С. В. Кисляков, Упрощенное доказательства одной теоремы Ж. Бургейна о продолжении операторов, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 146–150

С.В.Кисляков

УПРОЩЕННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Ж.БУРГЕЙНА О ПРОДОЛЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ

В [I] Ж.Бургейн доказал, что всякий оператор, действующий из рефлексивного подпространства пространства L^1/H^1_0 в H^∞, допускает распространение на все пространство L^1/H^1_0. У этой теоремы есть интересные приложения, в том числе к гармоническому анализу (см. там же). Доказательство теоремы опиралось на важный сам по себе, но весьма технический результат о возможности промажорировать любой неотрицательный суммируемый вес Δ на окружности другим весом Δ_1 (при этом так, чтобы $\int\Delta_1 \leq const\int\Delta$), для которого существует проектор из $L^2(\Delta_1)$ на $H^2(\Delta_1)$, обладающий всеми свойствами обычного проектора Рисса - в частности, имеющий слабый тип (I,I) относительно веса Δ_1, непрерывный во всех пространствах $L^p(\Delta_1)$, $1<p<\infty$, и, главное, удовлетворяющий некоторому "интерполяционному неравенству" (см. [I]).

Позже Бургейн нашел способ избежать применения этого результата при доказательстве несколько более слабого варианта теоремы о продолжении, в котором вместо L^1/H^1_0 фигурирует L^1 (и какое-нибудь его рефлексивное подпространство). Рассуждение было опубликовано в [2] (§ I.C). Там же, между прочим, отмечалось, что не видно, как сделать аналогичное упрощение в случае пространства L^1/H^1_0.

Мы сейчас, однако, покажем, что и здесь оно возможно. Будем доказывать теорему о продолжении в двойственной форме. Пусть $\cdot\hat{\otimes}\cdot$ - проективное тензорное произведение.

ТЕОРЕМА. Если Y - рефлексивное подпространство пространства L^1/H^1_0, то нормы пространств $Y\hat{\otimes}L^1/H^1_0$ и $L^1/H^1_0\hat{\otimes}L^1/H^1_0$ эквивалентны на первом из них.

Нам понадобятся две леммы. Пусть Q - ортогональный проектор из $L^2(\mathbb{T})$ на H^2, $0<\alpha<1$, $k: L^1/H^1_0 \longrightarrow L^\alpha/H^\alpha_0$ - оператор, индуцированный тождественным вложением $L^1 \longrightarrow L^\alpha$.

ЛЕММА I. Пусть (S,μ) - пространство с мерой, $J: L^1(\mu)\to L^\alpha(\mu)$ - оператор тождественного вложения. Тогда оператор $Q\otimes J$ продолжается при каждом p, $1<p<\infty$, до ограниченного оператора из $L^p(\mathbb{T}, L^1(S))$ в $L^p(\mathbb{T}, L^\alpha(S))$.

Эта лемма принадлежит Бургейну. Доказательство изложено в [2] (теорема I.9).

ЛЕММА 2. Если Y - рефлексивное подпространство пространства L^1/H^1_0, то оператор $k\,|\,Y$ есть изоморфизм (на свой образ).

Это установлено в [3], § 2 (см. также конец этой заметки).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть $q: L^1 \longrightarrow L^1/H^1_0$ - фактороотображение. Достаточно проверить, что для любых конечных наборов векторов $y_1,\dots,y_n$ из Y и $x_1,\dots,x_n$ из L^1/H^1_0 найдутся такие функции $g_1,\dots,g_n$ из L^1, что $q g_j = x_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ и

$$\int \Big\| \sum y_j g_j(t)\Big\|_Y dm(t) \leqslant C \Big\| \sum y_j \otimes x_j \Big\|_{L^1/H^1_0 \hat{\otimes} L^1/H^1_0}, \qquad (I)$$

где C зависит лишь от Y. (Действительно, слева стоит норма тензора $\sum y_j \otimes g_j$ в пространстве $L^1(Y) = Y \hat{\otimes} L^1$, что, очевидно, не меньше нормы тензора $\sum y_j \otimes x_j$ в $Y \hat{\otimes} L^1/H^1_0$.)

Положим $I = \| \sum y_j \otimes x_j \|_{L^1/H^1_0 \hat{\otimes} L^1/H^1_0}$. Пусть η_j и ξ_j - какие угодно функции из L^1, удовлетворяющие условиям $q(\eta_j) = y_j$, $q(\xi_j) = x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Легко видеть, что можно найти функцию F в $L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ со спектром в множестве $\{(k,\ell)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : k>0$ или $\ell > 0\}$, такую что

$$\iint \Big| \sum \eta_j(s)\, \xi_j(t) + F(s,t)\Big|\, dm(s)\, dm(t) \leqslant 2I .$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $f(t) = \varepsilon + \int \big| \sum \eta_j(s)\xi_j(t) + F(s,t)\big|\, dm(s) + \varepsilon \sum_j |\xi_j(t)|$ и пускай Φ - такая внешняя функция, что $|\Phi| = f$ п.в. Проверим, что если ε достаточно мало́, то неравенство (I) выполняется при $g_j = \Phi^{1/2} Q(\Phi^{-1/2}\xi_j)$.

Прежде всего, $\Phi^{-1/2}\xi_j \in L^2$, каково бы ни было ε, так что определение функций g_j корректно. Нетрудно видеть, что $q(g_j) = q(\xi_j) = x_j$.

Пусть $F_1(s,\cdot) = \Phi^{1/2} Q(\Phi^{-1/2} F(s,\cdot))$. Тогда, по неравенству Гёльдера и лемме I (в которой положим $p = 2$),

$$\int \Big\| \sum \eta_j(\cdot)\, g_j(t) + F_1(\cdot,t)\Big\|_{L^\alpha} dm(t) \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi\|^{1/2}_{L^1} \Big(\int \Big[\int \Big| Q(\Phi^{-1/2}(\cdot)(\sum \eta_j(s)\xi_j(\cdot) + F(s,\cdot)))\Big|^\alpha dm(s)\Big]^{2/\alpha} dm \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi\|_{L^1}^{1/2}\left(\int\left[|\Phi(t)|^{-1/2}\int\left|\sum\eta_j(s)\xi_j(t)+F(s,t)\right|dm(s)\right]^2 dm(t)\right)^{1/2}\leqslant \mathrm{const}\ I\ ,$$

если только ε достаточно мало. Из условия на спектр функции F нетрудно усмотреть, что для каждого фиксированного t функция $s\mapsto F_1(s,t)$ лежит в H_0^α. Лемма 2 теперь дает, что при каждом t

$$\left\|\sum y_j g_j(t)\right\|_Y\leqslant c\left\|k\left(\sum y_j g_j(t)\right)\right\|_{L^\alpha/H_0^\alpha}\leqslant c\left\|\sum\eta_j(\cdot)g_j(t)+F_1(\cdot,t)\right\|_{L^\alpha}.$$

Проинтегрировав по t и учтя предыдущую оценку, получим неравенство (I). ●

Ради большей замкнутости изложения докажем лемму 2. Это будет сделано по существу так же, как в [3] – с той разницей, что рассуждению будет придан более "количественный" характер, чтобы результат удобней было сравнивать с "интерполяционными неравенствами", использованными для доказательства теоремы о продолжении первоначально (см. [I]).

Если $f\in L^1(\mathbb{T})$, то пусть $\Omega(f,\delta)=\sup\{\|f\|_{L^1}^{-1}\int_e|f| : me\leqslant\delta\}$. Наряду с введенным ранее оператором $q: L^1\to L^1/H_0^1$ рассмотрим еще факторотображение $q_\alpha: L^\alpha\to L^\alpha/H_0^\alpha$.

ЛЕММА 3. Если $f\in L^1$ и $0<\alpha<1$, то для всяких R,σ $(R\geqslant 1,\ \sigma>0)$ имеем: $\|qf\|_{L^1/H_0^1}\leqslant R^{1-\alpha}\|q_\alpha f\|_{L^\alpha/H_0^\alpha}+\|f\|_{L^1}(C\sigma+\Omega(f,CR^{-\alpha}\sigma^{-2}))$ (здесь C – абсолютная постоянная).

ВЫВОД ЛЕММЫ 2 ИЗ ЛЕММЫ 3. Как известно, для всякого x из L^1/H_0^1 существует единственная функция τx из L^1, такая что $\|\tau x\|=\|x\|$ и $q(\tau x)=x$. Отображение τ переводит слабо компактные множества в слабо компактные (подробное обсуждение этого круга вопросов можно найти в [4], §§ 6–8). Таким образом, если Y – рефлексивное подпространство пространства L^1/H_0^1, то функции $\Omega(\tau y,\delta)$ стремятся к нулю при $\delta\to 0$ равномерно по y из Y.

Отсюда следует, что если в лемме 3 взять $f=\tau y$ $(y\in Y)$, положить, скажем, $\sigma=R^{-\alpha/4}$, а затем выбрать R достаточно большим, то мы получим

$$\|y\|=\|q\ \tau y\|_{L^1/H_0^1}\leqslant C\,\|q_\alpha\tau y\|_{L^\alpha/H_0^\alpha}+\frac{1}{2}\|\tau y\|_{L^1},$$

где C не зависит от y. Это и есть утверждение леммы 2, поскольку $\|y\| = \|\tau y\|$. ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Найдем функцию h из H_0^α, для которой $\|f+h\|_{L^\alpha} \leq (1+\varepsilon)\|q_\alpha f\|_{L^\alpha/H_0^\alpha}$. Пусть $\lambda > 0$, $e = \{|f+h| \geq \lambda\}$, а функция β совпадает с $\lambda^{-1}|f+h|$ на e и равна 1 на $\mathbb{T} \setminus e$. Пусть F - внешняя функция, такая что $|F| = \beta^{-1}$ п.в. (т.е. $F = exp(-\log\beta - i\widetilde{\log\beta})$, где $\sim$ обозначает гармоническое сопряжение). Наконец, пусть $g = f + Fh$. Покажем, что если λ выбрано надлежащим образом, то g - именно тот представитель факторкласса qf в пространстве L^1/H_0^1, на котором реализуется (с точностью до ε) нужная оценка.

Имеем: $\|g\|_{L^1} \leq \|F(f+h)\|_{L^1} + \|(1-F)f\|_{L^1} \leq \lambda^{1-\alpha}\|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha + \|(1-F)f\|_{L^1}$. На множестве $\mathbb{T} \setminus e$ справедливо неравенство $|1-F| \leq const\,|\widetilde{\log\beta}|$, и нетрудно сосчитать (через функцию распределения функции β), что $\int_{\mathbb{T}}(\widetilde{\log\beta})^2 \leq \int_{\mathbb{T}}(\log\beta)^2 \leq const\,\|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha \lambda^{-\alpha}$. Следовательно, для меры множества e_1, $e_1 \overset{def}{=} \{|\widetilde{\log\beta}| > \sigma\}$, справедлива оценка $me_1 \leq const\,\sigma^{-2}\|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha \lambda^{-\alpha}$. На $\mathbb{T} \setminus (e \cup e_1)$ имеем $|1-F| \leq C\sigma$, а так как еще и $me \leq \lambda^{-\alpha}\|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha$, то окончательно

$$\|g\|_{L^1} \leq \lambda^{1-\alpha}\|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha + C\sigma\|f\|_1 + \|f\|_1 \Omega(f, \|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha \lambda^{-\alpha}(1+C\sigma^{-2}))\,.$$

В качестве λ возьмем число $R\|f+h\|_{L^\alpha}$. ●

Литература

1. B o u r g a i n J. Bilinear forms on H^∞ and bounded bianalytic functions. - Trans.Amer.Math.Soc., 1986, v. 286, N 1, p.313-337.
2. D é c h a m p s - G o n d i m M. Analyse harmonique, analyse complexe et géométrie des espaces de Banach (d'après Jean Bourgain). - Séminare Bourbaki, 1983/1984, exposé N 623. Astérisque, 1985, v.121-122, p.171-195.
3. К и с л я к о в С.В. О рефлексивных подпространствах пространства C_A^*. - Функц.анализ и его прилож., 1979, т.13, № 1, с.21-30.
4. P e ł c z y ń s k i A. Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators. Regional Conference Series in Mathematics. N 30, Amer.Math.Sos., Providence, 1977.

S.V.Kislyakov. A simplified proof of a theorem of J.Bourgain on extension of operators.

Summary

The theorem in question states that every operator from a reflexive subspace of L^1/H^1_0 to H^∞ extends to the whole of L^1/H^1_0.