Доклады Академии наук СССР
1969. Том 185, № 5

УДК 536+53:51

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. М. АБАСОВ

О ВТОРОЙ ОДНОМЕРНОЙ НЕИДЕАЛЬНОЙ ТЕПЛОКОНТАКТНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 29 VII 1968)

В настоящей работе мы изучаем задачу распространения тепла в составном стержне, составленном из двух различных кусков, при неидеальных теплоконтактных условиях на границе смыкания составляющих частей.

1°. Предположим, что составной стержень заполняет отрезок $(0, l)$, точка $x = l/2$ — точка смыкания, поверхность стержня теплоизолирована, в теле отсутствуют источники и стоки и на концах есть теплообмен с окружающей средой.

Обозначим через c_1, ρ_1, K_1, $\varkappa_1 = K_1/c_1\rho_1$ и c_2, ρ_2, K_2, $\varkappa_2 = K_2/c_2\rho_2$ — теплоемкость, плотность, теплопроводность и температуропроводность частей стержня, заполняющие соответственно $(0, l/2)$ и $(l/2, l)$. Тогда задача распространения тепла в таком стержне будет формулироваться следующим образом: требуется найти в области

$$S_T^{(i)} = \{(x, t),\ 0 < x < l/2;\ l/2 < x < l;\ 0 < t < T\} \quad (i = 1, 2) \tag{1}$$

такое распределение температуры $u_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$, чтобы

$$\partial u_i/\partial t = \varkappa_i \partial^2 u_i/\partial x^2, \quad (x, t) \in S_T^{(i)} \quad (i = 1, 2); \tag{2}$$

$$u_1(x, 0) = F_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2; \quad u_2(x, 0) = F_2(x), \quad l/2 \leqslant x \leqslant l; \tag{3}$$

$$\partial u_1(0, t)/\partial x = f_1(t); \quad \partial u_2(l, t)/\partial x = f_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{4}$$

$$-K_1 \partial u_1(l/2, t)/\partial x = h[u_1(l/2, t) - u_2(l/2, t)], \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{5}$$

$$K_1 \partial u_1(l/2, t)/\partial x = K_2 \partial u_2(l/2, t)/\partial x, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{6}$$

при этом выполняются условия согласования

$$F_1'(0) = f_1(0); \quad F_2'(l) = f_2(0); \quad K_1F_1'(l/2) = h[F_2(l/2) - F_1(l/2)];$$
$$K_1F_1'(l/2) = K_2F_2'(l/2), \tag{7}$$

где $h = 1/R$ — контактная проводимость, R — контактное сопротивление, $f_i(t) \in C^{(1)}, F_i(x) \in C^{(2)}$ $(i = 1, 2)$.

Задачу (1) — (6) называем второй неидеальной одномерной теплоконтактно-краевой задачей, в отличие от того, что мы имеем для бесконечно больших значений h, при которых имеет место непрерывный переход температуры через теплоконтактную границу. Последнюю называем идеальной теплоконтактно-краевой задачей. Идеальная задача рассматривалась в ([1-4]) для параболических уравнений и в ([5-7]) для эллиптических уравнений.

Решение задачи (1) — (6) будем представлять в виде

$$u_i(x, t) = v_i(x, t) + w_i(x, t) \quad (i = 1, 2), \tag{8}$$

где $v_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$ являются решением задачи (1) — (6) с однородными граничными условиями (4), а $w_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$ — решением задачи (1) — (6) с однородными начальными условиями (3). Ради краткости о последних задачах будем говорить как о задачах I и II. Легко доказывается единственность решения задачи I.

2^0. Для нахождения единственного решения задачи I применяется метод Фурье, что приводит к функции

$$v_{1,2}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n v_{1,2}^{(n)}(x,t)= \tag{9}$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}D_nX_{1n}(x)T_n(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}D_n\left(a_{1n}\cos\frac{\lambda_n x}{\sqrt{\varkappa_1}}\right)\exp[-\lambda_n^2 t], & 0\leqslant x\leqslant l/2,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}D_nX_{2n}(x)T_n(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}D_n\left(a_{2n}\cos\frac{\lambda_n x}{\sqrt{\varkappa_2}}+\sin\frac{\lambda_n x}{\sqrt{\varkappa_2}}\right)\exp[-\lambda_n^2 t], & \\ & l/2\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

где a_{1n}, a_{2n} $(n=0,1,2,\ldots)$ — известные величины, а λ_n $(n=1,2,\ldots)$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$\left(\frac{K_1\lambda}{\sqrt{\varkappa_1}}\sin\frac{\lambda l}{2\sqrt{\varkappa_1}}-h\cos\frac{\lambda l}{2\sqrt{\varkappa_1}}\right)\sin\frac{\lambda l}{2\sqrt{\varkappa_2}}-$$
$$-\frac{K_1}{K_2}\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}h\sin\frac{\lambda l}{2\sqrt{\varkappa_1}}\cos\frac{\lambda l}{2\sqrt{\varkappa_2}}=0, \tag{10}$$

и функции $X_{1n}(x)$, $X_{2n}(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$, будучи умноженные соответственно на $\sqrt{c_1\rho_1}$ и $\sqrt{c_2\rho_2}$, становятся ортогональными в смысле

$$c_1\rho_1\int_0^{l/2}X_{1n}(x)X_{1m}(x)\,dx+c_2\rho_2\int_{l/2}^{l}X_{2n}(x)X_{2m}(x)\,dx=0\quad\text{при } n\neq m. \tag{11}$$

Удовлетворяя начальным условиям (3), в силу (11) находим:

$$D_k=\frac{-1}{\lambda_k^2}\left[K_1\int_0^{l/2}F_1''(x)X_{1k}(x)\,dx+K_2\int_{l/2}^{l}F_2''(x)X_{2k}(x)\,dx\right]\quad(k=1,2,\ldots), \tag{12}$$

из чего видно, что ряды в (9) при $t=0$ сходятся абсолютно и равномерно, и начальные условия (3) действительно удовлетворяются, если амплитуды D_k $(k=1,2,\ldots)$ определить по формуле (12).

3^0. Очевидно, что (9) удовлетворяет однородным граничным условиям (4) и теплоконтактным условиям (5)—(6). Для доказательства того, что (9) в области (1) удовлетворяет (2), принимая во внимание особенность задачи I ($\lambda_0=0$ является собственным значением с собственными функциями $X_{10}(x)=1$, $X_{20}(x)=1$), мы строим обобщенную функцию Грина $G^*(x,s)$ и полученную при разделении переменных задачу Штурма — Лиувилля для $\lambda\neq 0$, как и в ([5–7]), заменяем эквивалентным интегральным уравнением

$$X(x)+\mu\int_0^l G^*(x,s)X(s)\,ds=0,\quad \mu=\lambda^2,$$

а это дает возможность доказать равномерную сходимость рядов, полученных из (9), один раз почленным дифференцированием по t и два раза по x.

4^0. Задачу II решаем применением принципа Дюамеля ([8]), что требует предварительного решения некоторой теплоконтактно-краевой задачи с постоянными граничными данными, которую получаем из задачи II «замораживанием» граничных данных $f_1(t)$ и $f_2(t)$ для некоторого значения $t=\eta$. Задача II является задачей со стационарной неоднородностью, и поэтому целесообразно сначала выделять стационарное решение, а затем искать отклонение от этого решения.

Оказывается, что в данном случае этого сделать непосредственно нельзя, в отличие от первой и третьей теплоконтактно-краевых задач, ибо при этом в силу граничных условий (4) исчезают две постоянные интегрирования, которые не удается определить. Во избежание такой неопределенности, обозначая через $w_i^0(x, t)$ $(i = 1, 2)$ решение замороженной задачи, вводим функцию

$$q_i(x, t) = -K_i \partial w_i^0(x, t) / \partial x \quad (i = 1, 2), \tag{13}$$

и без особого труда преобразуем замороженную задачу к следующей, названной нами сопутствующей, задаче, которая является первой идеальной теплоконтактно-краевой задачей, со стационарной неоднородностью:

$$\begin{gathered}
\partial q_1 / \partial t = \varkappa_1 \partial^2 q_1 / \partial x^2, \quad 0 < x < l/2; \\
\partial q_2 / \partial t = \varkappa_2 \partial^2 q_2 / \partial x^2, \quad l/2 < x < l; \\
q_1(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2; \quad q_2(x, 0) = 0, \quad l/2 < x < l; \\
q_1(0, t) = -K_1 f_1(\eta); \quad q_2(l, t) = -K_2 f_2(\eta); \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\
q_1(l_2, t) = q_2(l/2, t); \quad \partial q_1(l/2, t) / \partial x = A q_2(l/2, t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{gathered} \tag{14}$$

где A — известная постоянная.

5⁰. Полагая $q_i(x, t) = \Phi_i(x) + \theta_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$, задачу (14) делим на стационарную задачу с неоднородными граничными условиями и нестационарную с неоднородными начальными, но с однородными граничными условиями. Решая стационарную задачу непосредственно, а нестационарную, как и задачу I, применением метода Фурье, найдем $\theta_i(x, t)$ и построим решение «сопутствующей» задачи $q_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$; внося ее в (13), находим $w_i^0(x, t)$ $(i = 1, 2)$, которые содержат произвольные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$.

6⁰. Для определения этих произвольных функций, следуя [9], вводим средние

$$\widetilde{w_1^0(t)} = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} w_1^0(x, t)\, dx; \quad \widetilde{w_2^0(t)} = \frac{2}{l} \int_{l/2}^{l} w_2^0(x, t)\, dx; \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{15}$$

для которых справедливы соотношения:

$$C_1\rho_1 \frac{l}{2} \frac{d\widetilde{w_1^0(t)}}{dt} = f_1(\eta); \quad C_2\rho_2 \frac{l}{2} \int_{l/2}^{l} \frac{d\widetilde{w_2^0(t)}}{dt} = f_2(\eta). \tag{16}$$

Интегрируя (16) и подставляя выражения $w_i^0(x, t)$ $(i = 1, 2)$ в (15), находим четыре выражения, из которых определяются $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Подставляя найденные значения $C_i(t)$ $(i = 1, 2)$ в $w_i^0(x, t)$, находим после перехода к безразмерным величинам решение замороженной задачи в виде

$$w_{1,2}^0(\xi, \tau) = \begin{cases} w_1^0(\xi_1, \tau_1) = L_{11}(\xi_1, \tau_1) f_1(\eta) + L_{12}(\xi_1, \tau_1) f_2(\eta); & 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1; \\ w_2^0(\xi_2, \tau_2) = L_{21}(\xi_2, \tau_2) f_1(\eta) + L_{22}(\xi_2, \tau_2) f_2(\eta); & 1 \leqslant \xi_2 \leqslant 2, \end{cases}$$

где $L_{ij}(\xi_k, \tau_k)$ $(i, j, k = 1, 2)$ имеют определенные явные выражения.

7⁰. Теперь из последнего выражения по принципу Дюамеля [8] решение задачи II, соответствующее переменным граничным данным $f_1(t)$ и $f_2(t)$, можно записать в виде

$$w_{1,2}(\xi, \tau) = \begin{cases} w_1(\xi_1, \tau_1) = \int_0^{\tau_1} \left\{ f_1(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_1} L_{11}(\xi_1, \tau_1 - \gamma) + \right. \\ \left. + f_2(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_1} L_{12}(\xi_1, \tau_1 - \gamma) \right\} d\gamma, \quad 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1; \\ w_2(\xi_2, \tau_2) = \int_0^{\tau_2} \left\{ f_1(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_2} L_{21}(\xi_2, \tau_2 - \gamma) + \right. \\ \left. + f_2(\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_2} L_{22}(\xi, \tau_2 - \gamma) \right\} d\gamma, \quad 1 \leqslant \xi_2 \leqslant 2. \end{cases} \tag{17}$$

Приводя (9) к тем же безразмерным величинам, что и (17), складывая по принципу суперпозиции с последним, получим решение задачи (1) — (7).

Замечание. Отметим, что задача (1) — (7) исследована и для области

$$S_T^{(i)} = \{(x, t);\ \chi_i(t) < x < \chi_{i+1}(t);\ 0 < t < T\} \quad (i = 1, 2), \tag{18}$$

где $\chi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ не имеют общих точек и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α $(^1/_2 < \alpha \leqslant 1)$, а также в случае, когда боковые поверхности стержня не теплоизолированы и внутри тела имеется источник или сток обильности $Q_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$. Показано, что количество составных частей можно увеличить.

Азербайджанский государственный университет им. С. М. Кирова

Поступило
19 VII 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Йехтер, Э. Мейер, В кн. Турбулентные течения и теплопроводность (сер. Аэродинамика больших скоростей и ракетная техника. вып. V), ИЛ, 1963. [2] Л. И. Камынин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 2, № 5 (1962). [3] Л. И. Камынин, Сибирск. матем. журн., 4, № 5 (1963). [4] Л. И. Камынин, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 721 (1964). [5] В. А. Ильин, И. А. Шишмарев, ДАН, **135**, № 4 (1960). [6] В. А. Ильин, ДАН, **137**, № 1 (1961). [7] В. А. Ильин, ДАН, **137**, № 2 (1961). [8] Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, «Наука», 1964. [9] А. В. Лыков, Теория теплопроводности, 1952.