения* u *задачи* (1), (2) *из класса* K *верны неравенства*

$$\frac{1}{2}a(x - x^0)^2 + \min_{\partial' Q_T} \varphi_t - \frac{1}{2}ad^2 \leqslant u_t(x,t) \leqslant -\frac{1}{2}b(x - x^0)^2 + \max_{\partial' Q_T} \varphi_t + \frac{1}{2}bd^2, \tag{3.1}$$

в которых $a = \max\{0; \max_{Q_T} g_t\}$, $b = \max\{0; \max_{Q_T}(-g_t)\}$, *а* x^0 *— центр шара* $B_d(x^0)$ *радиуса* d, *содержащего* Ω.

Если

$$\min_{Q_T} g + \min_{\partial' Q_T} \varphi_t - \frac{1}{2}ad^2 \equiv \nu_1 > 0, \tag{3.2}$$

то

$$u_t(x,t) + g(x,t) \geqslant \nu_1 > 0 \quad \textit{в} \quad \bar{Q}_T. \tag{3.3}$$

Для доказательства теоремы используем уравнение

$$L_u u_t = g_t. \tag{3.4}$$

Ему удовлетворяет производная u_t решения u уравнения (1). Введем функцию $v(x,t) = u_t(x,t) - \frac{1}{2}a(x-x^0)^2$ с x^0 и a, указанными в лемме. Для нее в силу (3.4), леммы 1.2 и выбора a имеем

$$L_u v = g_t - a\sum_{i=1}^{n} F_{ii}(u_{xx}) \leqslant g_t - a \leqslant 0.$$

Поэтому в соответствии с леммой 2.1 в $\forall(x,t)\in\bar{Q}_T$

$$v(x,t) = u_t(x,t) - \frac{1}{2}a(x-x^0)^2 \geqslant \min_{\partial' Q_T} v \geqslant \min_{\partial' Q_T} \varphi_t - \frac{1}{2}ad^2.$$

Для доказательства правого неравенства в (3.1) возьмем функцию $w(x,t) = u_t(x,t) + \frac{b}{2}(x-x^0)^2$. Для нее $L_u w \geqslant 0$, и потому (в силу леммы 2.1) $w \leqslant \max_{\partial' Q_T} w$. Это же дает правую часть (3.1). Утверждение (3.3) есть следствие левого неравенства из (3.1) и предположения (3.2).

Из правого неравенства строки (3.1) сделаем такой вывод:

$$u_t(x,t) + g(x,t) \leqslant \max_{\partial' Q_T} \varphi_t + \frac{1}{2}bd^2 + \max_{Q_T} g \equiv M_1 \text{ в } Q_T. \tag{3.5}$$

Выделим еще один случай, когда мы можем оценить u_t снизу.

Теорема 3.2. *Пусть u есть решение из класса K уравнения* (1), *в котором g удовлетворяет условию*:

$$\text{матрица } g_{xx}(x,t) \text{ неположительна в } \bar{Q}_T. \tag{3.6}$$

Тогда

$$u_t(x,t) + g(x,t) \geqslant \min_{\partial' Q_T}(\varphi_t + g), \quad (x,t)\in\bar{Q}_T, \tag{3.7}$$

и потому, если

$$\min_{\partial' Q_T}(\varphi_t + g) \equiv \tilde{\nu}_1 > 0, \tag{3.8}$$

то

$$u_t(x,t) + g(x,t) \geqslant \tilde{\nu}_1 > 0. \tag{3.9}$$

Справедливость теоремы следует из того, что функция $w(x,t) \equiv u_t(x,t) + g(x,t)$ удовлетворяет уравнению $L_u w = g_t + L_u g = F_{ij}(u_{xx})g_{ij}$. Из условия (3.6) и принадлежности u к K следует, что $L_u(w) \leqslant 0$, а это в силу леммы 2.1 дает (3.7).

Будем считать в дальнейшем тексте, что для исследуемого решения u мы имеем оценки

$$0 < \nu_1 \leqslant \psi(x,t) \equiv u_t(x,t) + g(x,t) \leqslant \mu_1. \tag{3.10}$$

Благодаря им мы можем привлекать те результаты по стационарным уравнениям Монжа-Ампера

$$\det u_{xx}(x,t) = [\psi(x,t)]^n = [u_t(x,t) + g(x,t)]^n, \tag{3.11}$$

которые используют о ψ лишь информацию (3.10). Переменная t при этом играет роль параметра. К числу таких результатов относится мажорирование $\max_{x\in\Omega}|u(x,t)|$ и $\max_{x\in\Omega}|u_x(x,t)|$ числами, зависящими лишь от ν_1 и μ_1, а также от φ и Ω. Следствием этого является

Теорема 3.3. *Если выполнено условие* (3) *или* (4), *то для решения* u *класса* K^3 *задачи* (1), (2) *справедливы оценки*

$$\max_{Q_T}|u| \leqslant M_0, \qquad \max_{Q_T}|u_x| \leqslant M_1, \tag{3.12}$$

мажоранты в которых зависят лишь от ν_1 *из* (3) *или* $\tilde{\nu}_1$ *из* (4), *а также от* φ *и* Ω.

Мы затрудняемся сказать, кто первый построил мажоранты для $\max_\Omega |u|$ и $\max_\Omega |u_x|$ в случае стационарного уравнения (3.11) только при условиях (3.10). Для уравнений, включающих эти уравнения, таковые можно извлечь из работ А. Д. Александрова 50-х—начала 60-х годов. Оценки (3.12) имеются также в книге [13] и в работах [14, 15, 16], причем для более обших, чем (3.11), уравнений.

§4. Мажорирование $\max_{Q_T}|u_{xx}|$

Обозначим символом u_γ производную от u по направлению $\gamma \in \mathbb{R}^n$, т.е. $u_\gamma = \sum_{i=1}^n u_{x_i}\cos(\gamma, x_i)$, а символом $u_{\gamma\gamma} = \sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}\cos(x_i,\gamma)\cos(x_j,\gamma)$ — производную второго порядка от u по направлению γ. Направления γ будут браться различными, но общими для всех точек Q_T, т.е. $\cos(\gamma, x_i)$ не будут зависеть от x и t.

Приведем следующие известные факты.

Лемма 4.1. *Пусть* $u \in C^2(Q_T)$. *Если при любом направлении* γ *верны неравенства*

$$0 \leqslant u_{\gamma\gamma} \leqslant \mu, \tag{4.1}$$

то для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, *верна оценка*

$$|u_{x_iy_j}| \leqslant \mu. \tag{4.2}$$

Если к тому же

$$0 < \nu \leqslant \det u_{xx}, \tag{4.3}$$

то при любом γ

$$u_{\gamma\gamma} \geqslant \nu\mu^{1-n}. \tag{4.4}$$

Неравенства (4.2) следуют из соотношений

$$0 \leqslant \frac{1}{2}(\partial_{x_i} \pm \partial_{x_j})^2 u = \frac{1}{2}(u_{x_ix_i} + u_{x_jx_j}) \pm u_{x_ix_j} \leqslant \mu.$$

Для доказательства (4.3) повернем оси x_i так, чтобы в рассматриваемой точке $u_{x_ix_j} = \lambda_i\delta_i^j$. По условию (4.3) $\det u_{xx} = \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant \nu$, а в силу (4.1) $\lambda_i \in [0, \mu]$. Поэтому при любом i $\lambda_i \geqslant \nu\mu^{1-n}$, а это дает (4.4).

Дифференцирование (1) по направлению γ дает уравнение для u_j:

$$L_u u_\gamma = g_\gamma. \tag{4.5}$$

Повторное дифференцирование (4.5) по направлению γ дает уравнение

$$L_u u_{\gamma\gamma} = -\frac{\partial^2 F(u_{xx})}{\partial u_{ij}\partial u_{ke}} u_{\gamma ij} u_{\gamma kl} + g_{\gamma\gamma}. \tag{4.6}$$

Благодаря вогнутости $F(u_{xx})$ из (4.6) следует неравенство

$$L_u u_{\gamma\gamma} \geqslant g_{\gamma\gamma}. \tag{4.7}$$

Справедливо следующее предложение:

Предложение 4.1. *Для любого направления γ верна оценка*

$$u_{\gamma\gamma}(x,t) \leqslant \max_{\partial' Q_T} u_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2}\mu_2 d^2, \quad (x,t) \in \bar{Q}_T, \tag{4.8}$$

где $\mu_2 = \max_{Q_T}(-g_{\gamma\gamma})$, а d — то же, что и выше.

Действительно, для x^0 и d, указанных в теореме 1 Введения, имеем

$$L_u\Big(u_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2}\mu_2(x - x^0)^2\Big) \geqslant g_{\gamma\gamma} + \mu_2 \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Отсюда в силу леммы 2.1 заключаем о справедливости (4.8).

Таким образом, проблема мажорирования $|u_{x_i x_j}|$ в Q_T сведена к мажорированию $u_{\gamma\gamma}$ на $\partial'' Q_T = \partial\Omega \times [0,T]$.

Мажоранта для $\max_{\partial'' Q_T} |u_{\alpha\beta}|$, где $u_{\alpha\beta}$ суть производная второго порядка по направлениям касательным к $\partial\Omega$, нам уже известны, ибо $u_{\alpha\beta}$ выражаются через производные от u первого порядка и производные от граничной функции φ второго порядка.

Займемся оценкой модуля смешанных производных второго порядка $u_{\alpha n}$, содержащих одно дифференцирование по касательному направлению и одно по нормали. Для этого возьмем произвольную точку $x^0 \in \partial\Omega$ и будем считать, что начало координат в $\mathbb{R}^n$ помещено в эту точку (так что $x^0 = 0$), а ось x_n направлена по внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x^0 = 0$.

Пусть в окрестности этой точки уравнение границы $\partial\Omega$ задается уравнением

$$x_n = \omega(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}), \ |x'| \leqslant \delta. \tag{4.10}$$

В силу строгой выпуклости Ω функция ω при малых δ удовлетворяет неравенствам

$$\varkappa_1 |x'|^2 \leqslant \omega(x') \leqslant \varkappa_2 |x'|^2, \ \varkappa_i > 0, \ |x'| \leqslant \delta, \quad i = 1, 2. \tag{4.11}$$

Дальнейшие рассмотрения проведем в цилиндре $Q_{h,T} \equiv \Omega_h x(0,t)$ с $\Omega_h = \{x \parallel x = (x', x_n) \in \Omega, \ x_n \in (0,h)\}$ и $h = \varkappa_1\delta^2 \leqslant 1$. Для таких h проекция Ω_h в $\mathbb{R}^n$ на гиперплоскость $x_n = 0$ лежит в шаре $B_\delta^{n-1}(0)$. Рассмотрим в $Q_{h,T}$ функции

$$v^k = (u - \varphi)_{x_k} + (u - \varphi)_{x_n}\omega_{x_k}, \quad k \in \{1, \dots, (n-1)\},$$

считая $\omega(x')$ продолженной на Ω_h так, что значение продолжения в точке $x = (x', x_n)$ равно значению $\omega(x')$. Сохраним за таким продолжением обозначение ω и заметим, что $\omega_{x_n} \equiv 0$.

Для всех таких v^k мы имеем

$$v^k|_{\Gamma'_{h,T}} = 0, \quad \text{где } \Gamma'_{h,T} = S'_h x(0,T), \text{ а } S'_h = \partial\Omega_h \cap \partial\Omega, \tag{4.12.1}$$

$$|v^k|_{\Gamma''_{h,T}} \leqslant m_1, \quad \text{где } \Gamma''_{h,T} = S''_h x(0,T), \text{ а } S''_h = \partial\Omega_h \setminus S'_h \tag{4.12.2}$$

и

$$v^k(x,0) = 0 \quad \text{для } x \in \Omega_h. \tag{4.12.3}$$

Подсчитаем $L_u v^k$, используя сокращенные обозначения $u_i = u_{x_i}$, $u_{ij} = u_{x_i x_j}$ не только для u, но и для φ, ω, g:

$$\begin{aligned} L_u v^k &= L_u u_k - \omega_k L_u u_n + 2F_{ij}(u_{xx})u_{ni}\omega_{kj} + u_n F_{ij}(u_{xx})\omega_{kij} - L_u(\varphi_k + \varphi_n\omega_k) \\ &= g_k - g_n\omega_k + u_n F_{ij}\omega_{kij} - L_u(\varphi_k + \varphi_n\omega_k). \end{aligned} \tag{4.13}$$

При этом мы использовали (1.2), что дало следующее:

$$F_{ij}(u_{xx})u_{ni}\omega_{kj} = \frac{1}{n}F(u_{xx})\delta_j^n\omega_{kj} = \frac{1}{n}F(u_{xx})\omega_{kn} = 0.$$

Из (4.13), ограниченности производных φ и ω, входящих в (4.13), и известной нам оценки $\max_{Q_T}|u_x| \leqslant M_1$, сделаем такой вывод:

$$|L_u v^k| \leqslant c_1\Big(\sum_{i,j=1}^{n}|F_{ij}(u_{xx})|+1\Big), \quad k\in\{1,\dots,n-1\}. \tag{4.14}$$

В силу положительной определенности матрицы $(F_{ij}(u_{xx}))$ при любых $i,j \in \{1,\dots,n\}$ справедливы неравенства

$$F_{ij}^2(u_{xx}) \leqslant F_{ii}(u_{xx})F_{jj}(u_{xx}) \leqslant A^2, \qquad A \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{ii}(u_{xx}). \tag{4.15}$$

Благодаря им и $A \geqslant 1$ (лемма 1.2) из (4.14) следует оценка

$$|L_u v^k| \leqslant c_2 A, \quad k\in\{1,\dots,n-1\}. \tag{4.16}$$

Построим для v^k_{xx} в $Q_{h,T}$ миноранту $w(x,t)$, равную нулю при $x=0$. Она имеет вид: $w(x,t)=\frac12 ax^2-bx_n$ с $a\gg 1$ и $b\gg a$. Действительно,

$$L_u(w)=a\sum_{i=1}^{n}F_{ii}(u_{xx})=aA.$$

Поэтому при $a=c_2$ из (4.16) имеем в $Q_{h,T}$

$$L_u(w)\leqslant L_u(\pm v^k), \quad k\in\{1,\dots,n-1\}. \tag{4.17}$$

Чтобы удовлетворить требованию

$$0\geqslant w(x,t)-v^k_{(x,t)}|_{\Gamma'_{h,T}}=\frac12 a[(x')^2+\omega^2(x')]-b\omega(x'), \tag{4.18.1}$$

достаточно подчинить параметр b неравенству

$$b\geqslant \frac12 a(1+\varkappa_2)\varkappa_1^{-1}. \tag{4.19.1}$$

Это легко проверить, используя (4.11). Чтобы удовлетворить требованию

$$w-v^k|_{\Gamma''_{h,T}}\leqslant 0, \tag{4.18.2}$$

выберем b так, чтобы $w+m_1\leqslant 0$ на $\Gamma''_{h,T}$, где m_1 взято из (4.12.2). Так как в силу выбора δ и h

$$\begin{aligned} w+m_1|_{\Gamma''_{h,T}} &= \frac12 a[(x')^2+h^2]-bh+m_1|_{\Gamma''_{h,T}} \\ &\leqslant \frac12 a(\delta^2+h^2)-bh+m_1=\frac12 a(\varkappa_1^{-1}h+h^2)-bh+m_1 \\ &\leqslant \frac12 ah(\varkappa_1^{-1}+1)-bh+m_1, \end{aligned}$$

то мы удовлетворим (4.18.2), взяв

$$b\geqslant m_1h^{-1}+\frac12 a(\varkappa_1^{-1}+1). \tag{4.19.2}$$

Наконец, как легко подсчитать, мы удовлетворим требованию

$$w(x)-v^k(x,0)=m(x)\leqslant 0 \quad \text{при } x\in\Omega_h, \tag{4.18.3}$$

подчинив b неравенству

$$b\geqslant a\max\{1,\varkappa_1^{-1}\}. \tag{4.19.3}$$

Таким образом, если $a = c_2$ из (4.16) и b удовлетворяет требованиям (4.19.k), $k = 1, 2, 3$, то $w - v^k \leqslant 0$ на $\partial' Q_{h,T}$, а в $Q_{h,T}$ выполняется неравенство $L_u(w) \geqslant L_u(v^k)$ (см. (4.17)). Поэтому лемма 2.1 дает оценку

$$w(x) - v^k(x,t) \leqslant 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}_{h,t}. \tag{4.20}$$

Так как в точке $x = 0$ $w(0) = v^k(0,t) = 0$ при $\forall t \in [0,T]$, то $\frac{\partial w(x)}{\partial x_n} - \frac{\partial v^k(x,t)}{\partial x_n}\big|_{x=0} \leqslant 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_n}\bigg|_{x=0} - b \leqslant \frac{\partial v^k_{x,t}}{\partial x_n}\bigg|_{x=0} = (u - \varphi)_{x_k x_n}(0,t),$$

т.е.

$$u_{x_k x_n}(0,t) \geqslant \varphi_{x_k x_n}(0,t) - b, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \ t \in [0,T]. \tag{4.21.1}$$

Это верно в любой точке $x = 0 \in \partial\Omega$. Для оценки $u_{x_k x_n}(0,t)$ сверху используем ту же функцию $w(x,t) = \frac{1}{2}ax^2 - bx_n$. На границе $\partial' Q_{hT}$ цилиндра Q_{hT} она удовлетворяет не только неравенствам (4.18.k), $k = 1, 2, 3$, но и неравенству

$$w + v^k \leqslant 0 \quad \text{на } \partial' Q_{hT}. \tag{4.22}$$

Это легко проверить, заметив, что при выборе параметров a и b мы использовали относительно v^k лишь информацию (4.17) и (4.12.k), $k = 1, 2, 3$. Поэтому (см. лемму 2.1)

$$w(x) + v^k(x,t) \leqslant 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}_{hT}.$$

Отсюда, как и выше, сделаем заключение

$$u_{x_k x_n}(0,t) \leqslant \varphi_{x_k x_n}(0,t) + b, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \ t \in [0,T]. \tag{4.21.2}$$

Подытожим доказанное.

Предложение 4.2. *Если выполнено условие* (3) *или* (4), *то для решения* u *класса* K^4 *задачи* (1), (2) *справедливы оценки*

$$\max_{\partial'' Q_T} |u_{\alpha\beta}|; \ \max_{\partial'' Q_T} |u_{\alpha n}| \leqslant \mu_3, \tag{4.22}$$

мажоранта в которых определяется данными задачи, а также числами ν_1 *из* (3) *или* $\tilde{\nu}_1$ *из* (4).

Недостающую оценку $\max_{\partial'' Q_T} |u_{nn}|$ мы получим из леммы 6 работы [17]. А именно, согласно этой лемме для выпуклых решений $u(x,t)$ уравнений Монжа-Ампера (3.11) $\max_{x \in \partial\Omega} |u_{nn}(x,t)|$ мажорируется числом, зависящим лишь от чисел ν_1 и μ_1 из (3.10), числом μ_3 из (4.22), чисел M_0 и M_1 из (3.12), а также $\|\varphi(\cdot,t)\|_{C^4(\Omega}$ и нормой $\partial\Omega$ в C^4. Благодаря этому и доказанным выше фактам справедлива

Теорема 4.1. *Если выполнено условие* (3) *или* (4), *то для решения* u *класса* K^4 *задачи* (1), (2) *справедливы оценки*

$$\max_{Q_T} |u_{x_i x_j}| \leqslant M_2, \quad i,j \in \{1, \dots, n\}, \tag{4.23}$$

и

$$\min_{Q_T} u_{x_i x_i} \geqslant \nu_2 > 0, \tag{4.24}$$

в которых M_2 *и* ν_2 *определяются константой* ν_1 *из* (3) *или* $\tilde{\nu}_1$ *из* (4), *а также нормами* $\|\partial\Omega\|_{C^4}$ *и* $\|\varphi\|_{C^{4,2}(Q_T)}$.

Отметим, что для получения оценки $\max_{x \in \partial\Omega} \|u_{nn}(x,t)$ можно воспользоваться также результатами работы [15].

Дальнейшие параграфы посвящены оценкам констант Гёльдера для u_t и $u_{x_i x_j}$.

§5. Оценка констант Гёльдера для u_t в $\bar{Q}_T$ и $u_{x_ix_j}$ на $\partial'' Q_T$

Здесь и далее будем считать выполненным условие (3) или (4) и u — решением задачи (1), (2) из класса $K^{4+\alpha}$. Из результатов предыдущих параграфов следует, что квадратичная форма

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \equiv F_{ij}(u_{xx}(x,t))\xi_i\xi_j$$

удовлетворяет при любых $(x,t) \in \bar{Q}_T$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ неравенствам

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad 0 < \nu \leqslant \mu, \tag{5.1}$$

с постоянными ν и μ, которые можно вычислить по данным задачи. Благодаря этому оператор

$$L_u \equiv -\partial_t + F_{ij}(u_{xx}(x,t))\partial^2_{x_ix_j} \equiv -\partial_t + a_{ij}(x,t)\partial^2_{x_ix_j}$$

является равномерно параболическим, и для него можно использовать результаты, полученные в работах [18, 23, 4]. Нам нужны оценки констант Гёльдера для u_t и $u_{x_ix_j}$ в $\bar{Q}_T$.

Следуя [1], будем обозначать константу Гёльдера с показателем $\alpha \in [0,1)$ для v в $\bar{Q}_T$ символом $\langle v\rangle^{(\alpha)}_{Q_T}$, а соответствующую ей норму Гёльдера для v в $\bar{Q}_T$ символом $|v|^{(\alpha)}_{Q_T}$, так что

$$|v|^{(\alpha)}_{Q_T} = \max_{Q_T}|v| + \langle v\rangle^{(\alpha)}_{Q_T}.$$

Оценка для $\max_{Q_T}|u_t|$ получена в §3 на базе того, что u_t есть решение линейной параболической задачи

$$L_u u_t = g_t, \quad u_t|_{\partial' Q_T} = \varphi_t|_{\partial' Q_T} \tag{5.2}$$

с известной нам функцией φ_t. Теперь мы имеем о L_u дополнительную информацию — неравенства (5.1). Она позволяет воспользоваться теоремой 1.2 из работы [12] (или, что то же, из работы [20] или [21]) и сделать следующее заключение:

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для решения u задачи* (1), (2) *из класса K^4 справедлива оценка*

$$|u_t|^{(\alpha)}_{Q_T} \leqslant M_3 \tag{5.3}$$

с некоторым $\alpha \in (0,1)$, определяемым, как и M_3, известным в задаче (1), (2) *величинами.*

Оценка $|u_t|^{(\alpha)}_{Q'_T} \leqslant c$ для $Q'_T \ll Q_T$ следует также из результатов работы [18], предшествовавшей работе [19].

Для мажорирования величин $\langle u_{x_ix_j}\rangle^{(\alpha)}_{Q_T}$ нам потребуются оценки констант Гёльдера для $u_{x_ix_j}$ на $\partial'' Q_T$. Их мы можем получить с помощью теоремы 5.1 из работы [22] (или соответствующей теоремы из [23]). Для удобства читателя приведем частный случай этой теоремы, который нам достаточен для целей данной работы.

Лемма 5.1. *Пусть для v, принадлежащей $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, выполняется неравенство*

$$|a_{ij}(x,t)v_{x_ix_j}(x,t) - v_t(x,t)| \leqslant c_1 \tag{5.4}$$

с a_{ij}, удовлетворяющими (5.1), *и пусть* $v|_{\partial' Q_T} = 0$. *Тогда при некотором* $\alpha \in (0,1)$ *справедливы оценки*

$$|v_{x_i}|^{(\alpha)}_{\partial'' Q_T} \leqslant c_2, \quad i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{5.5}$$

Величины α *и* c_2 *определяются числами* ν *и* μ *из* (5.1) *и* c_1 *из* (5.4).

Применим эту лемму к функции v, равной любой из функций $v^k(x,t)\xi(x,t)$, $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, где

$$v^k(x,t) = [u(x,t) - \varphi(x,t)]_{x_k} + [u(x,t) - \varphi(x,t)]_{x_n}\omega_{x_k}(x),$$

а ξ равны нулю вне малого цилиндра $\Omega^\delta \times [0,T]$, примыкающего к $\partial'' Q_T$. Точнее, здесь, как и в §4, где введены функции v^k, выбираем произвольную точку $x^0 \in \partial\Omega$, помещаем в нее начало координат x, ось x_n направляем по внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке x^0 и все рассмотрения проводим для $x \in \Omega^\delta \equiv \{x | x \in \Omega, |x| < \delta\}$, где δ столь мало, что величины $\max_{|x'| \leqslant \delta} |\omega_{x_k}(x')|$, $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, не превосходят какого-либо числа c_3. Будем считать так же, что $\omega(x) = \omega(x')$, $x = (x', x_n)$, для $|x| \leqslant \delta$ и $x_n \geqslant 0$. Функцию $\xi(x,t)$ возьмем неотрицательной, достаточно гладкой и равной нулю при $|x| \geqslant \delta$. Каждое из $v = v^k\xi$ ($k \in \{1,\ldots,n-1\}$) определено в цилиндре $Q^\delta_T = \Omega^\delta x(0,T)$ и равно нулю на $\partial' Q^\delta_T$. Кроме того, для них верно неравенство

$$\max_{Q_T} |L_u(v^k\xi)| \leqslant c_4, \quad k \in \{1,\ldots,n-1\}, \tag{5.6}$$

в котором c_4 легко подсчитывается. Поэтому для $v = v^k\xi$ справедлива лемма 5.1. Она гарантирует оценки норм Гёльдера на границе $\partial'' Q_T$ для всех производных $u_{x_i x_j}$ решения u, кроме u_{nn} — производной второго порядка по нормали к $\partial\Omega$. Оценка же для $|u_{nn}|^{(\alpha)}_{\partial'' Q_T}$ получается непосредственно из уравнения (1).

Итак, мы убедились в справедливости следующего:

Теорема 5.2. *При выполнении условий теоремы* 1 *для решения* u *задачи* (1), (2) *из класса* K^4 *справедливы оценки*

$$|u_{x_i x_j}|^{(\alpha)}_{\partial'' Q_T} \leqslant M_4, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{5.7}$$

в которых M_4 *и* $\alpha \in (0,1)$ *определяются по известным в задаче* (1), (2) *величинам.*

§6. Мажорирование константы Гёльдера для $u_{x_i x_j}$ в $\bar{Q}_T$

В данном параграфе мы найдем мажоранты для величин $\langle u_{x_i x_j}\rangle^{(\alpha)}_{Q_T}$, следуя идее Л. Эванса и Н. В. Крылова рассматривать некоторый специальный набор функций u^k, для которого удается извлечь из исходной задачи информацию, достаточную для оценки констант Гёльдера $\langle u^k\rangle^{(\alpha)}_{Q_T}$, причем из этой последней следуют оценки для $\langle u_{x_i x_j Q_T}\rangle^{(\alpha)}$ [24, 25, 4]. Как и у них, в качестве таких функций мы берем функции $u^k \equiv u_{\gamma_k\gamma_k}$, $k = 1,\ldots N$, с направлениями γ_k, которые выбираются в соответствии с теоремой Вазова-Моцкина [26] (ее мы формулируем ниже как лемму 6.1). Для каждой u^k мы имеем неравенство (4.7), из которого используем лишь следующую информацию:

$$\|(-L_u u^k)_+\|_{n+1,Q_T} \leqslant c_1, \quad k \in \{1,\ldots,N\}, \tag{6.1}$$

При этом существенно то, что оператор $L_u = -\partial_t + a_{ij}\partial^2_{x_i x_j}$, $a_{ij}(x,t) \equiv F_{ij}(u_{xx}(x,t))$ строго параболичен, и мы знаем константы ν и μ, входящие в неравенства (5.1).

В (6.1) $u(x,t)$ есть исследуемое решение задачи (1), (2), а символ $()_+$ означает, как обычно, следующее: $a_+ = \max\{0; a\}$. Символ $\|v\|_{q,Q_T}$ означает норму Лебега в пространстве $L_q(Q_T)$.

Лемма 6.1. *Для всего множества $S^n_+(\nu,\mu)$ симметрических положительно определенных матриц $A = (a_{ij})$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, с собственными значениями, расположенными на отрезке $[\nu,\mu] \in (0,\infty)$, существует N единичных векторов $\gamma_1,\dots,\gamma_N$ в $\mathbb{R}^n$ таких, что*

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \gamma_{ki}\gamma_{kj}, \quad i,j \in \{1,\dots,n\}, \tag{6.2}$$

причем $\beta_k \in [\nu^*,\mu^*]$, где ν^* и μ^* — положительные числа, определяемые n, ν и μ, а $\gamma_{ki}(i \in \{1,\dots,n\})$ — компоненты вектора γ_k. Кроме того, набор векторов $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ можно выбрать так, чтобы он включал в себя координатные векторы $e_1,\dots,e_n$ и векторы $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i \pm e_j)$.

Матрицы $(a_{ij}(x,t))$ из L_u удовлетворяют условиям этой леммы, и мы возьмем набор векторов $\gamma_1,\dots,\gamma_N$ так, как указано в конце леммы. Функции u^k, построенные по этим γ_k, т.е. $u^k = u_{\gamma_k\gamma_k}$, и будут предметом последующих рассмотрений.

Коэффициенты β_k в (6.2) для (a_{ij}) из L_u зависят от (x,t), но нам существенно лишь то, что они удовлетворяют неравенствам:

$$0 < \nu^* \leqslant \beta_k(x,t) \leqslant \mu^* < \infty.$$

Благодаря этому разность $j \equiv F(u_{xx}(z_2)) - F(u_{xx}(z_1)$ для любой пары точек $z_1 = (x',t')$ и $z_2 = (x'',t'')$ из Q_T можно представить, используя обозначение $u^\tau_{xx} \equiv \tau u_{xx}(z_2) + (1-\tau)u_{xx}(z_1)$, в виде

$$\begin{aligned} j &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau}F(u^\tau_{xx})\,d\tau = \int_0^1 F_{ij}(u^\tau_{xx})\,d\tau[u_{ij}(z_2) - u_{ij}(z_1)] \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \beta^\tau_k\,d\tau[u^k(z_2) - u^k(z_1)] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \beta^*_k[u^k(z_2) - u^k(z_1)], \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $\beta^*_k \equiv \int_0^1 \beta^\tau_k d\tau \in [\nu^*,\mu^*]$. В силу (1) и (5.3)

$$|j| = |u_t(z_2) - u_t(z_1) + g(z_2) - g(z_1)| \leqslant c_2[d(z_1,z_2)]^\alpha, \tag{6.4}$$

где $d(z_1,z_2) \equiv (|x'-x''|+|t'-t''|)^{1/2}$, а c_2 определяется известными нам величинами. Из (6.3) и (6.4) следует неравенство

$$\nu^* \sum_{k=1}^{n}[u^k(z_2) - u^k(z_1)]_+ - \mu^* \sum_{k=1}^{N}[u^k(z_2) - u^k(z_1)]_- \leqslant c_2[d(z_1,z_2)]^\alpha,$$

которое запишем в виде

$$\delta \sum_{i=1}^{N}[u^k(z_2) - u^k(z_1)]_+ - \sum_{i=1}^{N}[u^k(z_2) - u^k(z_1)]_- \leqslant c_3\rho^\alpha, \quad \delta > 0, \tag{6.5}$$

считая, что $d(z_1, z_2)$ имеет порядок ρ. Отметим, что значения показателя α, вообще говоря, разные в разных наших утверждениях. На каждом следующем этапе рассмотрений его значение может понизиться, но нам существенно лишь то, что оно остается положительным и число возможных его понижений конечно. Кроме того, мы всюду считаем $\rho \leqslant \rho_0 \leqslant 1$, и потому $\rho^{\alpha_1} < \rho^{\alpha_2}$ для $\alpha_1 > \alpha_2$.

Неравенства (6.1) и (6.5) вместе с полученными ранее оценками для $|u^k|^{(\alpha)}_{\partial'' Q_T}$ служат той информацией о u^k, на основе которой будут найдены мажоранты для $\langle u^k\rangle^{(\alpha)}_{Q_T}$. При этом мы будем придерживаться плана Н. В. Крылова (см. [4, гл. V]), но реализовать его несколько иначе, используя одну теорему из работы [19]. Это позволяет облегчить все рассуждение и сделать его единообразным для внутренних и приграничных цилиндров. Для удобства читателя сформулируем те два известные предложения, которые нам будут нужны.

Лемма 6.2. *Пусть фиксированы числа* N_1, $N_2 \geqslant 0$, α, δ_1 *и* l *из* $(0,1)$ *и* $\rho_0 \in (0,1]$, *и пусть на* $[0, 2\rho_0]$ *определены неубывающие функции* $w_i(\rho)$, $i = 1, \dots, m$, *со значениями из* $[0, l]$. *Пусть, далее, для любого* $\rho \in [0, \rho_0]$ *верно или неравенство*

$$w_k(\rho) \leqslant \delta_1 w_k(2\rho) + N_2\rho^\alpha\rho_0^{-\alpha}, \tag{6.6}$$

или неравенство

$$\sum_{i\in B(\rho)} w_i(\rho) \leqslant N_1 \sum_{i\in A(\rho)} w_i(2\rho) + N_2\rho^\alpha\rho_0^{-\alpha}, \tag{6.7}$$

где $A(\rho)$ *есть совокупность индексов* k *из* $\{1, \dots, m\}$, *для которых верно* (6.6), *а* $B(\rho) = \{1, \dots, m\} \setminus A(\rho)$. *Тогда при* $\forall \rho \in [0, 2\rho_0]$

$$\sum_{i=1}^m w_i(\rho) \leqslant N_3\rho^\alpha\rho_0^{-\alpha}\left(\sum_{i=1}^m w_i(2\rho_0) + N_2\right), \tag{6.8}$$

где N_3 *определяется входящими в условие леммы параметрами.*

Эта лемма является частным случаем леммы из [4, с. 123, гл. IV, §3]. Множество $A(\rho)$ или $B(\rho)$ может быть и пустым.

Теорема 6.1. *Пусть* $v \in W^{2,1}_{n+1}(Q_T)$ *и* $v \geqslant 0$ *в* Q_T. *Для любого* $\varkappa \in (0,1]$ *существуют постоянные* $\beta > 0$ *и* $c > 0$ *такие, что справедливы следующие утверждения:*

(1) *если цилиндр* $Q_{2\rho} \equiv Q_{2\rho}(x^0, t^0)$ *принадлежит* Q_T *и для любого* $k > 0$

$$\operatorname{mes}\{\hat A_k \cap \hat Q_\rho(x^0, t^0)\} \geqslant \varkappa \operatorname{mes} \hat Q_\rho(x^0, t^0), \tag{6.9}$$

то

$$\inf v \geqslant \beta k - c\rho^{\frac{n}{n+1}} \|(Lv)_+\|_{n+1, Q_{2\rho}}. \tag{6.10}$$

Здесь и далее $Q_\rho = Q_\rho(x^0, t^0) = \{(x,t) \,\|\, |x - x^0| < \rho,\ t \in (t^0 - \rho^2, t^0)\}$, $Q_{2\rho} = Q_{2\rho}(x^0, t^0) = \{(x,t) \,\|\, |x - x^0| < 2\rho,\ t \in (t^0 - 4\rho^2, t^0)\}$, $\hat Q_\rho(x^0, t^0) = \{(x,t) \,\|\, |x - x^0| < \rho,\ t \in (t_0 - 4\rho^2, t^0 - 3\rho^2)\}$, $\hat A_k = \{(x,t) \in Q_T \,\|\, v(x,t) \geqslant k\}$, *а* $L = -\partial_t + a_{ij}\partial^2_{x_ix_j}$ — *параболический оператор с* a_{ij}, *удовлетворяющими неравенствам* (5.1).

2) *Если* $t^0 \in (0, \rho^2)$ *и* $\partial'' Q_T \cap Q_{2\rho}(x^0, t^0) = \varnothing$, *то для любого* k, *удовлетворяющего неравенству*

$$k \leqslant \inf_{|x - x^0| < 2\rho} v(x, 0), \tag{6.11}$$

справедливо неравенство

$$\inf_{Q_\rho \cap Q} v \geqslant \beta k - c\rho^{\frac{n}{n+1}} \|(Lv)_+\|_{n+1, q_{2\rho}\cap Q_T}. \tag{6.12}$$

3) *Если* $(x^0, t^0) \in \partial'' Q = \partial\Omega \times [0, T]$ *и*

$$k \leqslant \inf_{\partial' Q \cap Q_{2\rho}} v, \tag{6.13}$$

то верно (6.12).

Постоянные β и c в (6.10) и (6.12) в случаях 1) и 2) определяются числами n, ν, и μ из (5.1). Ими же определяются β и c и в случае 3), если $\partial\Omega$ — гладкая.

Теорема 6.1 является частным случаем теоремы 1.1 препринта из [19] (он опубликован в широкой печати в статьях [20] и [21]), только в [19] в условии (6.9) $\varkappa$ взято равным $1/2$. Но легко видеть, что данное в [16] доказательство остается в силу для любого другого значения $\varkappa$ из $(0, 1]$.

Теперь мы покажем, как используются лемма 6.2 и теорема 6.1 для оценки осцилляций функций u^i, $i \in \{1, \dots, N\}$, по маленьким цилиндрам $Q_{2\rho}$. Делается это по-разному в зависимости от расположения $Q_{2\rho}$ по отношению к Q_T. А именно различаются три возможности, перечисленные в теореме 6.1.

Введем для каждого $Q_{s\rho}$, $s = 1, 2$, следующие числа

$$\begin{gathered} m_i(s\rho) = \min u^i, \qquad M_i(s\rho) = \max_{Q_{s\rho}\cap Q_T} u^i, \\ \omega_i(s\rho) = M_i(s\rho) - m_i(s\rho) \quad \text{и} \quad \xi_i = (1-\xi) M_i(2\rho) + \xi m_i(2\rho), \end{gathered} \tag{6.14}$$

где ξ — достаточно малое число; возьмем ξ равным $\frac{1}{2}\delta(N+\delta)^{-1}$, где δ — число из (6.5).

Рассмотрим первый случай:

1) $Q_{2\rho} \subset Q_T$. Для такого $Q_{2\rho}$ множество индексов $\{1, \dots, N\}$ разобъем на две части $A(\rho)$ и $B(\rho) \equiv \{1, \dots N\} \setminus A(\rho)$ следующим образом: к $A(\rho)$ отнесем те индексы i, для которых множества

$$\Gamma_i(\rho) = \{ z \in \hat{Q}_\rho \parallel u^i(z) < (1-\xi) M_i(2\rho) + \xi m_i(2\rho) = \xi_i \} \tag{6.15}$$

имеют меру, не меньшую, чем $1/N$, т.е.

$$A(\rho) = \Big\{ i \parallel |\Gamma_i(\rho)| \geqslant \frac{1}{N} |\hat{Q}_\rho| \Big\}.$$

Здесь и далее $|\Gamma|$ означает меру множества Γ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Следовательно, для $i \in B(\rho)$ верны неравенства

$$B(\rho) = \Big\{ i \parallel |\Gamma_i(\rho)| < \frac{1}{N} |\hat{Q}_\rho| \Big\}. \tag{6.17}$$

Благодаря (6.17) ясно, что в $\hat{Q}_\rho$ существует точка $z(\rho)$, которая не принадлежит $\Gamma_i(\rho)$ с $\forall i \in B(\rho)$. В ней

$$u^i(z(\rho)) \geqslant \xi_i \quad \text{для } \forall i \in B(\rho). \tag{6.18}$$

Пусть $z^j(\rho)$ есть точка $\overline{Q_{w\rho}}$, в которой u^j достигает своего минимума, т.е.

$$u^j(z^j(\rho)) = m_j(2\rho). \tag{6.19}$$

Благодаря (6.18) и (6.19) для $\forall i \in B(\rho)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} [u^i(z(\rho)) - u^i(z^j(\rho))]_+ &\geqslant [u^j(z(\rho)) - u^j(z^j(\rho))]_+ \\ &\geqslant [\xi_j - m_j(2\rho)] = (1-\xi)\omega_j(2\rho). \end{aligned}$$

Отсюда и из (6.5) с $z_2 = z(\rho)$ и $z_1 = z^j(\rho)$ следует

$$\begin{aligned}\delta(1-\xi)\omega_j(2\rho) &\leqslant \sum_{i=1}^{N}[u^i(z(\rho)) - u^i(z^j(\rho))]_- + c_3\rho^\alpha \\ &\leqslant \sum_{i\in B(\rho)}[-\xi_i + M_i(2\rho)] + \sum_{i\in A(\rho)}\omega_i(2\rho) + c_3\rho^\alpha \\ &= \xi\sum_{i\in B(\rho)}\omega_i(2\rho) + \sum_{i\in A(\rho)}\omega_i(2\rho) + c_3\rho^\alpha, \forall j\in B(\rho).\end{aligned} \tag{6.20}$$

Суммируя эти неравенства по $j \in B(\rho)$ и приводя подобные члены, получим

$$[\delta(1-\xi) - N\xi]\sum_{j\in B(\rho)}\omega_i(2\rho) = \frac{\delta}{2}\sum_{j\in B(\rho)}\omega_i(2\rho) \leqslant N\sum_{i\in A(\rho)}\omega_i(2\rho) + c_4\rho^\alpha. \tag{6.21}$$

С другой стороны, для каждой из функций

$$v^i \equiv M_i(2\rho) - u^i \tag{6.22}$$

с $i \in A(\rho)$ мы имеем

$$\|(L_u v^i)_+\|_{n+1,Q_{2\rho}} \leqslant c_1$$

(см. (6.1)) и при $z \in \Gamma_i(\rho)$ соотношения

$$v^i(z) \equiv M_i(2\rho) - u^i(z) \geqslant M_i(2\rho) - \xi_i = \xi\omega_i(2\rho),$$

причем $|\Gamma_i(\rho)| \geqslant \frac{1}{N}|\tilde{Q}_\rho|$. Благодаря им мы можем воспользоваться п. 1) теоремы 6.1, взяв $\varkappa = 1/N$ и $k = \xi\omega_i(2\rho)$. Неравенство (6.10) будет иметь вид

$$\inf_{Q_\rho} v^i \geqslant \beta\xi\omega_i(2\rho) - cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}}.$$

Из него следует, что в Q_ρ $u^i \leqslant M_i(2\rho) - \beta\xi\omega_i(2\rho) + cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}}$. Поэтому $\omega_i(\rho) = M_i(\rho) - m_i(\rho) \leqslant M_i(2\rho) - \beta\xi\omega_i(2\rho) + cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}} - m_i(\rho) = \omega_i(2\rho)(1-\beta\xi) + cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}} + m_i(2\rho) - m_i(\rho)$ и, следовательно,

$$\omega_i(\rho) \leqslant (1-\beta\xi)\omega_i(2\rho) + cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}} \quad \text{для } \forall i \in A(\rho). \tag{6.23}$$

Теперь, имея (6.21) и (6.23) для функций $w_i(\rho) = \omega_i(\rho)$, $i = 1, \ldots, N$, мы можем воспользоваться леммой 6.2 и заключить, что для $Q_\rho \subset Q_{2\rho_0} \subseteq Q_T$ справедливы оценки

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i(\rho) \equiv \sum_{i=1}^{N}\operatorname*{osc}_{Q_\rho} u^i \leqslant c_5\rho^\alpha\rho_0^{-\alpha}, \quad \rho \leqslant \rho_0, \tag{6.24}$$

с некоторым $\alpha \in (0, \frac{n}{n+1})$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда цилиндры $Q_{2\rho} = Q_{2\rho}(x^0, t^0)$ пересекают нижнее основание цилиндра Q_T, но не соприкасаются с $\partial' Q_T$ (точнее, см. п. 2) теоремы 6.1). Для них мы иначе разобьем множество $\{1, \ldots N\}$ на $A(\rho)$ и $B(\rho)$. К $A(\rho)$ отнесем те i, для которых

$$\max_{|x-x^0|<2\rho} u^i(x,0) \leqslant \xi_i \equiv (1-\xi)M_i(2\rho) + \xi m_i(2\rho), \qquad \xi = \frac{\delta_1}{2(\delta_1 2 + N)} \tag{6.25}$$

(см. (6.14)). Используем для функций $v^i(z) = M_i(2\rho) - u^i(z)$, $i \in A(\rho)$, п. 2) теоремы 6.1. Его условия выполнены для $k = \xi\omega_i(2\rho)$, ибо благодаря (6.25) $\inf_{|x-x^0|<2\rho} v^i(x,0) \geqslant \xi\omega_i(2\rho)$. Поэтому

$$\inf_{Q_\rho\cap Q} v^i \geqslant \beta\xi\omega_i(2\rho) - cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}}, \quad \forall i \in A(\rho). \tag{6.26}$$

Отсюда, как показано выше, следуют неравенства (6.23) для рассматриваемых $Q_\rho \cap Q_T$ и $Q_{2\rho} \cap Q_T$. С другой стороны, для $j \in B(\rho)$ имеем

$$\max_{|x-x^0|<2\rho} u^j(x,o) > \xi_j. \tag{6.27}$$

Так как $\operatorname{osc}_{|x-x^0|<2\rho} u^j(x,0) \leqslant c_6\rho$, то благодаря (6.26)

$$u^j(x^0,0) > \xi_j - c_6\rho \quad \text{для } j \in B(\rho),$$

и потому неравенство (6.5) и (6.20) с $z_2 = (x^0,0)$ и $z_1 = z^j(\rho)$ — точкой минимума u^j в $Q_{2\rho} \cap Q$ дает следующее:

$$\begin{aligned}
&\delta(1-\xi)\omega_j(2\rho)\\
&\quad= \delta[\zeta_j - m_j(2\rho)] < \delta[u^j(z_2) - u^j(z^j(\rho))]_+ + c_6\delta\rho\\
&\quad\leqslant \delta\sum_{i=1}^N [u^i(z_2) - u^i(z^j(\rho))]_+ c_6\delta\rho \leqslant \sum_{i=1}^N [u^i(z_2) - u^i(z^j_{(\rho)})]_- + c_3\rho^\alpha + c_6\delta\rho\\
&\quad\leqslant \sum_{i\in B(\rho)} [-\xi_i + M_i(2\rho)] + \sum_{i\in A(\rho)} \omega_i(2\rho) + c_3\rho^\alpha + c_6\delta\rho\\
&\quad\leqslant \xi \sum_{i\in B(\rho)} \omega_i(2\rho) + \sum_{i\in A(\rho)} \omega_i(2\rho) + c_7\rho^\alpha, \quad \rho \leqslant \rho_0.
\end{aligned}$$

Суммирование этих неравенств по $j \in B(\rho)$ после приведения подобных членов дает неравенство (6.21), только с другим коэффициентов при ρ^α. Таким образом, и в случае цилиндров $Q_{2\rho}$, пересекающих нижнее основание Q_T, мы получили аналоги неравенств (6.21) и (6.23), из которых, в свою очередь, следует оценка

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(\rho) \equiv \sum_{i=1}^N \operatorname*{osc}_{Q_\rho \cap Q_T} u^i \leqslant c_8\rho^\alpha\rho_0^{-\alpha}, \quad \rho \leqslant \rho_0. \tag{6.28}$$

Осталось рассмотреть случай цилиндров $Q_{2\rho} \equiv Q_{2\rho}(x^0,t^0)$ с $x^0 \in \partial\Omega$, фигурирующих в п. 3 теоремы 6.1. Для них мы разбиваем множество индексов $\{1,2,\dots,N\}$ на $A(\rho)$, содержащее те i, для которых

$$\max_{\mathcal{T}_{2\rho}} u^i \leqslant \xi_i, \tag{6.29.1}$$

и оставшееся множество $B(\rho)$ индексов i, где

$$\max_{\mathcal{T}_{2\rho}} u^i > \xi_i.$$

Здесь $\mathcal{T}_{2\rho}$ есть пересечение $Q_{2\rho}$ с $\partial' Q_T$. Благодаря результатам п. 5 мы знаем, что колебание функций u^i на $\mathcal{T}_{2\rho}$ имеет порядок ρ^α, и потому

$$u^i(x^0,t^0) > \xi_i - c_9\rho^\alpha, \quad i \in B(\rho). \tag{6.30}$$

Этот факт мы используем для получения аналога неравенства (6.21) из неравенства (6.5). Для этого (6.5) рассматривается в точке $z_2 = (x^0,t^0)$ и точке z_1, являющейся минимумом u^j в $Q_{2\rho} \cap Q_T$.

Для u^i с $i \in A(\rho)$ берутся, как и выше, функции $v^i = M_i(2\rho) - u^i$ (см.(6.22)) и для них используется результат п. 3 теоремы 6.1 с $k = \xi\omega_i(2\rho)$. Все дальнейшие рассуждения, приводящие к оценке (6.28), аналогичны изложенным выше для других расположений цилиндра $Q_{2\rho}$ в Q_T.

Таким образом, доказано следующее предложение.

Теорема 6.2. *Пусть имеется набор функций u^k, $k = 1, \dots, N$, принадлежащих $W^{2,1}_{n+1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, и пусть для u^k выполняются неравенства* (6.1) *и неравенство* (6.5) *при любых z_1 и z_2 из $\bar{Q}_T$ с какими-либо положительными числами c_1, c_3, δ и α. Пусть, наконец, известно, что на $\partial' Q_T$ $|u^k|^{(\alpha)}_{\partial' Q_T} \leqslant c$ $k \in \{2, \dots, N\}$. Тогда при любом k $u^k \in H^{\beta,\beta/2}(\bar{Q}_T)$, и $|u^k|^{(\beta)}_{Q_T} \leqslant C$, где β и C положительны и определяются указанными выше параметрами,* $\max_{Q_T} |u^k|$, *$k \in \{1, \dots, N\}$ и константами ν и μ из* (5.1).

Вспоминая начало параграфа, убеждаемся в возможности мажорирования $\langle u_{x_i x_j} \rangle^{(\alpha)}_{Q_T}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, с некоторым $\alpha > 0$, величинами, определяемыми лишь данными задачи (1), (2).

Подытожим сделанное в форме теоремы:

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для решения u класса K^4 задачи* (1), (2) *можно мажорировать норму в пространстве $H^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ с некоторым $\beta > 0$ величиной, определяемой лишь нормой g в пространстве $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, нормой φ в пространстве $C^{4,2}(\bar{Q}_T)$, нормой $\partial\Omega$ в C^4 и числами ν_k, входящими в условия* (3) *или* (4).

Как отмечено во Введении, из такой априорной оценки для решения u задачи (1), (2) разрешимость задачи выводится известными методами.

Список литературы

[1] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

[2] Miranda C., *Partial Differential equations of elliptic type, 2nd ed.*, Springer-Verlag, 1970.

[3] Friedman A., *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, INC, 1964.

[4] Крылов Н. В., *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка*, Наука, М., 1985.

[5] Krylov N. V., *Some new results in the theory of nonlinear elliptic and parabolic equations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, USA, 1986, pp. 1101–1109.

[6] Line Wang, *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations.* I, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 27–76.

[7] Line Wang, *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations.* II, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 141–178.

[8] Крылов Н. В., *Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения*, Изв. АН СССР, сер. мат. **46** (1982), № 3, 487–523.

[9] Wang Guanglie, *The first boundary value problem for parabolic Monge-Ampere equation*, North. Math. J. 3(4) (1987), 463–478.

[10] Tso K., *Deforming a hypersurface by its Gauss-Kroneker curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 6, 867–882.

[11] Chow B., *Deforming convex hypersurfaces by the n-th root of the Gauss curvature*, J. Diff. Geom. **22** (1985), no. 1, 117–138.

[12] Oliker V. I., Uraltseva N. N., *Evolution of nonparametric surfaces with speed depending on curvature. II. The mean curvature case*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 97–135.

[13] Gilbarg D., Trudinger N.S., *Elliptic partial differential equations of second order. 2nd ed.*, Springer-Verlag, 1983.

[14] Ивочкина Н. М., *Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа-Ампера*, Мат. сб. **128** (1985), 403–415.

[15] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampere equation*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 369–402.

[16] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., *The Dirichelet problem for nonlinear second-order elliptic equations*, Acta Math. **155** (1985), no. 3, 4, 261–304.

[17] Ивочкина Н. М., *Априорная оценка $\|u\|_{C^2(\Omega)}$ выпуклых решений задачи Дирихле для уравнений Монжа-Ампера*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **96** (1980), 69–79.

[18] Крылов Н. В., Сафонов М. В., *Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами*, Изв. АН СССР, сер. мат. **44** (1980), № 1, 161–175.

[19] Ladyzhenskaya O. A., Uralt'ceva N. N., *Estimates of Hölder constants for bounded solutions of second order quasilinear parabolic equations of nondivergent form*, Preprint LOMI, E-11-81, pp. 1–35.

[20] Ladyzhenskaya O. A., Uralt'ceva N. N., *Estimates of Hölder constants for bounded solutions of second order quasilinear parabolic equations of nondivergent form*, Sciences and Computers, Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol. 10, Acad. Press USA, 1986, pp. 1–22.

[21] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Оценка константы Гёльдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому или равномерно параболическому квазилинейному неравенству с неограниченными коэффициентами*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **147** (1985), 72–94.

[22] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Оценка на границе области норм Гёльдера производных решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида*, Препринт ЛОМИ, Р-1-85, с. 1–43.

[23] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Мажорирование на границе области норм Гёльдера производных для функций, удовлетворяющих квазилинейному эллиптическому или параболическому неравенству*, Тр. МИАН **179** (1986).

[24] Evans L. C., *Classical solutions of fully nonlinear convex, second order elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1982), 333–363.

[25] Крылов Н. В., *Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области*, Изв. АН СССР, сер. мат. **47** (1983), № 1, 75–108.

[26] Morzkin T., Wasow W., *On the approximations of linear elliptic differential equations by difference equations with positiv coefficients*, J. Math. Phys. **31** (1952), 253–259.

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
198005, Санкт-Петербург, 2-я красноармейская, 4

Поступило 31 января 1994 г.