Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. E. Balabaev, On the Dirichlet problem for invariant Dezin elliptic systems, *Dokl. Akad. Nauk*, 1997, Volume 352, Number 1, 7–10

https://www.mathnet.ru/eng/dan3897

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.84
January 16, 2026, 05:35:02

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 352, № 1, с. 7–10

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЕЗИНА

© 1997 г. В. Е. Балабаев

Представлено академиком В.А. Ильиным 20.05.94 г.

Поступило 17.05.95 г.

Исследуем инвариантные эллиптические системы Дезина [1] в евклидовом пространстве, используя их матричные представления. Это позволит получить ряд новых свойств этих систем. Для построения нужных представлений рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ последовательность дифференциальных матричных операторов, заданную рекуррентно формулой

$$A_{k,n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} A_{k,n-1}\left(\frac{\partial}{\partial' x}\right) & 0 \\ (-1)^k E_{C^k_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} A_{k-1,n-1}\left(\frac{\partial}{\partial' x}\right) & \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $k = 1, \ldots, n-2$, $\frac{\partial}{\partial' x}$ – дифференцирование по $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Операторы

$$A_{0,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad A_{n-1,n} = \left((-1)^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_n}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

заданы, в частности,

$$A_{0,1} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \quad A_{1,2} = \left(-\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right).$$

Матрица (1) является матрицей оператора внешнего дифференцирования $d_{k,n}$, действующего на дифференциальную форму степени k, записанную в системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ при условии естественного упорядочивания ее коэффициентов [2].

Обозначим: $A^*_{k,n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – дифференциальный матричный оператор, имеющий матрицу $-A^t_{k,n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и являющийся формально сопряженным к оператору $d_{k,n}$. Тогда матрицу инвариантной эллиптической системы Дезина [1] можно представить в виде

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} A_{0,n} & A^*_{1,n} & 0 & & & & 0 \\ 0 & A_{2,n} & A^*_{3,n} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & A_{2k,n} & A^*_{2k+1,n} & 0 \\ & & & & 0 & A_{2k+2,n} & A^*_{2k+3,n} \\ 0 & & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Последние две блочные строки матрицы (2) в зависимости от четности n имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{n-4,n} & A^*_{n-3,n} & 0 \\ & 0 & A_{n-2,n} & A^*_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

если n четно,

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{n-3,n} & A^*_{n-2,n} \\ & 0 & A_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

если n нечетно.

Структура характеристических матриц инвариантных эллиптических систем Дезина довольно своеобразна. Рассмотрим ряд примеров.

При $n = 2$ имеем

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & -\xi_1 \end{pmatrix},$$

что соответствует системе Коши–Римана.

При $n = 3$ находим, что

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} A_{0,3} & A^*_{1,3} \\ 0 & A_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 & \xi_3 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 & -\xi_2 \\ 0 & \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix},$$

Ярославский государственный университет

что соответствует системе Моисила–Теодореску–Бицадзе.

При $n = 4$ получаем, что

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} A_{0,4} & A^*_{1,4} & 0 \\ 0 & A_{2,4} & A^*_{3,4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 & \xi_3 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 & -\xi_2 & 0 & 0 & \xi_4 & 0 \\ \xi_4 & 0 & 0 & 0 & -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_4 \\ 0 & \xi_4 & 0 & 0 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 & -\xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_4 & 0 & -\xi_3 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_4 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 & -\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Индукцией по размерности n пространства $\mathbb{R}^n$ можно показать, что матрицы (1) обладают следующими свойствами:

$$A_{k,n}A_{k-1,n} = 0,\ A^*_{k-1,n}A^*_{k,n} = 0,\ k = 1, \ldots, n-1,$$

$$A^*_{0,n}A_{0,n} = E\Delta_n,\ A_{k,n}A^*_{k,n} + A^*_{k+1,n}A_{k+1,n} = -E\Delta_n,$$
$$k = 0, \ldots, n-1,$$

где 0 – нулевая матрица соответствующего размера, E – единичная матрица порядка $C_{n^2}^{k+1}$, $\Delta_n = \dfrac{\partial}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial}{\partial x_n^2}$, а $A_{n,n}$ полагаем равным нулю.

Используя эти свойства матриц (1), нетрудно доказать, что оператор $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, определенный равенством (2), эллиптический, так как его характеристическая матрица удовлетворяет соотношению

$$A^t(\xi)A(\xi) = A(\xi)A^t(\xi) = E(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2), \quad (3)$$

где E – единичная матрица порядка 2^{n-1}, $A^t(\xi)$ – транспонированная к $A(\xi)$ матрица.

Легко видеть, что инвариантную эллиптическую систему Дезина в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) = h(x), \quad (4)$$

где $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ определена равенством (2). Для однородной эллиптической системы Дезина в $\mathbb{R}^n$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) = 0, \quad (5)$$

решениями которой являются так называемые голоморфные формы [1], справедливы многие свойства, аналогичные свойствам голоморфных функций. В частности, для этих систем верны аналоги интегрального представления, теорем Коши и Морера, полученные при помощи иного подхода Б.В. Пальцевым [3]. Отметим также, что, используя наше матричное представление (2), для системы (5) можно установить, применяя методы работы А.В. Бицадзе [4], формулы для скачка аналога интеграла типа Коши, аналог формулы Пуанкаре–Бертрана для перестановки соответствующих многомерных сингулярных интегралов, а также исследовать краевую задачу линейного сопряжения и систему сингулярных интегральных уравнений с ядром, порожденным оператором (2), так, как это сделано нами в [5] для канонических эллиптических систем.

Особое строение матрицы системы (5) позволяет, кроме упомянутых выше вопросов, изучить также краевую задачу Дирихле для этой системы в полупространстве. Пусть $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{2m}(x))$, $2m = 2^{n-1}$. Следуя А.А. Дезину [6], назовем компоненту f_i нормальной, если оператор дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, находящийся в i-м столбце матрицы $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, содержится в некоторой матрице $A_{2k,n}$, $0 \le 2k \le n-1$, см. (2). В этом случае пишем $i \in I_N$, где I_N – множество индексов нормальных компонент. В противном случае называем компоненту f_i тангенциальной и пишем $i \in I_T$, где I_T – множество индексов тангенциальных компонент. Такое разделение компонент носит, естественно, неинвариантный характер, ибо связано с выбором координатной системы. Число $m = 2^{n-2}$ нормальных компонент равно числу тангенциальных компонент $f(x)$. Для решений системы (5) справедлив следующий принцип симметрии.

Теорема. *Пусть граница области $D \subset \mathbb{R}^n$ содержит часть S гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$ и D_* – симметричная с D область относительно гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$, причем $D \cap D_* = \varnothing$. Если $f(x)$ удовлетворяет системе (5) в D, непрерывна на S и удовлетворяет там условию*

$$f_i(0, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i \in I_N, \quad (6)$$

то $f(x)$ продолжается как решение системы (5) через S из D в область D_*. Полученное продолжение дается равенством

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ f_i(x_*), & i \in I_T;\ -f_i(x_*),\ i \in I_N,\ x \in D_*, \end{cases} \quad (7)$$

где $x_* = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка, симметричная $x = (x_1, \ldots, x_n)$ относительно $\{x_1 = 0\}$, и является

решением системы (5) *класса* $C^1(D \cup S \cup D_*)$ *в области* $D \cup S \cup D_*$.

Доказательство. Действуя в духе работы А.А. Дезина [6, с. 40], можно непосредственно убедиться в том, что $F(x)$, определенная равенством (7), удовлетворяет (5) в D и D_* и непрерывна на общей части S их границы. В самом деле, рассмотрим строку системы (5), соответствующую нормальной компоненте, т.е. строку, в которой оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}$ находится в столбце, соответствующем нормальной компоненте. Иными словами, $\frac{\partial}{\partial x_1}$ находится в некоторой матрице $A_{2k,n}$, $0 \le k \le n-1$, – блоке матрицы $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ (2). Тогда при изменении знака у x_1 каждое слагаемое в уравнении, соответствующем этой строке, либо не меняет знака (если оно не содержит дифференцирования по x_1, так как если в строке есть дифференцирование по x_1 и в этой же строке есть дифференцирование по другому переменному x_k, $k \ne 1$, то в столбце, содержащем это дифференцирование по x_k, нет дифференцирования по x_1 в матрице $A_{2k,n}$, $0 \le 2k \le n-1$, ибо этот столбец соответствует компоненте при дифференциальной форме, уже имеющей дифференциал dx_1), либо меняет знак два раза, если оно содержит дифференцирование по x_1.

Аналогично, рассмотрим строку системы (5), соответствующую тангенциальной компоненте, т.е. строку, в которой оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}$ не находится в столбце, соответствующем нормальной компоненте, т.е. не находится в матрице $A_{2k,n}$, $0 \le 2k \le n-1$. Тогда при изменении знака у x_1 каждое слагаемое в этой строке меняет знак и тогда, когда оно не содержит $\frac{\partial}{\partial x_1}$, а содержит дифференцирование по другой переменной x_k, $k \ne 1$, так как в этом случае оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}$ находится в столбце, соответствующем нормальной компоненте, т.е. в некоторой матрице $A_{2k,n}$, $0 \le 2k \le n-1$ (в силу определения оператора внешнего дифференцирования и соответствующей ему матрицы $A_{2k,n}$), и тогда, когда оно содержит дифференцирование по x_1.

Таким образом, в силу устранимости особенностей коразмерности один решений системы (5), что доказывается таким же способом, как это сделано нами в [5] для канонических систем, получаем, что $F(x)$ будет решением системы (5) и в области $D \cup S \cup D_*$.

Замечание 1. Если на плоской части S границы области D вместо условия (6) выполняется условие

$$f_i(0, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i \in I_T, \tag{8}$$

то при тех же предположениях на $f(x)$ и D, как в теореме, $f(x)$ продолжается как решение системы (5) из D в D_* через S. Это продолжение дается равенством

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ -f_i(x_*), & i \in I_T; \\ f_i(x_*), & i \in I_N, \quad x \in D_*, \end{cases} \tag{9}$$

и является решением системы (5) класса $C^1(D \cup S \cup \cup D_*)$. Доказательство то же, что и выше.

Замечание 2. Доказанная теорема и замечание 1 справедливы и в случае, если гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$ заменить любой гиперплоскостью $\{x_i = 0\}$, $i = 2, \ldots, n$.

Используем полученные результаты для нахождения интегрального представления для решений системы (5) в полупространстве. Обозначим $D^+ = \{x_1 > 0\}$, $D^- = \{x_1 < 0\}$ и S – гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Решение $f(x)$ системы (5) в D^+ доопределим в D^- равенствами

$$f_i(x) = \begin{cases} f_i(x_*), & i \in I_T, \\ -f_i(x_*), & i \in I_N, \end{cases} \quad x \in D^-. \tag{10}$$

Так же как и при доказательстве теоремы, устанавливаем, что $f(x)$, определенный равенствами (10), удовлетворяет системе (5). Разность предельных значений решения $f(x)$ в D^+ и доопределенного равенствами (10) решения в D^- на гиперплоскости S

$$f^+(t) - f^-(t) = g(t), \quad t = (0, t_2, \ldots, t_n) \in S, \tag{11}$$

где

$$g_i(t) = \begin{cases} 0, & i \in I_T, \\ 2f_i(t), & i \in I_N. \end{cases}$$

Вектор $f(x)$, удовлетворяющий системе (5) в $\mathbb{R}^n \backslash S$ краевому условию (11) и обращающийся в нуль на бесконечности, определяется в силу устранимости особенностей коразмерности один решений системы (5) единственным образом формулой

$$f(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \int_S A^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right) A(*dt) g(t), \tag{12}$$

где $g(t)$ – вектор класса $C^{(0,h)}(S)$, удовлетворяющий при больших $|t|$ условию

$$|g(t)| < \frac{c}{|t|^{\varepsilon}}, \ \varepsilon > 0, \ c > 0, \ t = (0, t_2, \ldots, t_n). \quad (13)$$

Используя формулы для скачка аналога интеграла типа Коши, можно показать выполнение условия (11). Обращение $f(x)$ в нуль на бесконечности следует из вида (12), см., например, [7, с. 128].

Из интегрального представления (12) видно, что решение $f(x)$ системы (5) в D^+, исчезающее в бесконечности, определяется однозначно через граничные значения его 2^{n-2} нормальных компонент класса $C^{(0,h)}(S)$, удовлетворяющих условию (13) на гиперплоскости $S = \{x_1 = 0\}$.

Применяя формулу (12), находим решение следующей краевой задачи Дирихле: найти решение $f(x)$ системы (5) в полупространстве D^+ класса $C^{(0,h)}(D^+ \cup S)$, исчезающее в бесконечности, по краевому условию

$$f_i|_S = \gamma_i(t), \ i \in I_N, \quad (14)$$

где $\gamma_i(t)$, $i \in I_N$, – заданные на $S = \{x_1 = 0\}$ функции класса $C^{(0,h)}(S)$, удовлетворяющие (13) при больших $|t|$.

В силу (12) искомое решение дается формулой

$$f(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_S A^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right) A(*dt)\gamma(t), \quad (15)$$

где

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} 0, & i \in I_T, \\ \gamma_i(t), & i \in I_N. \end{cases}$$

Замечание 3. Аналогично находится интегральное представление для решений системы (5) в полупространстве D^+ через граничные значения их 2^{n-2} тангенциальных компонент класса $C^{(0,h)}(S)$ на гиперплоскости S. Оно позволяет решить краевую задачу, аналогичную (14), когда условие (14) заменяется условием

$$f_i|_S = \gamma_i(t), \ i \in I_T. \quad (16)$$

Замечание 4. Если вместо (14) рассмотреть более общее условие на S:

$$\sum_{j \in I_N} a_{ij} f_j(t) = \gamma_i(t), \ i \in I_N, \quad (17)$$

где $\det\|a_{ij}\| \neq 0$, то такая краевая задача сводится к задаче (14) и, значит, имеет единственное решение. Аналогичным образом обобщается и задача (16).

Пусть теперь $n > 2$. Рассмотрим в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ краевую задачу: найти решение $f(x)$ системы (5) в D класса $C(D \cup \partial D)$ по краевому условию:

$$\begin{gathered} f_{j_i}|_{\partial D} = \gamma_i(t), \ i = 1, \ldots, m, \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_m \le 2m \ \ (m = 2^{n-2}). \end{gathered} \quad (18)$$

Отметим, что решение этой задачи в многомерном случае имеет ряд принципиальных различий. В частности, в отличие от плоского случая задача (18) не является нётеровой.

Действительно, в силу принципа максимума модуля и так как $n \cdot 2^{n-2} > 2^{n-1}$ при $n > 2$, любое решение, принадлежащее ядру этой задачи, удовлетворяет системе уравнений, имеющей матрицу, у которой существует минор, определяющий систему Коши–Римана. В самом деле, в этом случае в любых 2^{n-2} столбцах характеристической матрицы системы (5) всегда найдется строка, содержащая не менее двух ненулевых элементов, так как в каждом из этих столбцов находится n различных ненулевых элементов. Поэтому ядро данной задачи содержит часть, изоморфную пространству голоморфных функций от одного комплексного переменного $x_k + ix_p$ в области, являющейся проекцией D на плоскость Ox_kx_p, непрерывных в ее замыкании. Следовательно, ядро задачи (18) бесконечномерно, и, значит, она не нётерова.

Замечание 5. Если вместо (18) рассмотреть более общее условие на ∂D:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_{k_j}(t) = \gamma_i(t), \\ i = 1, \ldots, m, \ 1 \le k_1 < \ldots < k_m \le 2m, \end{gathered}$$

где $\det\|a_{ij}\| \neq 0$, то такая краевая задача сводится к задаче (18) и, следовательно, также не является нётеровой.

Автор выражает глубокую благодарность А.В. Бицадзе, А.А. Дезину и В.А. Ильину за обсуждение работы и ценную поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дезин А.А.* Многомерный анализ и дискретные модели. М.: Наука, 1990.
2. *Гудович И.С., Крейн С.Г.* // Дифференц. уравнения и их применения. 1974. В. 9. С. 1–146.
3. *Пальцев Б.В.* // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4. № 6. С. 1376–1388.
4. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
5. *Балабаев В.Е.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 8. С. 1358–1369.
6. *Дезин А.А.* // Тр. МИАН. 1962. Т. 68. С. 1–88.
7. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.