ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2004, том 44, № 12, с. 2150–2166

УДК 519.626.2

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПАРАМЕТРЕ СОВМЕСТНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1)]

© 2004 г. Е. А. Ровенская

(119899 Москва, Ленинские годы, МГУ, ВМК)
e-mail:eroven mail.ru

Поступила в редакцию 01.04.2004 г.

Рассматривается задача о нахождении наименьшего значения скалярного параметра p, при котором зависящая от параметра p система уравнений $F(p, x) = b(p)$ имеет решение в заданном, также зависящем от параметра p множестве $X(p)$. Последнее множество полагается расширяющимся при росте значения параметра. Предлагается итерационный алгоритм приближения искомого глобального минимума, основанный на сведении исходной задачи к задаче выпуклого программирования в пространстве рандомизированных элементов – выпуклых комбинаций мер Дирака на пространстве основных элементов. Основным условием такого сведения выступает выпуклость образов $F(p, X(p))$. Предлагаемый алгоритм основан на идее метода экстремального сдвига Красовского из теории позиционного управления. Каждый шаг алгоритма сводится к нахождению текущего приближения значения параметра p_k как решения одномерной задачи минимизации при наличии ограничения-равенства с последующим поиском экстремального элемента множества $X(p_{k+1})$. Приводится вариант задачи, для которого реализация исходного алгоритма имеет упрощенный вид. Указывается приложение алгоритма к решению задачи об оптимизации фазового ограничения для билинейной управляемой системы. Библ. 11.

Ключевые слова: система уравнений в банаховом пространстве, оптимальный параметр совместности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X – банахово пространство с нормой $|\cdot|_X$ и Y – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot, \cdot\rangle_Y$ и нормой $|\cdot|_Y$, порожденной этим скалярным произведением, p_0 – некоторое действительное число, $F(\cdot, \cdot)$ – функция из $[p_0, \infty) \times X$ в Y, $b(\cdot)$ – функция из $[p_0, \infty)$ в Y и $X(p)$, $p \geq p_0$, – однопараметрическое семейство подмножеств пространства X. Будем рассматривать следующую задачу оптимизации:

$$\begin{gathered} p \longrightarrow \min, \\ F(p, x) = b(p), \\ x \in X(p), \\ p \geq p_0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Задача (1.1) требует, таким образом, найти минимальное значение параметра $p \geq p_0$, при котором система уравнений $F(p, x) = b(p)$ является совместной в $X(p)$. В [1] задача (1.1) рассмотрена для случая, когда функция $x \mapsto F(p, x)$ линейна при всех $p \geq p_0$. Там же приведены некоторые стандартные оптимизационные задачи с ограничениями, сводящиеся к постановке (1.1). В [2] в рамках постановки (1.1) исследована задача оптимального управления при смешанных ограничениях.

Задача (1.1) не является, вообще говоря, задачей выпуклого программирования, и стандартные оптимизационные алгоритмы градиентного типа (см., например, [3]) могут быть неприменимы для нахождения ее глобального решения. Предлагаемый в данной работе итерационный алгоритм решения задачи (1.1) относится к классу неградиентных методов (методы штрафных, барьерных функций – см., например, [3]; алгоритмы, основанные на двойственности, – см., например, [4]; гомотопические методы – см., например, [5]). Работа продолжает исследования по

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 03-01-00737).

приложениям известного в теории управления метода экстремального сдвига [6] к задачам оптимизации (см. [7], [2], [1], [8]). Предложенный алгоритм обобщает метод из [1] для одного класса нелинейных функций $F(\cdot)$, основным свойством которых является выпуклость множеств $F(p, X(p))$.

В следующем разделе формулируются основные предположения и конструируется эквивалентная задаче (1.1) расширенная задача выпуклого программирования, в которой точечные аргументы $x \in X$ заменены на выпуклые комбинации вероятностных мер Дирака. В разд. 3 вводится ряд дополнительных предположений и с использованием эквивалентности исходной и расширенной задач обосновывается основной алгоритм решения. Разд. 4 посвящен упрощению основного алгоритма. В разд. 5 алгоритм конкретизируется для случая, когда значения $F(p, x)$ не зависят от параметра p. Разд. 6 посвящен приложению к задаче об оптимизации фазовых ограничений для билинейной управляемой системы.

2. РАСШИРЕННАЯ ЗАДАЧА

Будем считать, что для задачи (1.1) существует допустимый элемент. Оптимальное значение задачи (1.1) будем обозначать через p_*, множество всех ее решений (p_*, x_*) – через $\{p_*\} \times X_*$.

Следуя [8], функцию $G : [p_0, \infty) \times X \mapsto Y$ будем называть *компактификатором*, если для любой последовательности (p_k, x_k) из $[p_0, \infty) \times X$ такой, что $|G(p_k, x_k)|_Y \mapsto 0$ и $p_k \mapsto \bar{p}$, последовательность (x_k) компактна в X. Задачу (1.1) будем рассматривать при следующих основных условиях:

(A1) многозначное отображение $p \mapsto X(p)$ непрерывно в том смысле, что если $x_k \in X(p_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $p_k \longrightarrow \bar{p}$ и $x_k \longrightarrow \bar{x}$, то $\bar{x} \in X(\bar{p})$;

(A2) функции $p \mapsto b(p)$ и $(p, x) \mapsto F(p, x)$ непрерывны;

(A3) функция $(p, x) \mapsto F(p, x) - b(p)$ – компактификатор.

Через $\operatorname{dist}(z, X_*)$ будем обозначать расстояние в X между элементом z и множеством $X_* \in X$: $\operatorname{dist}(z, X_*) = \inf\limits_{x \in X_*} |z - x|_X$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A3). *Тогда для любой последовательности* (p_k, x_k) *из* $[p_0, \infty) \times X$ *такой, что* $p_k \longrightarrow \bar{p}$, $|F(p_k, x_k) - b(p_k)|_Y \longrightarrow 0$ *и* $x_k \in X(p_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *последовательность* (x_k) *компактна в* X *и* $\operatorname{dist}(x_k, X(\bar{p})) \longrightarrow 0$.

Доказательство. Компактность последовательности (x_k) следует из условия (A3). Покажем, что $\operatorname{dist}(x_k, X(\bar{p})) \longrightarrow 0$. Предположим противное. Тогда для некоторой подпоследовательности (x_{k_j}) и некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\operatorname{dist}(x_{k_j}, X(\bar{p})) > \varepsilon$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Не нарушая общности, считаем, что $x_{k_j} \longrightarrow \bar{x}$ в X. Из-за непрерывности многозначного отображения $p \mapsto X(p)$ (см. условие (A1)) $\bar{x} \in X(\bar{p})$. Поэтому $\operatorname{dist}(x_{k_j}, X(\bar{p})) \le |x_{k_j} - \bar{x}|_X \longrightarrow 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Из леммы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть выполнены условия (A1)–(A3). Тогда верно следующее:

1) множество $E = \{(p, x) \in [p_0, \infty) \times X(p) : F(p, x) = b(p)\}$ – компакт в $\mathbb{R}^1 \times X$;

2) задача (1.1) имеет решение;

3) множество X_* – непустой компакт в X.

Цель настоящей работы – при некоторых дополнительных условиях указать конструктивный итерационный алгоритм решения задачи (1.1).

В дальнейшем следующее условие играет решающую роль:

(A4) для каждого $p \in [p_0, p_*]$ множество $F(p, X(p)) = \{F(p, x) : x \in X(p)\}$ выпукло.

Условие (A4) позволяет путем рандомизации аргумента (см. [8], [7]) сконструировать задачу с линеаризованным ограничением-равенством, в определенном смысле эквивалентную задаче (1.1). Приведем это построение (см. ниже теорему 1).

Пусть Σ – множество всех подмножеств пространства X. Под мерой Дирака, сосредоточенной в точке $x \in X$, как обычно (см., например, [9, разд. I. 4]), понимаем функцию $\delta_x : \Sigma \mapsto [0, 1]$ вида

$\delta_x(S) = 1$, если $x \in S$, и $\delta_x(S) = 1$, если $x \notin S$ ($S \in \Sigma$). Будем рассматривать вероятностные меры μ на Σ, являющиеся выпуклыми комбинациями мер Дирака:

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{x_i}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \quad x_1, \ldots, x_m \in X. \tag{2.1}$$

Через M обозначим множество всех мер μ на Σ вида (2.1). При всяком $p \geq p_0$ определим функцию $\mu \mapsto F(p, \mu) : M \mapsto Y$ по соотношению

$$F(p, \mu) = \int F(p, x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int F(p, x)\delta_{x_i}(dx) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F(p, x_i).$$

При этом $F(p, \delta_x) = F(p, x)$ ($p \geq p_0$, $x \in X$) и, таким образом, при отождествлении δ_x с x ($x \in X$), функция $F(\cdot, \cdot)$ распространяется с $[p_0, \infty) \times X$ на $[p_0, \infty) \times M$. Легко видеть, что при каждом $p \geq p_0$ функция $\mu \mapsto F(p, \mu)$ на M линейна в том смысле, что для любых $\mu_1, \mu_2 \in M$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ верно $F(p, \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) = \lambda F(p, \mu_1) + (1 - \lambda)F(p, \mu_2)$.

Для каждого $p \geq p_0$ введем множество $M(p) = \{\mu \in M : \mu(X(p)) = 1\}$ и рассмотрим следующую расширенную задачу оптимизации:

$$\begin{gathered} p \longrightarrow \min, \\ F(p, \mu) = b(p), \\ \mu \in M(p), \\ p \geq p_0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Каждый допустимый элемент (p, x) задачи (1.1) порождает допустимый элемент (p, δ_x) задачи (2.2). Поэтому множество допустимых элементов задачи (2.2) не пусто. Обозначим через $\hat{p}_*$ оптимальное значение задачи (2.2). Следующая теорема устанавливает связь между исходной задачей (1.1) и расширенной задачей (2.2).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A4). *Тогда верно следующее*:

1) $p_* = \hat{p}_*$,

2) *если* (p_*, x_*) *– решение задачи* (1.1), *то* (p_*, δ_{x_*}) *– решение задачи* (2.2).

Доказательство. Пусть (p_*, x_*) – решение задачи (1.1). Так как (p_*, δ_{x_*}) – допустимый элемент задачи (2.2), то $p_* \geq \hat{p}_*$. Покажем, что $p_* \leq \hat{p}_*$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и допустимый элемент (p, μ) задачи (2.2) такой, что $p - \hat{p}_* < \varepsilon$. Пусть μ_* имеет вид (2.1). Тогда имеет место равенство

$$b(p) = F(p, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F(p, \delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F(p, x_i) \in \mathrm{co}F(p, X(p));$$

здесь co – символ выпуклой оболочки. По условию (A4), $\mathrm{co}F(p, X(p)) = F(p, X(p))$. Значит, существует такое $\bar{x} \in X(p)$, что $b(p) = F(p, \bar{x})$. Поэтому $(p, \bar{x})$ – допустимый элемент задачи (1.1). Отсюда следует $p_* \leq p \leq \hat{p}_* + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $p_* \geq \hat{p}_*$. Значит, $p_* = \hat{p}_*$. Утверждение 1) доказано. Утверждение 2) очевидно.

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Используем равенство оптимальных значений p_* и $\hat{p}_*$ задач (1.1) и (2.2) (теорема 1) для построения итерационного алгоритма решения задачи (1.1) при некоторых дополнительных условиях.

Введем следующие условия:

(A5) многозначное отображение $p \mapsto X(p)$ монотонно возрастает на $[p_0, p_*]$, т.е. $X(p_1) \subset X(p_2)$ при любых $p_1 \in [p_0, p_*]$, $p_2 \in [p_1, p_*]$;

(A6) для каждого $p \in [p_0, p_*]$ множество $F(p, X(p))$ замкнуто в Y;

(A7) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $p_1 \in [p_0, p_*]$, $p_2 \in [p_1, p_*]$ таких, что $p_2 - p_1 < \delta$, и всякого $x \in X(p_1)$ выполняется неравенство $|F(p_1, x) - F(p_2, x)|_Y < \varepsilon$;

(A8) множество $\bigcup_{p \in [p_0, p_*]} F(p, X(p))$ ограничено в Y;

(A9) при всяком $l \in Y$ функция $p \mapsto c(l \mid F(p, X(p)))$ непрерывна на $[p_0, p_*]$.

Здесь и далее $c(\cdot \mid W)$ – опорный функционал непустого множества $W \subset Y$: $c(l \mid W) = \sup_{y \in W} \langle l, y \rangle$ $(l \in Y)$.

Для каждого $p \geq p_0$ и каждой меры $\mu \in M(p)$ введем обозначение

$$R(p, \mu) = \{x \in X(p) : F(p, x) = F(p, \mu)\}. \tag{3.1}$$

Заметим, что условие (A4) влечет следующее: $R(p, \mu) \neq \varnothing$ для всяких $p \in [p_0, p_*]$ и $\mu \in M(p)$.

Предлагаемый ниже итерационный алгоритм решения задачи (1.1) осуществляет пересчет тройки (p_k, μ_k, x_k), где (p_k, x_k) – текущее приближение решения задачи (1.1) и $\mu_k \in M$ – вспомогательный элемент, связанный с расширенной задачей (2.2).

Итак, рассмотрим следующий итерационный алгоритм. На нулевом шаге выбираются

$$\mu_0 \in M(p_0), \quad x_0 \in R(p_0, \mu_0). \tag{3.2}$$

Тройка (p_0, μ_0, x_0) принимается в качестве начального элемента последовательности. На шаге $k+1$ по элементу $(p_k, \mu_k, x_k) \in [p_0, \infty) \times M \times X$ задается элемент $(p_{k+1}, \mu_{k+1}, x_{k+1}) \in [p_0, \infty) \times M \times X$. Именно, находится решение (p_{k+1}, ν_{k+1}) следующей задачи минимизации:

$$\begin{gathered} p \longrightarrow \min, \\ p \geq p_k, \\ \langle F(p_k, \mu_k) - b(p_k), F(p, \nu) - b(p) \rangle_Y \leq 0, \\ \nu \in M(p); \end{gathered} \tag{3.3}$$

определяется

$$\tau_{k+1} = \arg \min_{\tau \in [0, 1]} |F(p_{k+1}, (1-\tau)\mu_k + \tau\nu_{k+1}) - b(p_{k+1})|_Y^2 \tag{3.4}$$

и полагается

$$\mu_{k+1} = (1 - \tau_{k+1})\mu_k + \tau_{k+1}\nu_{k+1}, \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} x_{k+1} \in R(p_{k+1}, \mu_{k+1}) \text{ при } R(p_{k+1}, \mu_{k+1}) \neq \varnothing, \\ x_{k+1} \in X(p_{k+1}) \text{ при } R(p_{k+1}, \mu_{k+1}) = \varnothing. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Заметим, что τ_{k+1} из (3.4) находится явно, а именно:

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} 0, & \tau^*_{k+1} < 0, \\ \tau^*_{k+1}, & \tau^*_{k+1} \in [0, 1], \\ 1, & \tau^*_{k+1} > 1, \end{cases} \quad \tau^*_{k+1} = \frac{\langle q_{k+1}, b(p_{k+1}) - F(p_{k+1}, \mu_k) \rangle_Y}{|q_{k+1}|_Y^2}, \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} q_{k+1} = F(p_{k+1}, \nu_{k+1}) - F(p_{k+1}, \mu_k) \neq 0, \\ \tau_{k+1} \in [0, 1] \quad (q_{k+1} = 0). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A6) *и* (A9). *Тогда последовательность* (p_k, μ_k, x_k) *определена условиями* (3.2)–(3.6) *корректно, т.е. при всяком* $k = 0, 1, \ldots$ *задача* (3.3) *имеет решение* (p_{k+1}, ν_{k+1}) *и элемент* τ_{k+1} *существует. Более того, при каждом* $k = 0, 1, \ldots$ *имеем*

$$p_0 \leq \ldots \leq p_k \leq \ldots \leq p_*, \tag{3.9}$$

$$\mu_k \in M(p_k), \quad x_k \in R(p_k, \mu_k). \tag{3.10}$$

Доказательство. Докажем лемму методом индукции. По следствию 1 и теореме 1, существует решение (p_*, μ_*) задачи (2.2). Так как при этом p_* – оптимальное значение задачи (1.1), то $p_0 \leq p_*$.

Поскольку элемент (p_*, μ_*) допустим в задаче (2.2), то $F(p_*, \mu_*) = b(p_*)$ и $\mu_* \in M(p_*)$. Поэтому

$$\langle l_0, F(p_*, \mu_*) - b(p_*)\rangle_Y = 0, \tag{3.11}$$

где $l_0 = F(p_0, \mu_0) - b(p_0)$. Значит, (p_*, μ_*) – допустимый элемент задачи (3.3) при $k = 0$. Покажем, что эта задача имеет решение. Из (3.11) следует, что

$$-c(-l_0 \mid F(p_*, X(p_*))) - \langle l_0, b(p_*)\rangle_Y \le 0. \tag{3.12}$$

Пусть

$$P_1 = \{p \in [p_0, p_*] : -c(-l_0 \mid F(p, X(p))) - \langle l_0, b(p)\rangle_Y \le 0\}. \tag{3.13}$$

Согласно (3.12), $p_* \in P_1$. По условиям (A9) и (A2), функции $p \mapsto c(-l_0 \mid F(p, X(p)))$ и $p \mapsto b(p)$ непрерывны на $[p_0, p_*]$. Поэтому множество P_1 замкнуто и, значит, $p_1 = \inf P_1 \in P_1$. Покажем, что при некотором $\nu_1 \in M(p_1)$ пара (p_1, ν_1) решает задачу (3.3) для $k = 0$. По условию (A6), множество $F(p_1, X(p_1))$ замкнуто в Y. По условиям (A4) и (A7), оно выпукло и ограниченно. Поэтому $F(p_1, X(p_1))$ – слабый компакт в Y (см., например, [10, теорема 6, с. 107]). Значит, существует $y_1 \in F(p_1, X(p_1))$ такой, что

$$\langle -l_0, y_1\rangle_Y = \sup_{y \in F(p_1, X(p_1))} \langle -l_0, y\rangle_Y = c(-l_0 \mid F(p_1, X(p_1))).$$

Пусть $v_1 \in X(p_1)$ таков, что $F(p_1, v_1) = y_1$ и $\nu_1 = \delta_{v_1}$. Имеем

$$\langle l_0, F(p_1, \nu_1) - b(p_1)\rangle_Y = \langle l_0, F(p_1, \nu_1)\rangle_Y - \langle l_0, b(p_1)\rangle_Y = -\langle -l_0, F(p_1, \nu_1)\rangle_Y - \langle l_0, b(p_1)\rangle_Y =$$
$$= -\langle -l_0, y_1\rangle_Y - \langle l_0, b(p_1)\rangle_Y = -c(-l_0 \mid F(p_1, X(p_1))) - \langle l_0, b(p_1)\rangle_Y \le 0.$$

Последнее неравенство следует из того, что $p_1 \in P_1$, и из определения P_1. Мы получили, что (p_1, ν_1) – допустимый элемент задачи (3.3) при $k = 0$. Проверим, что (p_1, ν_1) решает эту задачу. Для этого достаточно установить, что для произвольных $p \in [p_0, p_1)$ и $\nu \in M(p)$ равенство $F(p, \nu) = b(p)$ невозможно. Предположим противное: существуют $p \in [p_0, p_1)$ и $\nu \in M(p)$ такие, что $F(p, \nu) = b(p)$. Последнее равенство вместе с условием (A4) означает, что $b(p) \in F(p, X(p))$, откуда $c(-l_0 \mid F(p, X(p))) \ge \langle -l_0, b(p)\rangle_Y$ или $-c(-l_0 \mid F(p, X(p))) - \langle l_0, b(p)\rangle_Y \le 0$. Таким образом, $p \in P_1$, что невозможно, так как, по предположению, $p < p_1 = \inf P_1$. Итак, (p_1, ν_1) – решение задачи (3.3) при $k = 0$. Поскольку $P_1 \subset [p_0, p_*]$ (см. (3.13)), то $p_0 \le p_1 \le p_*$. Так как $\mu_0 \in M(p_0)$ и $\nu_1 \in M(p_1)$, то по условию (A5), $X(p_0) \subset X(p_1)$, имеем $\mu_1 \in M(p_1)$. Наконец, так как $p_1 \in [p_0, p_*]$, то, по условию (A4), $R(p_1, \mu_1) \ne \varnothing$, а значит, по (3.6), где $k = 0$, имеем $x_1 \in R(p_1, \mu_1)$. База индукции обоснована. Шаг индукции доказывается аналогично.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A9) *и последовательность* (p_k, μ_k, x_k) *задана алгоритмом* (3.2)–(3.6). *Тогда* $p_k \longrightarrow p_*$ *и* $\operatorname{dist}(x_k, X_*) \longrightarrow 0$.

Для доказательства этой теоремы понадобятся две леммы. Доказательство следующей леммы можно найти в [1] и [7].

Лемма 3. *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta_k \ge 0$, $\gamma_k \ge 0$, $\gamma_{k+1} \le (1 - \alpha\gamma_k)\gamma_k + \beta_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *и* $\beta_k \longrightarrow 0$. *Тогда* $\gamma_k \longrightarrow 0$.

Основную роль играет следующая

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда справедливы утверждения*

$$p_k \longrightarrow \bar{p} \in [p_0, p_*], \tag{3.14}$$

$$\lim_{k \to \infty} |F(p_k, \mu_k) - b(p_k)|_Y = 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. Из (3.9) следует (3.14). Докажем (3.15). Введем следующие обозначения:

$$H(p, \mu) = F(p, \mu) - b(p), \quad \mu_k(\tau) = \mu_k + \tau(\nu_{k+1} - \mu_k). \tag{3.16}$$

Для каждого натурального k и каждого $\tau \in [0, 1]$ имеем

$$|H(p_{k+1}, \mu_k(\tau))|_Y^2 = |H(p_{k+1}, \mu_k + \tau(\nu_{k+1} - \mu_k))|_Y^2 = |(1 - \tau)H(p_{k+1}, \mu_k) + \tau H(p_{k+1}, \nu_{k+1})|_Y^2 \le$$
$$\le (1 - 2\tau)|H(p_{k+1}, \mu_k)|_Y^2 + 2\tau(1 - \tau)\langle H(p_{k+1}, \mu_k), H(p_{k+1}, \nu_{k+1})\rangle_Y + \tag{3.17}$$
$$+ \tau^2\{|H(p_{k+1}, \mu_k)|_Y^2 + |H(p_{k+1}, \nu_{k+1})|_Y^2\}.$$

Так как $\mu_k \in M(p_k)$ и $\nu_{k+1} \in M(p_{k+1})$, то, по условию (A4), $F(p_k, \mu_k) \in F(p_k, X(p_k))$ и $F(p_{k+1}, \nu_{k+1}) \in \in F(p_{k+1}, X(p_{k+1}))$. Поскольку, по лемме 2, $p_k, p_{k+1} \in [p_0, p_*]$, то

$$F(p_k, \mu_k), F(p_{k+1}, \nu_{k+1}) \in E = \bigcup_{p \in [p_0, p_*]} F(p, X(p)).$$

По условию (A8), множество E ограничено в Y. Отсюда и из непрерывности функции $b(\cdot)$ (условие (A2)) заключаем, что

$$|H(p_k, \mu_k)|_Y \le L, \quad |H(p_{k+1}, \nu_{k+1})|_Y \le L, \tag{3.18}$$

где $L \ge 0$ таково, что $L \ge |y|_Y + |b(p)|_Y$ для всех $y \in E$ и $p \in [p_0, p_*]$. Используя эти оценки в правой части (3.17), заменяя (p_{k+1}, μ_k) на (p_k, μ_k) и добавляя появляющуюся разность, продолжим (3.17) следующим образом:

$$|H(p_{k+1}, \mu_k(\tau))|_Y^2 \le (1 - 2\tau)|H(p_k, \mu_k)|_Y^2 + \alpha_k(\tau) + \beta_k(\tau) + 2L^2\tau^2;$$

здесь

$$\begin{aligned} \alpha_k(\tau) &= 2\tau(1-\tau)\langle H(p_k, \mu_k), H(p_{k+1}, \nu_{k+1})\rangle_Y, \\ \beta_k(\tau) &= (1-2\tau)(|H(p_{k+1}, \mu_k)|_Y^2 - |H(p_k, \mu_k)|_Y^2) + \\ &+ 2\tau(1-\tau)\langle H(p_{k+1}, \mu_k) - H(p_k, \mu_k), H(p_{k+1}, \nu_{k+1})\rangle_Y \le \beta_k, \\ \beta_k &= (|H(p_{k+1}, \mu_k)|_Y^2 - |H(p_k, \mu_k)|_Y^2) + 2\langle H(p_{k+1}, \mu_k) - H(p_{k+1}, \mu_k), H(p_{k+1}, \nu_{k+1})\rangle_Y. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Так как (p_{k+1}, ν_{k+1}) – допустимый элемент задачи (3.3), то $\alpha_k(\tau) \le 0$. Значит,

$$|H(p_{k+1}, \mu_k(\tau))|_Y^2 \le (1 - 2\tau)|H(p_k, \mu_k)|_Y^2 + \beta_k + 2L^2\tau^2.$$

Так как, по (3.4), $\tau_{k+1} = \arg\min_{\tau \in [0,1]} |H(p_{k+1}, \mu_k(\tau))|_Y^2$, то

$$|H(p_{k+1}, \mu_{k+1})|_Y^2 = |H(p_{k+1}, \mu_k(\tau_{k+1}))|_Y^2 \le \min_{\tau \in [0,1]} \{(1 - 2\tau)|H(p_k, \mu_k)|_Y^2 + \beta_k + 2L^2\tau^2\}.$$

Минимум квадратичной функции переменной τ, стоящей в правой части неравенства, достигается в точке $\tau_{k+1} = |H(p_k, \nu_k)|_Y^2/(2L^2)$, при этом

$$\min_{\tau \in [0,1]} \{(1 - 2\tau)|H(p_k, \mu_k)|_Y^2 + \beta_k + 2L^2\tau^2\} = \left(1 - \frac{|H(p_k, \mu_k)|_Y^2}{2L^2}\right)|H(p_k, \mu_k)|_Y^2 + \beta_k.$$

В итоге

$$|H(p_{k+1}, \mu_{k+1})|_Y^2 \le \left(1 - \frac{|H(p_k, \mu_k)|_Y^2}{2L^2}\right)|H(p_k, \mu_k)|_Y^2 + \beta_k. \tag{3.20}$$

Покажем, что $\beta_k \longrightarrow 0$. Как следует из вида β_k (см. (3.19)), обозначений (3.16) и оценок (3.18), для этого достаточно проверить, что

$$|F(p_{k+1}, \mu_k) - F(p_k, \mu_k)|_Y \longrightarrow 0, \tag{3.21}$$

$$|b(p_{k+1}) - b(p_k)|_Y \longrightarrow 0. \tag{3.22}$$

Сходимость (3.22) следует из непрерывности функции $b(\cdot)$ и сходимости $p_k \longrightarrow \bar{p}$ (см. (3.14)). Покажем, что верно (3.21). Так как, по лемме 2, $\mu_k \in M(p_k)$, то

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i^{(k)} \delta_{x_i^{(k)}}, \text{ где } \alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_{m_k}^{(k)} \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i^{(k)} = 1, \quad x_1^{(k)}, \ldots, x_{m_k}^{(k)} \in X(p_k).$$

Тогда

$$|F(p_{k+1}, \mu_k) - F(p_k, \mu_k)|_Y = \left| \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i^{(k)} F(p_{k+1}, x_i^{(k)}) - \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i^{(k)} F(p_k, x_i^{(k)}) \right|_Y \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i^{(k)} |F(p_{k+1}, x_i^{(k)}) - F(p_k, x_i^{(k)})|_Y.$$

Из-за сходимости $p_k \longrightarrow \bar{p}$ и ввиду условия (A7) имеем

$$\max_{i=1,2,\ldots,m_k} |F(p_{k+1}, x_i^{(k)}) - F(p_k, x_i^{(k)})|_Y \longrightarrow 0,$$

отсюда получаем сходимость (3.21). Мы показали, что $\beta_k \longrightarrow 0$. Теперь положим $|H(p_k, \mu_k)|_Y^2 = \gamma_k$ и перепишем (3.20) в виде

$$\gamma_{k+1} \le \left(1 - \frac{\gamma_k}{2L^2}\right)\gamma_k + \beta_k. \tag{3.23}$$

Согласно лемме 4, $\gamma_k \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. По лемме 4, имеем (3.14) и (3.15); при этом, по (3.9), $p_k \le \bar{p} \le p_*$ ($k = 0, 1, \ldots$). По лемме 2, $\mu_k \in M(p_k)$ и $x_k \in R(p_k, \mu_k)$, т.е. (см. (3.6)) $x_k \in X(p_k)$ и $F(p_k, \mu_k) = F(p_k, x_k)$. Из (3.15) следует, что

$$|F(p_k, x_k) - b(p_k)|_Y^2 \longrightarrow 0. \tag{3.24}$$

Таким образом, последовательность (p_k, x_k) удовлетворяет условиям леммы 1. Согласно этой лемме, последовательность (x_k) компактна в X и

$$\operatorname{dist}(x_k, X(\bar{p})) \longrightarrow 0. \tag{3.25}$$

Пусть $\bar{x}$ – произвольная предельная точка последовательности (x_k), т.е. предел в X некоторой подпоследовательности (x_{k_j}). Из (3.25) и замкнутости $X(\bar{p})$, вытекающей из условия (A1), следует, что $\bar{x} \in X(\bar{p})$. Из (3.24), условия (A1) и непрерывности функций $F(\cdot, \cdot)$ и $b(\cdot)$ (см. условие (A2)) вытекает, что $F(\bar{p}, \bar{x}) = b(\bar{p})$. Таким образом, $\bar{x}$ – допустимый элемент задачи (1.1). Значит, $\bar{p} \ge p_*$. Поскольку выше отмечено, что $\bar{p} \le p_*$, то $\bar{p} = p_*$. Следовательно, $(p_*, \bar{x})$ – решение задачи (1.1). Поскольку $\bar{x}$ – произвольная предельная точка последовательности (x_k), то $\operatorname{dist}(x_k, X_*) \longrightarrow 0$. Теорема доказана.

4. КОНКРЕТИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Приведем реализацию алгоритма (3.2)–(3.6), в которой задача (3.3) имеет упрощенную форму, а именно сводится к задаче скалярной оптимизации с последующим вычислением экстремального элемента в пространстве X. Рассмотрим следующий итерационный алгоритм, осуществляющий пересчет элементов $(p_k, \mu_k, x_k) \in [p_0, \infty) \times M \times X$. На нулевом шаге выбираются значения

$$x_0 \in X(p_0), \quad \mu_0 = \delta_{x_0}. \tag{4.1}$$

Тройка (p_0, μ_0, x_0) выбирается в качестве начального элемента последовательности. На шаге $k+1$ по элементу $(p_k, \mu_k, x_k) \in [p_0, \infty) \times M \times X$ задается элемент $(p_{k+1}, \mu_{k+1}, x_{k+1}) \in [p_0, \infty) \times M \times X$. Именно, полагается

$$l_k = b(p_k) - F(p_k, \mu_k), \tag{4.2}$$

$$\varphi_k(p) = c(l_k \mid F(p, X(p))) - \langle l_k, b(p) \rangle_Y, \quad p \ge p_k, \tag{4.3}$$

и находятся число

$$p_{k+1} = \min\{p \geq p_k : \varphi_k(p) \geq 0\} \tag{4.4}$$

и элемент

$$v_{k+1} \in X(p_{k+1}) \tag{4.5}$$

такой, что

$$\langle l_k, F(p_{k+1}, v_{k+1})\rangle_Y = c(l_k \mid F(p_{k+1}, X(p_{k+1}))). \tag{4.6}$$

Полагается

$$\nu_{k+1} = \delta_{v_{k+1}}. \tag{4.7}$$

Значение τ_{k+1} задается по (3.7), (3.8), и вычисляются значения

$$\mu_{k+1} = (1-\tau_{k+1})\mu_k + \tau_{k+1}\nu_{k+1}, \tag{4.8}$$

$$\begin{gathered} x_{k+1} \in R(p_{k+1}, \mu_{k+1}) \text{ при } R(p_{k+1}, \mu_{k+1}) \neq \varnothing, \\ x_{k+1} \in X(p_{k+1}) \text{ при } R(p_{k+1}, \mu_{k+1}) \neq \varnothing. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Заметим, что при этом

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} \delta_{v_i},$$

где

$$v_0 = x_0, \quad \alpha_0^{(0)} = 1, \tag{4.10}$$

$$\alpha_i^{(k+1)} = (1-\tau_{k+1})\alpha_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad \alpha_{k+1}^{(k+1)} = \tau_{k+1}. \tag{4.11}$$

Поэтому алгоритм (4.1)–(4.11) можно записать в следующей эквивалентной форме. На нулевом шаге полагается

$$\alpha_0^{(0)} = 1, \quad x_0 \in X(p_0), \quad v_0 = x_0 \tag{4.12}$$

и набор $(p_0, \alpha_0^{(0)}, v_0, x_0)$ выбирается в качестве начального элемента последовательности. На шаге $k+1$ по набору $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_0, \ldots, v_k, x_k)$, где

$$p_k \geq p_0, \quad \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)} \in [0, 1], \quad v_0, \ldots, v_k, \quad x_k \in X,$$

находится набор $(p_{k+1}, \alpha_0^{(k+1)}, \ldots, \alpha_{k+1}^{(k+1)}, v_0, \ldots, v_{k+1}, x_{k+1})$, где

$$p_{k+1} \geq p_0, \quad \alpha_0^{(k+1)}, \ldots, \alpha_{k+1}^{(k+1)} \in [0, 1], \quad v_0, \ldots, v_{k+1}, x_{k+1} \in X.$$

Именно, полагается

$$l_k = b(p_k) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(k)} F(p_k, v_i), \tag{4.13}$$

$$\varphi_k(p) = c(l_k \mid F(p, X(p))) - \langle l_k, b(p)\rangle_Y, \quad p \geq p_k, \tag{4.14}$$

и находятся число

$$p_{k+1} = \min\{p \geq p_k : \varphi_k(p) \geq 0\} \tag{4.15}$$

и элемент

$$v_{k+1} \in X(p_{k+1}) \tag{4.16}$$

такой, что

$$\langle l_k, F(p_{k+1}, v_{k+1})\rangle_Y = c(l_k \mid F(p_{k+1}, X(p_{k+1}))). \tag{4.17}$$

Значение τ_{k+1} определяется из соотношений

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} 0, & \tau^*_{k+1} < 0, \\ \tau^*_{k+1}, & \tau^*_{k+1} \in [0, 1], \\ 1, & \tau^*_{k+1} > 1, \end{cases} \quad \tau^*_{k+1} = \frac{\langle q_{k+1}, b(p_{k+1}) - F(p_{k+1}, \mu_k)\rangle_Y}{|q_{k+1}|^2_Y}, \tag{4.18}$$

$$q_{k+1} = F(p_{k+1}, v_{k+1}) - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} F(p_{k+1}, v_i) \neq 0,$$

$$\tau_{k+1} \in [0, 1], \quad q_{k+1} = 0. \tag{4.19}$$

Полагается

$$\alpha_i^{(k+1)} = (1 - \tau_{k+1})\alpha_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad \alpha_{k+1}^{(k+1)} = \tau_{k+1}. \tag{4.20}$$

Элемент x_{k+1} находится из соотношений

$$\begin{gathered} x_{k+1} \in F^{-1}(p_{k+1}, w_{k+1}) \text{ при } F^{-1}(p_{k+1}, w_{k+1}) \neq \varnothing, \\ x_{k+1} \in X(p_{k+1}) \text{ при } F^{-1}(p_{k+1}, w_{k+1}) = \varnothing, \end{gathered} \tag{4.21}$$

где

$$w_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^{(k)} F(p_{k+1}, v_i), \tag{4.22}$$

$$F^{-1}(p, w) = \{x \in X(p) : F(p, x) = w\}. \tag{4.23}$$

Замечание 1. Основная операция на шаге $k + 1$ указанного алгоритма сводится к решению одномерной задачи минимизации (4.15) и последующему нахождению экстремального элемента (4.16), (4.17). Операция (4.21), (4.22) по нахождению приближения x_{k+1}-компоненты решения (из множества X_*) может быть достаточно трудоемка. Ее можно опустить, если нас интересует приближение лишь оптимального значения p_* задачи (1.1).

Покажем, что алгоритм (4.12)–(4.23) есть реализация алгоритма (3.2)–(3.6), который будем далее называть основным.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A9). *Тогда последовательность* $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_0, \ldots, v_k, x_k)$ *определена условиями* (4.12)–(4.23) *корректно и при этом последовательность* (p_k, μ_k, x_k), *определяемая по* (4.1)–(4.11), *подчиняется условиям* (3.2)–(3.6) *основного алгоритма и для всех* $k = 0, 1, \ldots$ *выполняется* (см. (4.21)) $F(p_{k+1}, x_{k+1}) = w_{k+1}$, *где* w_{k+1} *задано по* (4.22).

Доказательство. Применим метод индукции. Соотношения (4.1) нулевого шага совпадают с соотношениями (3.2) нулевого шага основного алгоритма, где $\mu_0 = \delta_{x_0}$. Рассмотрим первый шаг алгоритма (4.1)–(4.11), задаваемый соотношениями (4.2)–(4.11) при $k = 0$. Из того, что всякое решение (p_*, x_*) задачи (1.1) есть ее допустимый элемент, следует, что $\varphi_0(p) \geq 0$. Таким образом, множество

$$P_1 = \{p \geq p_0 : \varphi_0(p) \geq 0\} \tag{4.24}$$

непусто. Функция $\varphi_0(\cdot)$ из (4.3) на $[p_0, p_*]$ непрерывна по условиям (A2) и (A9). Поэтому минимальный элемент p_1 (см. (3.13)) этого множества существует, причем $p_1 \in [p_0, p_*]$ и $\varphi_0(p_1) \geq 0$. Из условий (A4), (A6) и (A8) следует, что множество $F(p_1, X(p_1))$ замкнуто, выпукло и ограниченно. Значит, $F(p_1, X(p_1))$ – слабый компакт в Y. Отсюда следует существование элемента $v_1 \in X(p_1)$,

реализующего равенство (4.6) при $k = 0$. Пусть $\nu_1 = \delta_{v_1}$. Покажем, что пара (p_1, ν_1) решает задачу (3.3) основного алгоритма при $k = 0$. Поскольку $p_1 \geq p_0$, $\nu_1 \in M(p_1)$ и

$$\langle F(p_0, \mu_0) - b(p_0), F(p_1, \nu_1) - b(p_1)\rangle_Y = -\langle l_0, F(p_1, v_1) - b(p_1)\rangle_Y =$$
$$= -c(l_0 \mid F(p_1, X(p_1))) + \langle l_0, b(p_1)\rangle_Y = \varphi_0(p_1) \leq 0,$$

то (p_1, ν_1) – допустимый элемент задачи (1.1) с $k = 0$. Если $p_1 = p_0$, то (p_1, ν_1) – решение этой задачи. Допустим, что $p_1 > p_0$. Чтобы показать, что (p_1, ν_1) – решение задачи (3.3) при $k = 0$, достаточно установить, что для любого $p_1 \in [p_0, p_*)$ не существует меры $\nu \in M(p)$ такой, что

$$\langle F(p_0, \mu_0) - b(p_0), F(p, \nu) - b(p)\rangle_Y \leq 0,$$

или, что то же,

$$\langle F(p, \nu) - b(p)\rangle_Y \geq 0. \tag{4.25}$$

Предположим противное: для некоторого $p_1 \in [p_0, p_*)$ существует мера $\nu \in M(p)$ такая, что выполняется (4.25). Вследствие условия (A4) имеем $F(p, \nu) \in \mathrm{co}F(p, X(p)) = F(p, X(p))$, откуда

$$\langle F(p, \nu)\rangle_Y \leq c(\mid F(p, X(p))).$$

Поэтому

$$\langle F(p, \nu) - b(p)\rangle_Y \leq c(\mid F(p, X(p))) - \langle b(p)\rangle_Y = \varphi_0(p) < 0;$$

последнее неравенство следует из предположения $p < p_1 = \min P_1$ (см. (3.13)). Таким образом, (4.25) невозможно. Противоречие доказывает, что (p_1, ν_1) – решение задачи (3.3) при $k = 0$. Итак, операции (4.15)–(4.17) первого шага рассматриваемого алгоритма дают решение (p_1, ν_1) задачи (3.3) первого шага основного алгоритма (3.2)–(3.6). Операции (4.18), (4.19) по подсчету τ_1 при $k = 0$, очевидно, реализуют операции (3.4) (либо (3.7), (3.8)) основного алгоритма. Вычисление меры μ_1 в виде $\mu_1 = (1 - \tau_1)\mu_0 + \delta_{v_1}$, где v_1 определяется из (4.16), (4.17) (при $k = 0$), дает меру (1.1) (при $k = 0$) из основного алгоритма. Операция (4.20)–(4.23) (при $k = 0$) по вычислению элемента x_1 дает элемент (3.6) (с $k = 0$) из основного алгоритма. Таким образом, тройка (p_1, μ_1, x_1), полученная на первом шаге алгоритма (4.1)–(4.11), существует и совпадает с тройкой, построенной на первом шаге основного алгоритма (3.2)–(3.6). Наконец, согласно лемме 2 (см. (3.10)), верно $x_1 \in R(p_1, \mu_1)$, что равносильно равенству $F(p_1, x_1) = w_1$, где $w_1 = (1 - \tau_1)\delta_{v_0} + \tau_1\delta_{v_1}$. База индукции доказана. Шаг индукции доказывается аналогично.

Лемма 5 и теорема 2 о сходимости основного алгоритма сразу влекут сходимость алгоритма (4.12)–(4.23).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A9) *и последовательность* $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_0, \ldots, v_k, x_k)$ *задана алгоритмом* (4.12)–(4.23). *Тогда* $p_k \longrightarrow p_*$ *и* $\mathrm{dist}(x_k, X_*) \longrightarrow 0$.

5. СЛУЧАЙ ОПЕРАТОРА, НЕ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА

Основной алгоритм (3.2)–(3.6) (или эквивалентный ему алгоритм (4.13)–(4.23)) решения задачи (1.1) требует, вообще говоря, бесконечного расширения текущей памяти. Покажем, что в случае независимости от параметра p значений $F(p, x)$ оператора уравнения $F(p, x) = b(p)$, входящего в задачу (1.1), алгоритм (4.13)–(4.23) можно модифицировать так, что вычисления потребуют постоянного объема памяти.

Итак, в этом разделе принимаем следующее условие: при всяком $x \in X$ функция $p \mapsto F(p, x)$ постоянна; при этом договоримся писать $F(x)$ вместо $F(p, x)$ и задачу (1.1) представим в виде

$$\begin{gathered} p \longrightarrow \min, \\ F(x) = b(p), \\ x \in X(p), \\ p \geq p_0. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Рассмотрим последовательность $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_0, \ldots, v_k, x_k)$, заданную алгоритмом (4.12)–(4.23) (см. теорему 3). Введем сопутствующую агрегированную переменную

$$w_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} F(v_i). \tag{5.2}$$

Легко видеть, что компоненты (p_k, x_k) рассматриваемой последовательности генерируются следующим итерационным алгоритмом, в котором элементом, обновляемым на каждом шаге, выступает тройка (p_k, w_k, x_k).

На нулевом шаге алгоритма задаются значения

$$x_0 \in X(p_0), \quad w_0 = F(x_0) \tag{5.3}$$

и набор (p_0, w_0, x_0) выбирается в качестве начального элемента последовательности. На шаге $k+1$ по набору $(p_k, w_k, x_k) \in [p_0, \infty) \times Y \times X$ задается набор $(p_{k+1}, w_{k+1}, x_{k+1}) \in [p_0, \infty) \times Y \times X$. Именно, полагается (см. (4.2), (4.4))

$$l_k = b(p_k) - w_k, \tag{5.4}$$

$$\varphi_k(p) = c(l_k \mid F(X(p))) - \langle l_k, b(p) \rangle_Y, \quad p \geq p_k, \tag{5.5}$$

и находятся число

$$p_{k+1} = \min\{p \geq p_k : \varphi_k(p) \geq 0\} \tag{5.6}$$

и элемент

$$v_{k+1} \in X(p_{k+1}) \tag{5.7}$$

такой, что

$$\langle l_k, F(v_{k+1}) \rangle_Y = c(l_k \mid F(X(p_{k+1}))). \tag{5.8}$$

Значение τ_{k+1} определяется по формулам

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} 0, & \tau_{k+1}^* < 0, \\ \tau_{k+1}^*, & \tau_{k+1}^* \in [0, 1], \\ 1, & \tau_{k+1}^* > 1, \end{cases} \quad \tau_{k+1}^* = \frac{\langle q_{k+1}, b(p_{k+1}) - w_k \rangle_Y}{|q_{k+1}|_Y^2}, \tag{5.9}$$

$$q_{k+1} = F(v_{k+1}) - w_k \neq 0,$$

$$\tau_{k+1} \in [0, 1] \quad (q_{k+1} = 0). \tag{5.10}$$

Полагается

$$w_{k+1} = (1 - \tau_{k+1}) w_k + \tau_{k+1} F(v_{k+1}), \tag{5.11}$$

и элемент x_{k+1} (см. конкретизацию условия (4.21)–(4.23) в лемме 5) находится из

$$F(p_{k+1}, x_{k+1}) = w_{k+1}. \tag{5.12}$$

Таким образом, имеет место следующая

Лемма 6. *Пусть $F(p, x) = F(x)$ $(p \geq p_0, x \in X)$, выполнены условия* (A1)–(A9) *и последовательность (p_k, w_k, x_k) задана алгоритмом* (5.3)–(5.12). *Тогда последовательность $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_0, \ldots, v_k, x_k)$, где $\alpha_0^{(k)}$, v_k $(k = 0, 1, \ldots)$ определяются из* (4.12), (4.20)–(4.23), *задается алгоритмом* (4.12)–(4.23).

Теорема 3 и лемма 6 влекут сходимость алгоритма (5.3)–(5.12).

Теорема 4. *Пусть $F(p, x) = F(x)$ $(p \geq p_0, x \in X)$, выполнены условия* (A1)–(A9) *и последовательность (p_k, w_k, x_k) задана алгоритмом* (5.3)–(5.12). *Тогда $p_k \longrightarrow p_*$ и $\operatorname{dist}(x_k, X_*) \longrightarrow 0$.*

6. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ (БИЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА)

Применим описанный выше алгоритм к одному классу задач оптимального управления (см. [11]). Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{z}^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t)z^{(j)}(t) + b_{ij}(t)u^{(j)}(t)z^{(j)}(t)], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.1}$$

функционирующую на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$. Здесь $z(t) = (z^{(1)}(t), \ldots, z^{(n)}(t)) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $u(t) = (u^{(1)}(t), \ldots, u^{(n)}(t)) \in U \subset \mathbb{R}^n$ – управляющий вектор, при этом

$$U = \prod_{i=1}^{n} [u_-^{(i)}, u_+^{(i)}], \tag{6.2}$$

где $u_-^{(i)} \le u_+^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Здесь $t \mapsto a_{ij}(t)$ и $t \mapsto b_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ – измеримые ограниченные скалярные функции на $[0, T]$. Полагаем

$$z(0) = \bar{z}, \tag{6.3}$$

где z – фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$. Принимая обозначения

$$f^{(i)}(t, z, u) = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t)z^{(j)} + b_{ij}(t)u^{(j)}z^{(j)}], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.4}$$

$$f(t, z, u) = (f^{(1)}(t, z, u), \ldots, f^{(n)}(t, z, u)), \tag{6.5}$$

записываем (6.1) в виде

$$\dot{z}(t) = f(t, z(t), u(t)). \tag{6.6}$$

Введем фазовое ограничение

$$z(t) \in Z(p, t), \quad t \in [0, T], \tag{6.7}$$

зависящее от скалярного параметра $p \ge p_0$, где p_0 – фиксированное действительное число. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: найти наименьшее значение параметра $p \ge p_0$, при котором существует траектория $z(\cdot)$ системы (6.6), (6.3), удовлетворяющая фазовому ограничению (6.7); требуется также указать данную траекторию.

Уточним постановку задачи. Под управлением будем понимать, как обычно, всякую измеримую ограниченную функцию $u(\cdot) : [0, T] \mapsto U$. Траектория системы (6.1) под действием управления $u(\cdot)$ понимается как определенное на $[0, T]$ решение $z(\cdot) : t \mapsto z(t)$ (по Каратеодори) уравнения (6.6) с начальным условием (6.3). Пара $x(\cdot) = (z(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ – управление и $z(\cdot)$ – траектория под действием $u(\cdot)$, называется управляемым процессом. Скажем, что управляемый процесс $x(\cdot) = (z(\cdot), u(\cdot))$ допустим при параметре $p \ge p_0$, если для всех $t \in [0, T]$ выполняется условие $z(t) \in Z(p, t)$.

Через $D(p)$, где $p \ge p_0$, будем обозначать множество всех управляемых процессов, допустимых при параметре p. Рассматриваемая задача оптимального управления есть задача

$$\begin{gathered} p \longrightarrow \min, \\ (z(\cdot), u(\cdot)) \in D(p). \end{gathered} \tag{6.8}$$

Будем рассматривать ее при следующих условиях:

(B1) $Z(p, t)$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное подмножество положительного ортанта $\mathbb{R}^n_+ = \{z = (z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}) : z^{(i)} > 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$ для всяких $p \ge p_0$ и $t \ge [0, T]$);

(B2) многозначная функция $(p, t) \mapsto Z(p, t)$ непрерывна, т.е. если $z_k \in Z(p_k, t_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $z_k \longrightarrow \bar{z}$ и $p_k \longrightarrow \bar{p}$, $t_k \longrightarrow \bar{t}$ то $\bar{z} \in Z(\bar{p}, \bar{t})$;

(B3) для любого $t \in [0, T]$ многозначная функция $p \mapsto Z(p, t)$ монотонно возрастает, т.е. $Z(p_1, t) \subset Z(p_2, t)$ при любых $p_1 \ge p_0$, $p_2 \ge p_1$.

Будем считать, что для задачи (6.8) существует допустимый элемент, т.е. параметр $p \geq p_0$ и управляемый процесс $(z(\cdot), u(\cdot)) \in D(p)$. Обозначим оптимальное значение задачи (6.8) через p_* и введем следующее условие:

(B4) множество $\bigcup_{(p,t) \in [p_0, p_*] \times [0,T]} Z(p,t)$ ограниченно.

Всякий управляемый процесс $x = (z(\cdot), x(\cdot))$, допустимый при параметре p_*, будем называть оптимальным.

Сведем задачу (6.8) оптимального управления к задаче вида (5.1). За Y примем пространство $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$, за X – банахово пространство $Y \times Y_w$, где Y_w – пространство $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$, оснащенное слабой нормой (см., например, [9]). Функцию $F(\cdot) : X \mapsto Y$ зададим следующим образом:

$$F(x)(t) = z(t) - \int_0^t f(\tau, z(\tau), u(\tau))d\tau \quad (t \in [0,T], \quad x = (z(\cdot), u(\cdot)) \in X). \tag{6.9}$$

Для $p \geq p_0$ положим

$$b(p)(t) = \bar{z}, \quad t \in [0,T], \tag{6.10}$$

$$X(p) = \{(x = (z(\cdot), u(\cdot))) \in X : z(t) \in Z(p,t), u(t) \in U, t \in [0,T]\}. \tag{6.11}$$

Далее будем рассматривать задачу (5.1) для описанных выше данных. Заметим, что $x = (z(\cdot), u(\cdot)) \in X$ почти всюду совпадает с допустимым управляемым процессом при параметре $p \geq p_0$ тогда и только тогда, когда $F(x) = b$ и $x \in X(p)$. Это замечание ведет к следующей связи задач (6.8) и (5.1).

Теорема 5. *Задачи* (6.8) *и* (5.1) *эквивалентны в следующем смысле*:

(i) *оптимальные значения задач* (6.8) *и* (5.1) *совпадают*;

(ii) *пара* $(p_*, x) \in [p_0, \infty) \times X$, $x = (z(\cdot), u(\cdot))$, *решает задачу* (5.1) *тогда и только тогда, когда найдется оптимальный управляемый процесс* $(z_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *такой, что* $(z(t), u(t)) = (z_*(t), u_*(t))$ *при почти всех* $t \in [0,T]$.

Будем использовать следующее представление опорного функционала множества $F(X(p))$, $p \geq p_0$ (далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$):

$$h(t,l,q,z,u) = \langle l, z \rangle - \langle q, f(t,z,u) \rangle, \quad t \in [0,T], \quad l,q,z,u \in \mathbb{R}^n, \tag{6.12}$$

$$h_*(p,t,l,q) = \max_{(z,u) \in Z(p,t) \times U} h(t,l,q,z,u), \quad t \in [0,T], \quad l,q \in \mathbb{R}^n. \tag{6.13}$$

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* (B1) *и* (B2). *Тогда при всяких* $l \in Y$ *и* $p \geq p_0$ *выполняется следующее*:

1) *верно равенство*

$$c(l \mid F(X(p))) = \int_0^T h_*(p,t,l(t),r(t))dt, \tag{6.14}$$

где

$$r(t) = \int_t^T l(\tau)d\tau;$$

2) *существуют измеримая функция* $v^z(\cdot) : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ *и управление* $v^u(\cdot)$ *такие, что* $v^z(t) \in Z(p,t)$ $(t \in [0,T])$ *и*

$$h(t,l(t),r(t),v^z(t),v^u(t)) = h_*(p,t,l(t),r(t)),$$

при этом $v = (v^z(\cdot), v^u(\cdot)) \in X(p)$ *и* $\langle l, F(v) \rangle_Y = c(l \mid F(X(p)))$.

Доказательство. Пусть $l \in Y$ и $p \geq p_0$. Из вида функции $F(\cdot)$ (см. (6.9)) имеем

$$c(l \mid F(X(p))) = \sup_{(z(\cdot),\, u(\cdot)) \in X(p)} \int_0^T \left\langle l(t), z(t) - \int_0^t f(\tau, z(\tau), u(\tau))d\tau \right\rangle dt =$$

$$= \sup_{(z(\cdot),\, u(\cdot)) \in X(p)} \int_0^T \left[\langle l(t), z(t) \rangle - \left\langle \int_t^T l(\tau)d\tau,\ f(t, z(t), u(t)) \right\rangle \right] dt.$$

Отсюда, используя (6.12), (6.13) и вид множества $X(p)$ из (6.11), приходим к (6.14). Заметим, что ввиду измеримости функций $t \mapsto l(t)$ и $t \mapsto f(t, z, u)$ ($z, u \in \mathbb{R}^n$) и непрерывности функции $(z, u) \mapsto$ $\mapsto f(t, z, u)$ ($t \in [0, T]$) функция максимума, записанная под знаком интеграла в (6.14), интегрируема (см., например, [9, теорема I. 4.21]), т.е. данный интеграл определен корректно. Утверждение 1) доказано. Утверждение 2) следует из теоремы Филиппова (см., например, [9, теорема I.7.10]), определения множества $X(p)$ (см. (6.11)) и утверждения 1.

Лемма 8. *Пусть для задачи* (6.8) *выполнены условия* (B1)–(B4). *Тогда для задачи* (5.1) *выполнены условия* (A1)–(A9).

Доказательство. Непрерывность многозначного отображения $p \mapsto X(p)$ (условие (A1)) следует из непрерывности многозначной функции $(p, t) \mapsto Z(p, t)$ (условие (B2)). Непрерывность функций $p \mapsto b(p)$ и $(p, x) \mapsto F(x)$ (условие (A2)) очевидна. Тот факт, что функция $(p, x) \mapsto F(p, x) - b(p)$ есть компактификатор (условие (A3)), установлен в [8, лемма 12]. Проверку условия выпуклости множества $F(p, X(p))$, $p \in [p_0, p_*]$ (условие (A4)), произведем ниже. Монотонное возрастание многозначного отображения $p \mapsto X(p)$ (условие (A5)) следует из монотонного возрастания многозначного отображения $p \mapsto Z(p, t)$ для любого $t \in [0, T]$ (условие (B3)). Замкнутость множества $F(X(p))$ для каждого $p \in [p_0, p_*]$ (условие (A6)) вытекает из замкнутости множества $Z(t, p)$ при всяком $p \in [p_0, p_*]$ (условие (B1)). Условие (A7) выполняется тривиально ввиду постоянства отображения $p \mapsto F(x)$. Условие (A8) есть следствие условия (B1). Вид (6.14) опорного функционала $c(\cdot \mid F(X(p)))$ и непрерывность многозначной функции $(p, t) \mapsto Z(p, t)$ (условие (B2)) обеспечивают непрерывность функции $p \mapsto c(l \mid F(X(p)))$ при всяком $l \in Y$, т.е. выполнение условия (A9). Наконец, покажем, что выполняется условие (A4), т.е. что при произвольно выбранном $p \in [p_0, p_*]$ множество $F(p, X(p))$ выпукло. Для этого воспользуемся видом множества U из (6.2) и условием (B1). Пусть $w_m = F(z_m(\cdot), u_m(\cdot))$, где

$$(z_m(\cdot), u_m(\cdot)) \in X(p), \quad m = 1, 2, \tag{6.15}$$

и $\lambda \in [0, 1]$. Установим, что элемент $w = \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2$ лежит в $F(X(p))$; более того, покажем, что

$$w = F(z(\cdot), u(\cdot)), \tag{6.16}$$

где $u(\cdot)$ – некоторое управление и

$$z(\cdot) = \lambda z_1(\cdot) + (1 - \lambda)z_2(\cdot). \tag{6.17}$$

Заметим, что из вида $X(p)$ в (6.11) и выпуклости множеств $Z(p, t)$ ($t \in [0, T]$) (см. условие (B1)) следует, что

$$(z(\cdot), u(\cdot)) \in X(p). \tag{6.18}$$

Согласно (6.9), при каждом $t \in [0, T]$

$$y(t) = z(t) - \int_0^t g(\tau)d\tau,$$

где

$$g(\tau) = \lambda f(\tau, z_1(\tau), u_1(\tau)) + (1 - \lambda) f(\tau, z_2(\tau), u_2(\tau)).$$

Поэтому для (6.16) достаточно проверить, что для некоторого управления $u(\cdot)$ при всех $\tau \in [0, T]$ выполняется $g(\tau) = f(\tau, z(\tau), u(\tau))$; последнее, с учетом вида функции $f(\cdot)$ (см. (6.5), (6.4)), равносиль-

но соотношению

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\tau)u^{(j)}(\tau)z^{(j)}(\tau) = \lambda\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\tau)u_1^{(j)}(\tau)z_1^{(j)}(\tau) + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\tau)u_2^{(j)}(\tau)z_2^{(j)}(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Легко видеть, что данное равенство выполняется при

$$u^{(j)}(\tau) = \mu^{(j)}(\tau)u_1^{(j)}(\tau) + [1-\mu^{(j)}(\tau)]u_2^{(j)}(\tau),$$

где

$$\mu^{(j)}(\tau) = \lambda\frac{z_1^{(j)}(\tau)}{z^{(j)}(\tau)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Числитель и знаменатель в последнем выражении положительны, так как, по (6.15), (6.18) и (6.11), $z_1(\tau), z_2(\tau), z(\tau) \in Z(p, \tau)$, а по условию (B1), $Z(p, \tau) \in \mathbb{R}_+^n$. Принимая во внимание (6.17), получаем, что $\mu^{(j)}(\tau) \in [0, 1]$. Так как $u^{(j)}(\tau) \in [u_-^{(i)}, u_+^{(i)}]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то $u(\tau) = (u^{(1)}(\tau), \ldots, u^{(n)}(\tau))) \in U$ (см. (6.2)). Так как функции $\mu^{(j)}(\cdot)$, очевидно, измеримы, то функция $u(\cdot)$ измерима. Таким образом, $u(\cdot)$ есть управление. Представление (6.16) получено. Доказательство закончено.

Замечание 2. Выше, при обосновании условия (A4), показано, что если $w_m \in F(X(p))$, $(z_m(\cdot), u_m(\cdot)) \in X(p)$, $F(z_m(\cdot), u_m(\cdot)) = w_m$ $(m = 1, 2)$ и $\lambda \in [0, 1]$, то для функции $z(\cdot) = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2(\cdot)$ найдется управление $u(\cdot)$ такое, что $F(z(\cdot), u(\cdot)) = \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2$.

Лемма 8 и теорема 4 дают основание применять алгоритм (5.3)–(5.12) для решения задачи (5.1). Используя вид опорной функции $c(\cdot \mid F(X(p)))$ из (6.14) и экстремальных элементов $v = (v^z(\cdot), v^u(\cdot))$ (см. утверждение 2) леммы 7), приходим к следующей реализации алгоритма (5.3)–(5.12).

На нулевом шаге алгоритма задаются

$$x_0 = (z_0(\cdot), u_0(\cdot)) \in X(p_0), \quad w_0 = F(x_0) \tag{6.19}$$

и набор (p_0, w_0, x_0) выбирается в качестве начального элемента последовательности. На шаге $k+1$ по набору $(p_k, w_k, x_k) \in [p_0, \infty) \times Y \times X$, $x_k = (z_k(\cdot), u_k(\cdot))$, задается набор $(p_{k+1}, w_{k+1}, x_{k+1}) \in [p_0, \infty) \times Y \times X$, $x_{k+1} = (z_{k+1}(\cdot), u_{k+1}(\cdot))$. Именно, полагается (см. (5.4), (6.10), (5.5), (6.14))

$$l_k(t) = \bar{z} - w_k(t), \quad t \in [0, T], \tag{6.20}$$

$$r_k(t) = \int_t^T l_k(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{6.21}$$

$$\varphi_k(p) = \int_0^T [h_*(p, t, l_k(t), r_k(t)) - \langle l_k(t), \bar{z}\rangle]dt, \quad p \geq p_k, \tag{6.22}$$

и находятся число

$$p_{k+1} = \min\{p \geq p_k : \varphi_k(p) \geq 0\} \tag{6.23}$$

и измеримые функции $v_{k+1}^z(\cdot)$, $v_{k+1}^u(\cdot)$ на $[0, T]$ такие, что

$$v_{k+1}^z(t) \in Z(p_{k+1}, t), \quad v_{k+1}^u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \tag{6.24}$$

$$h(t, l_k(t), r_k(t), v_{k+1}^z(t), v_{k+1}^u(t)) = h_*(p_{k+1}, t, l_k(t), r_k(t)), \quad t \in [0, T]. \tag{6.25}$$

Значение τ_{k+1} определяется из

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} 0, & \tau^*_{k+1} < 0, \\ \tau^*_{k+1}, & \tau^*_{k+1} \in [0,1], \\ 1, & \tau^*_{k+1} > 1, \end{cases} \quad \tau^*_{k+1} = \frac{\int_0^T \langle q_{k+1}(t), \bar{z} - w_k(t)\rangle dt}{\int_0^T |q_{k+1}(t)|^2 dt}, \tag{6.26}$$

$$q_{k+1} = F(v_{k+1}) - w_k, \quad \int_0^T |q_{k+1}(t)|^2 dt \neq 0;$$
$$\tau_{k+1} \in [0,1], \quad \int_0^T |q_{k+1}(t)|^2 dt = 0. \tag{6.27}$$

Полагается

$$w_{k+1}(t) = (1-\tau_{k+1})w_k(t) + \tau_{k+1}F(v^z_{k+1}(\cdot), v^u(\cdot))(t), \quad t \in [0,T], \tag{6.28}$$

$$z_{k+1}(t) = (1-\tau_{k+1})z_k(t) + \tau_{k+1}v^z_{k+1}(t), \quad t \in [0,T], \tag{6.29}$$

и управление $u_{k+1}(\cdot)$ находится по формуле

$$F(z_{k+1}(\cdot), u_{k+1}(\cdot)) = w_{k+1}. \tag{6.30}$$

Замечания. 3. На k-м шаге алгоритма (6.19)–(6.30) две основные операции. Первая операция (см. (6.23)) сводится, очевидно, к нахождению минимального корня непрерывной скалярной функции $p \mapsto \varphi_k(p)$ на полуинтервале $[p_k, \infty)$. Вторая операция (см. (6.24), (6.25)) – это нахождение измеримых функций $v^z_{k+1}(\cdot)$ и $v^u_{k+1}(\cdot)$, значения которых при каждом $t \in [0,T]$ максимизируют функцию $(z,u) \mapsto h(t, l_k(t), r_k(t), z, u)$ на множестве $Z(p_{k+1}, t) \times U$. Используя вид функций $h(\cdot)$ и $f(\cdot)$ для $v^z_{k+1}(\cdot)$ и $v^u_{k+1}(\cdot)$, нетрудно получить явные представления.

4. Согласно общему алгоритму (5.3)–(5.12), текущее приближение $x_{k+1} = (z_{k+1}(\cdot), u_{k+1}(\cdot))$ находится из неявного соотношения (5.12). В описанной выше конкретизации (6.19)–(6.30) данного алгоритма формула (6.29) указывает явный способ преобразования компоненты $z_k(\cdot)$ (текущего приближения оптимальной траектории) в $z_{k+1}(\cdot)$. Обоснованность этого преобразования следует из замечания 2. Компонента $u_{k+1}(\cdot)$ (текущее приближение оптимального управления) при этом находится как решение интегрального уравнения (6.30). Если нас интересуют приближения p_{k+1} оптимального значения p_* и $z_{k+1}(\cdot)$ оптимальной траектории и не интересуют приближения $u_{k+1}(\cdot)$ оптимального управления, то на каждом шаге алгоритма трудоемкую операцию (6.30) по нахождению $u_{k+1}(\cdot)$ можно опустить.

Итак, эквивалентность задачи (6.8) оптимального управления и сконструированной по ней задачи (5.1) (теорема 5), применимость для последней задачи решающего алгоритма (5.3)–(5.12) (лемма 8 и теорема 4) и указанная выше конкретизация последнего алгоритма (см. (6.19)–(6.30)) дают следующий результат о сходимости итерационного алгоритма (6.19)–(6.30) к решению задачи (6.8).

Теорема 6. *Пусть верно следующее*:

(i) *выполнены условия* (B1)–(B3),

(ii) $X = Y \times Y_w$, *где* $Y = L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ *и* Y_w *есть* $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$, *оснащенное слабой нормой*,

(iii) *функция* $F(\cdot) : X \mapsto Y$ *и множества* $X(p)$ $(p \geq p_0)$ *заданы по* (6.9) *и* (6.11).

(iv) *последовательность* (p_k, w_k, x_k) *из* $[p_0, \infty) \times Y \times X$, $x_k = (z_k(\cdot), u_k(\cdot))$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *задана алгоритмом* (6.19)–(6.30).

Тогда числовая последовательность (p_k) *сходится к оптимальному значению* p_* *задачи оптимального управления* (6.8) *и последовательность* $(z_k(\cdot), u_k(\cdot))$ *сходится ко множеству* $D(p_*)$ *всех оптимальных управляемых процессов в этой задаче в следующем смысле*:

$$\inf\{|(z_k(\cdot), u_k(\cdot)) - (z_*(\cdot), u_*(\cdot))|_X : (z_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in D(p_*)\} \longrightarrow 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kryazhimskii A.V., Paschenko S.V.* On the problem of optimal compatibility // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9. № 3. P. 283–300.
2. *Кряжимский А.В., Пащенко С.В.* К решению линейной задачи быстродействия со смешанными ограничениями // ВИНИТИ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прилож. М., 2002. Т. 90. С. 232–260.
3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
4. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
5. *Zangwill W.I., Garcia C.B.* Pathways to solutions, fixed points and equilibria. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
7. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Экстремальные задачи с отделимыми графиками // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 2. С. 32–54.
8. *Kryazhimskii A.V.* Optimization problems with convex epigraphs. Application to optimal control // Internat. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2001. V. 11. № 4. P. 773–801.
9. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
11. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.