V. G. Romanov, S. I. Kabanikhin, K. Boboev, An inverse problem for $\mathscr{P}_n$-approximation of the kinetic transport equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1984, Volume 276, Number 2, 296–299

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

В.Г. РОМАНОВ, С.И. КАБАНИХИН, К. БОБОЕВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ $\mathcal{P}_n$-ПРИБЛИЖЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 14 VI 1983)

Для случая плоскопараллельной геометрии рассматривается вопрос об определении индикатриссы рассеяния $g(x, \mu)$ и сечений $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$ по результатам измерений плотности потока частиц в некоторой фиксированной точке.

Пусть процесс излучения описывается обобщенным решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x)u = Su + \delta(x, t, \mu^2 - \mu_*^2), \qquad x \in R, \qquad t \in R_+, \tag{1}$$
$$u|_{t<0} \equiv 0.$$

Здесь $\mu \in (-1, 1)$, $\mu_* \in (-1, 1)$, $R_+ = \{y:\ y \in R,\ y \geqslant 0\}$,

$$Su = \frac{1}{4}\sigma_s(x) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} g(x, \mu_0)u(x, t, \mu')d\mu' d\varphi,$$

$$\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-(\mu')^2}\cos\varphi.$$

Предположим, что в точке $x = 0$ известен след обобщенного решения задачи Коши (1)

$$u|_{x=0} = f(t, \mu), \qquad t \in R_+, \qquad \mu \in (-1, 1). \tag{2}$$

Требуется по функции $f(t, \mu)$ найти $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$, $g(x, \mu)$.

Обратную задачу (1), (2) рассмотрим в $\mathcal{P}_n$-приближении [1], т.е. предположим, что процесс распространения излучения достаточно точно описывается отрезком ряда

$$u(x, t, \mu) \approx \sum_{j=0}^{n} \left(j + \frac{1}{2}\right) u_{j+1}(x, t) P_j(\mu)$$

по системе полиномов Лежандра $P_j(\mu)$.

В соответствии с методом сферических гармоник вектор

$$U(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \ldots, u_{n+1}(x, t))^*$$

является обобщенным решением задачи Коши

$$\left(B \frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial x} + D\right) U = B \frac{1}{|2\mu_*|} \delta(x, t) [\bar{P}(\mu_*) + \bar{P}(-\mu_*)]; \qquad x \in R, \qquad t \in R_+, \tag{3}$$
$$U|_{t<0} \equiv 0.$$

Здесь $D = B\Sigma$, $\bar{P}(\mu_*) = (P_0(\mu_*), P_1(\mu_*), \ldots, P_n(\mu_*))^*$,

$$g_0 = \frac{1}{2\pi}, \qquad g_j(x) = \int_{-1}^{1} g(x, \mu) P_j(\mu) d\mu, \qquad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$B = \mathrm{diag}(1, 3, \ldots, 2n + 1),$$

$$\sigma_j = \sigma - 2\pi\sigma_s g_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n + 1; \qquad \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1});$$

в матрице A имеем $a_{i\,i+1} = a_{i+1\,i} = i$; $i = 1, 2, \ldots, n$, а все остальные элементы A равны нулю.

В $\mathcal{P}_n$-приближении обратная задача ставится следующим образом. Пусть о решении задачи Коши (3) известна дополнительная информация

(4) $\quad u_j|_{x=0} = f_j(t), \quad t \in R_+, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$

где $k \leqslant n + 1$, $f_j(t) = \int_{-1}^{1} f(t, \mu) P_{j-1}(\mu) d\mu$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Требуется найти функции $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$, $G(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))$ из соотношений (3), (4) по функции $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t))$.

Определим $\Lambda(n, m)$, $n > m > 0$, как множество функций $\{\sigma(x), \sigma_s(x), G(x)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $\quad g_j(x) \equiv 0, \quad j > m;$

(ii) $\quad g_j(x) \in C(R), \quad j = 1, 2, \ldots, m;$

(iii) $\quad \sigma_s(x) > 0, \quad \sigma_s(x) \in C(R), \quad \sigma(x) \in C(R).$

Определим матрицу $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1})$, где μ_i – корни полинома Лежандра $P_{n+1}(\mu)$, расположенные следующим образом:

$$\mu_2 < \mu_4 < \ldots < \mu_{n+1} < \ldots < \mu_3 < \mu_1; \quad \mu_1 = -\mu_2,\ \mu_3 = -\mu_4 \text{ и т.д.}$$

Теорема 1. *Пусть* $m \leqslant \left[\dfrac{k+1}{2}\right] \leqslant \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, $\mu_* = \pm\mu_1$. *Тогда решение обратной задачи* (3), (4) *единственно во множестве* $\Lambda(n, m)$.

Следствие. *Если* $g(x, \mu)$ *представима в виде*

(5) $\quad g(x, \mu) = \sum_{j=0}^{m} (j + ½) g_j(x) P_j(\mu),$

то для однозначного определения σ, σ_s, G *в* $\mathcal{P}_n$-*приближении при* $m + 2 \leqslant \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ *достаточно задать* $f_j(t)$ *для* $j = 1, 2, \ldots, 2m + 4$.

Схему доказательства теоремы 1 изложим, например, для случая, когда n нечетно. Следуя работе [1], определим матрицу T с элементами

$$T_{ij} = M_j P_{i-1}(\mu_j), \qquad M_j = \left[\sum_{i=0}^{n} P_i^2(\mu_j)(2i+1)\right]^{-½}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Вводя новую функцию при помощи равенства $U = TV$, получим для $V = (v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})^*$

(6) $\quad \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + M \dfrac{\partial}{\partial x}\right) V = E(x, t), \quad x \in R, \quad t \in R_+,$

(7) $\quad \begin{aligned} &V|_{t<0} \equiv 0, \\ &(TV)_j|_{x=0} = f_j(t), \quad t \in R_+, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \end{aligned}$

Здесь $E = \Phi\delta(x, t) - QV$, $\Phi = \dfrac{1}{2|\mu_*|} T^* B[\bar{P}(\mu_*) + \bar{P}(-\mu_*)]$, $Q = T^* B \Sigma T$, $(TV)_j$ – компонента вектора TV с номером j.

Используя теорию характеристик, нетрудно доказать следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $Q(x) \in C(R)$; *тогда решение задачи Коши* (6) *представимо в виде*

(8) $\quad v_i(x, t) = s_i(x)\delta(x - \mu_i t) + \tilde{v}_i(x, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n+1;$

где

$$(9) \qquad s_i(x) = \Phi_i - \mu_i^{-1} \int_0^x s_i(\lambda) Q_{ii'}(\lambda) d\lambda, \qquad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

а функции $\tilde{v}_i(x, t)$ *непрерывны всюду, кроме, быть может, прямых* $x = \mu_j t$, *на которых эти функции могут иметь разрывы первого рода.*

Следствие. Из (8) следует, что вектор $F(t)$ представим в виде

$$F(t) = F_0 \cdot \delta(t) + \tilde{F}(t),$$

где $F_0 = (f_{01}, f_{02}, \dots, f_{0k})$, $\tilde{F}(t) = (\tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2(t), \dots, \tilde{f}_k(t))$, $\tilde{f}_j(t) \in C(R_+)$, $f_{0j} = P_{j-1}(\mu_*)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Лемма 2. *Функции* $\tilde{v}_i$ *в представлении* (8) *обладают следующими свойствами*:

(i) $\quad \tilde{v}_i(x, t) \equiv 0, \quad t < \mu_1^{-1}|x|, \quad i = 1, 2, \dots, n+1;$

(ii) $\quad \tilde{v}_i(x, t)|_{x = \mu_j t} = |\mu_j - \mu_i|^{-1} s_j(\mu_j t) Q_{ij}(\mu_j t), \quad t \in R_+, \quad j = 1, 2;$

если $j = 1$, то $i = 2, 3, \dots, n+1$; *если* $j = 2$, то $i = 1$; $i = 2, 3, \dots, n+1$.

Определим области

$$\Delta_i^j(T) = \{(x, t)\colon \ |x\mu_i^{-1}| < t < T(|\mu_1\mu_j^{-1}| + |\mu_1^{-1}\mu_j|) - |x\mu_j^{-1}|\},$$

$$\Omega_j^+(T) = \{(x, t)\colon \ x \in R_+, \ t < |x\mu_j^{-1}|\} \cap \Delta_1^{2m+3}(T),$$

$$\Omega_j^-(T) = \{(x, t)\colon \ x \leqslant 0, \ t < |x\mu_j^{-1}|\} \cap \Delta_1^{2m+3}(T).$$

Лемма 3. *Обратная задача* (6), (7) *сводится к следующей системе интегральных уравнений*:

$$(10) \qquad \tilde{v}_i(x, t) = \tilde{v}_i(0, t - x\mu_i^{-1}) + \mu_i^{-1} \int_0^x E_i(\lambda, t - \mu_i^{-1}(x - \lambda)) d\lambda,$$

если $i = 1, 3, \dots, 2m+3$, то $(x, t) \in \Delta_i^{2m+3}(T) \cup \Omega_i^-(T)$,

если $i = 2, 4, \dots, 2m+4$, то $(x, t) \in \Delta_i^{2m+3}(T) \cup \Omega_i^+(T)$;

$$(11) \qquad \tilde{v}_i(x, t) = \tilde{v}_i(\alpha_i(x, t), \beta_i(x, t)) + \int_{\beta_i(x,t)}^t E_i(x - \mu_i(t - \tau), \tau) d\tau,$$

если $i = 3, 5, \dots, 2m+3$, то $(x, t) \in \Omega_i^+(T)$,

если $i = 4, 6, \dots, 2m+4$, то $(x, t) \in \Omega_i^-(T)$,

если $i = 2m+5, 2m+6, \dots, n+1$, то $(x, t) \in \Delta_1^{2m+3}(T)$;

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\tilde{v}_i(\gamma_i, t) = \tilde{v}_i(0, t - \gamma_i\mu_i^{-1}) + \mu_i^{-1} \int_0^{\gamma_i} E_i(\gamma_i - \mu_i(t - \tau), \tau) d\tau, \\ &i = 1, 2, \dots, 2m+4, \qquad t \in [0, T\mu_1^{-1}]. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_i = (-1)^i \mu_1 t$; $\alpha_i(x, t)$, $\beta_i(x, t)$ — координаты точки пересечения характеристики $dx/dt = \mu_i$, выпущенной из точки (x, t), с линией $|x| = \mu_1 t$.

Лемма 4. *Система интегральных уравнений* (9)–(12) *есть вольтерровская система нелинейных интегральных уравнений второго рода, замкнутая в* $\Delta_1^{2m+3}(T)$ *относительно функций* $s_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$; $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$; $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$, $\tilde{v}_j(x, t)$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, *в том смысле, что значения указанных функций при* $(x, t) \in \Delta_1^{2m+3}(T)$ *выражаются через интегралы от некоторых комбинаций этих же функций по отрезкам, лежащим в* $\Delta_1^{2m+3}(T)$.

Обозначим

$$\psi = (\sigma(x), \sigma_s(x), g_1(x), \ldots, g_m(x)),$$

$$\|\psi\| = \max\{\|\sigma\|_{C[0,T]}, \|\sigma_s\|_{C[0,T]}, \|g_j\|_{C[0,T]}, j = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$\|\tilde{f}\| = \max\{\|f_j\|_{C[0,T(\mu_1\mu_{2m+3}^{-1}+\mu_1^{-1}\mu_{2m+3})]}, j = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Пусть $\Lambda_M(n, m)$ – множество функций $\psi \in \Lambda(n, m)$ таких, что $\max\{\|\psi\|, \|\sigma_s^{-1}\|_{C[0,T]}\} \leqslant M$.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_{(1)}(x)$, $\psi_{(2)}(x)$ – *любые две функции класса* $\Lambda_M(n, m)$ *и* $f_{(1)}(t)$, $f_{(2)}(t)$ – *отвечающие им функции при соответствии, определяемом формулами* (3), (4). *Тогда*

$$\|\psi_{(1)} - \psi_{(2)}\| \leqslant K\|\tilde{f}_{(1)} - \tilde{f}_{(2)}\|$$

с константой K, зависящей только от T, n, m, M.

Отметим, что методика работы [2] позволяет не только доказать теорему 2, но также и локальную (при достаточно малом $T > 0$) теорему существования решения обратной задачи (6), (7). Методом обращения разностной схемы [3] можно построить конечно-разностный алгоритм решения задачи (4), (5).

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
30 VI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Султангазин У.М.* Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979. 2. *Романов В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973. 3. *Кабанихин С.И.* В сб.: Единственность, устойчивость и методы решения обратных и некорректных задач. Новосибирск, 1980, с. 36–43.

УДК 519.8

МАТЕМАТИКА

Е.А. СЕМИНА

МЕТОД АЛЬТЕРНИРОВАННОГО ИНТЕГРАЛА ПОНТРЯГИНА В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 27 VI 1983)

1. Пусть движения векторов $x \in R^k$, $y \in R^l$ при $t \geqslant 0$ описываются уравнениями

(1) $\dot{x} = A_1 x - u_1 + v_1, \quad x(0) = x_0,$

(2) $\dot{y} = A_2 y - u_2 + v_2,$

где A_1, A_2 – постоянные матрицы порядков k, l соответственно, $u_1 \in P_1 \subset R^k$, $v_1 \in Q_1 \subset R^k$, $u_2 \in P_2 \subset R^l$, $v_2 \in Q_2 \subset R^l$, P_i, Q_i – непустые компакты.

В пространстве R^l определено непустое замкнутое терминальное множество M.