УДК 517.958; 517.968.23

Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов

МЕТОД ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЪЕМНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ[1]

Аннотация. Рассматривается задача дифракции электромагнитных волн на объемном теле, расположенном в свободном пространстве. Для изучения интегродифференциальных уравнений, описывающих явление, используется техника псевдодифференциальных операторов. Вычислено асимптотическое разложение символа, доказаны эллиптичность и фредгольмовость с нулевым индексом оператора задачи.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, псевдодифференциальные операторы, задача дифракции.

Abstract. The problem of diffraction electromagnetic waves on a volume body in a free space is considered. The issue is studied by pseudodifferential operators technique. Asymptotic expansion of the operator's symbol is obtained. Ellipticity and Fredholm property with zero index of the operator of the problem are proved.

Keywords: Maxwell equation, pseudodifferential operators, diffraction problem.

1 Задача дифракции и уравнение электрического поля

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в свободном пространстве $\mathbb{R}^3$ расположено объемное тело (область) Ω с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и 3×3-матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$. Компонентами тензора $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ являются $\varepsilon_{ij}(x)$ – бесконечно гладкие функции в $\bar{\Omega}$, т.е. $\varepsilon_{ij}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, причем $\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon'_{ij}(x)/\varepsilon_0$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость свободного пространства.

Из условия конечности энергии необходимо [1], чтобы $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Требуется определить электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, возбуждаемое сторонним полем $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$.

Будем искать электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, условиям непрерывности касательных компонент поля при переходе через границу тела и условиям излучения на бесконечности [1].

Задача отыскания $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ сводится к решению интегродифференциального уравнения [1]:

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_\Omega \hat{\mathbf{G}}_E(x,y)\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y) - \mathbf{I}\right)\mathbf{E}(y)\,dy +$$

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ по ФЦП «Развитие потенциала высшей школы» № 2.1.1/1647.

$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y)-\mathbf{I}\big)\mathbf{E}(y)dy,\ x\in\Omega, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}(y)=\big(E_1(y),E_2(y),E_3(y)\big)^T$ – (комплекснозначный) вектор электрического поля и $y=(y_1,y_2,y_3)$ – точка в пространстве $\mathbb{R}^3$; $\mathbf{I}$ – единичная 3×3-матрица; $\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)=\begin{pmatrix} G_E^1 & 0 & 0\\ 0 & G_E^2 & 0\\ 0 & 0 & G_E^3\end{pmatrix}$ – тензорная функция Грина, где $G_E^m(x,y)=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|}+g^m(x,y)$, $x,y\in\overline{\Omega}$, $g^m\in C^\infty\big(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\big)$ – гладкая функция $(m=1,2,3)$; k_0 – волновое число свободного пространства.

В задаче дифракции электромагнитных волн на объемном теле в свободном пространстве функции $g^m(x,y)$ равны нулю. Но мы будем рассматривать более общий случай, когда эти функции отличны от нуля, что, например, имеет место в задаче дифракции на теле в волноводе [2].

Кроме того, вне тела Ω имеем представление для поля [1]:

$$\mathbf{E}(x)=\mathbf{E}^0(x)+k_0^2\int\limits_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y)-\mathbf{I}\big)\mathbf{E}(y)dy+$$

$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y)-\mathbf{I}\big)\mathbf{E}(y)dy,\ \ x\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega,$$

если $\mathbf{E}(y)$, $y\in\Omega$ – решение уравнения (1). Поле $\mathbf{H}$ выражается через $\mathbf{E}$ из уравнения Максвелла [1].

Пусть $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x):=\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y)-\mathbf{I}\big)^{-1}$ существует при всех $x\in\Omega$ и $\mathbf{J}(y):=\big(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y)-\mathbf{I}\big)\mathbf{E}(y)$, откуда $\mathbf{E}(y)=\widehat{\boldsymbol{\theta}}(y)\mathbf{J}(y)$, получаем уравнение (1) в виде

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)\mathbf{J}(x)=\mathbf{E}^0(x)+k_0^2\int\limits_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)\mathbf{J}(y)dy+$$

$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)\mathbf{J}(y)dy,\ \ x\in\Omega. \tag{2}$$

Рассмотрим оператор, отвечающий уравнению (2):

$$A\mathbf{J}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)\mathbf{J}(x)-k_0^2\int\limits_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)\mathbf{J}(y)dy-\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)\mathbf{J}(y)dy, \tag{3}$$

где $\mathbf{J}(y)=\big(J_1(y),J_2(y),J_3(y)\big)^T$.

Оператор (3) можно представить в следующем виде:

$$Au = \hat{\boldsymbol{\theta}}u - (D \circ T)u, \tag{4}$$

где $Tu = \int\limits_Q \hat{\mathbf{G}}_E(x,y)u(y)dy$, $Du = \left(k_0^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)u(y)$, $\hat{A} \equiv D \circ T$ – композиция дифференциального оператора D и интегрального оператора T.

2 Теорема о композиции, эллиптичность и фредгольмовость

В этот пункт для удобства читателя мы включили некоторые известные теоретические результаты, которые легко найти, например, в [3–5]. Мы придерживаемся обозначений, принятых в [3].

Класс псевдодифференциальных операторов (ПДО) с символами $a(x,\xi) \in C^\infty\left(\Omega \times \mathbb{R}^n\right)$, принадлежащими пространству Шварца $S^m = S^m\left(\Omega \times \mathbb{R}^n\right)$, будем обозначать через L^m или $L^m(\Omega)$.

Пусть даны два ПДО A и B: $C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, где $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство C^∞-функций с компактным носителем в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для того чтобы композиция $A \circ B$ имела смысл, достаточно, чтобы либо оператор A, либо оператор B был собственным.

Всякий ПДО A может быть записан в виде $A = A' + A''$, где A' – собственный ПДО, а A'' имеет ядро $K_{A''} \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$.

Пусть даны два псевдодифференциальных оператора (ПДО) A и B: $C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, где $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство C^∞-функций с компактным носителем в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для того чтобы композиция $A \circ B$ имела смысл, достаточно потребовать, чтобы один из операторов был собственным. Собственность оператора A равносильна одновременному выполнению двух условий: 1) для любого компакта $K \subset \Omega$ существует такой компакт $K_1 \subset \Omega$, что оператор A отображает $C_0^\infty(K)$ в $C_0^\infty(K_1)$; 2) то же самое верно для транспонированного оператора ${}^tA$ [3].

Теорема 2.1 (о композиции) [3]. Пусть $A \in L^{m_1}$, $B \in L^{m_2}$ – два ПДО в области Ω, один из которых является собственным. Тогда $C = A \circ B \in L^{m_1+m_2}$ и $C = c(x, D_x) + R$, где $R \in L^{-\infty}$, а $c(x,\xi)$ имеет асимптотическое разложение

$$c(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\right)\left(D_x^\alpha b(x,\xi)\right).$$

Определение 2.1 [3]. Матричный оператор $A = a(x,D) \in L_{\text{кл}}^m(\Omega)$ называется эллиптическим ПДО порядка m, если $\det \mathbf{a}_0(x,\xi) \neq 0$, при $\xi \neq 0$, где $\mathbf{a}_0(x,\xi)$ – главный символ (матричный) оператора A.

Класс $L_{\text{кл}}^m$ – класс полиоднородных, или классических, ПДО.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства; $\mathrm{Lin}(E_1, E_2)$ – множество всех линейных непрерывных операторов из E_1 в E_2; $\mathrm{Comp}(E_1, E_2)$ – множество всех компактных линейных операторов из E_1 в E_2; $\mathrm{Fred}(E_1, E_2)$ – множество всех фредгольмовых операторов из $\mathrm{Lin}(E_1, E_2)$. Индексом фредгольмова оператора A называется число $\mathrm{ind}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{Coker}\, A$.

Теорема 2.4 [4]. Пусть $A \in \mathrm{Fred}(E_1, E_2)$, $R \in \mathrm{Comp}(E_1, E_2)$. Тогда $A + R \in \mathrm{Fred}(E_1, E_2)$, причем $\mathrm{ind}(A + R) = \mathrm{ind}\, A$.

Мы будем иметь дело с гильбертовыми пространствами, поэтому теорема 2.4 сохраняют силу.

Пусть Ω – область, определим нужные нам пространства: $H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega) = E'(\Omega) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$, где $E'(\Omega)$ – пространство всех обобщенных функций с компактным носителем в Ω, $H^s(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева; $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ – пространство таких $u \in D'(\Omega)$, что $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, где $D'(\Omega)$ – пространство всех обобщенных функций в Ω.

Теорема 2.5 [4, 5]. Если $A \in L^m(\Omega)$ и Ω – область в $\mathbb{R}^n$, то A осуществляет отображение $A : H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega) \to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если дополнительно предположить, что A – собственный, то A также задает отображения $A : H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega) \to H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ и $A : H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

3 Уравнение электрического поля как псевдодифференциальное уравнение

Перейдем от уравнения (2) к псевдодифференциальному уравнению.

Схема перехода такова: сначала представим операторы D и T из (4) как псеводифференциальные и найдем их символы $\mathbf{d}(\xi)$ и $\mathbf{t}(\xi)$ (из дальнейшего будет видно, что символы $\mathbf{d}$ и $\mathbf{t}$ не зависят от x), затем воспользуемся теоремой о композиции двух ПДО, чтобы найти асимптотическое разложение символа $\hat{\mathbf{a}}(\xi)$ оператора $\hat{A} = D \circ T$. Если у интеграла не обозначена область интегрирования, будем предполагать интегрирование по всему $\mathbb{R}^3$.

Разобьем элемент ядра G_E^m на три слагаемых, для изучения оператора, отвечающего первому слагаемому (его мы обозначим $\hat{T}$), мы перейдем к ПДО, два вторых слагаемых дадут компактные операторы (обозначим их сумму R, таким образом, $T = \hat{T} + R$, где R – компактный). В дальнейшем под оператором T мы часто будем иметь в виду $\hat{T}$, не оговаривая этого каждый раз (когда в этом не будет необходимости), а поскольку ПДО изучаются с точностью до компактного слагаемого, то мы ничего не теряем.

Поскольку ядром оператора T служит негладкая в точке $x = y$ функция $\hat{\mathbf{G}}_E(x, y)$, то прежде получим формулу, которая будет позволять сглаживать ядро до любого (конечного) необходимого нам порядка.

Рассмотрим отдельно один из диагональных элементов G_E^m тензора Грина $\widehat{G}_E$. Представим элемент ядра $G_E^m(x,y)=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|}+g^m(x,y)$ в виде

$$G_E^m(x,y)=e^{ik_0 r}\frac{e^{-r}}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+\sum_{k=0}^{l-1}\frac{r^k}{(k+1)!}\right)+e^{ik_0 r}\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k r^{k+l}}{l!k!(k+l+1)}+g^m(x,y)=$$

$$=e^{ik_0 r}\frac{e^{-r}}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+\sum_{k=0}^{l-1}\frac{r^k}{(k+1)!}\right)+g_l(r)+g^m(x,y),\ \ l=0,1,\ldots, \qquad (5)$$

где $r=|x-y|$ и первая сумма в (5) при $l=0$, как обычно, считается равной нулю.

Представление (5) получается следующим образом:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r}-\frac{e^{-r}}{r}+\frac{e^{-r}}{r}=\frac{1}{r}\left(1-e^{-r}\right)+\frac{e^{-r}}{r}=\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k r^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{e^{-r}}{r}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k r^k}{(k+1)!}+\frac{e^{-r}}{r}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k r^k}{(k+1)!}+\frac{e^{-r}}{r}-e^{-r}+e^{-r}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k r^k}{(k+1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k r^k}{k!}+e^{-r}\left(\frac{1}{r}+1\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} r^k}{(k-1)!(k+1)}+e^{-r}\left(\frac{1}{r}+1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k r^{k+1}}{k!(k+2)}+e^{-r}\left(\frac{1}{r}+1\right),$$

и т.д., каждый раз отнимая и прибавляя произведение αe^{-r}, где α – первое слагаемое в остающейся сумме. Например, дальше нужно отнять и прибавить величину $\dfrac{r}{2}e^{-r}$. Причем $e^{ik_0 r}\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k r^{k+l}}{l!k!(k+l+1)}\in C^l(\Omega)$, т.к. имеем

$$\left(r^l e^{ik_0 r}\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(r^l\right)^{(k)}\left(e^{ik_0 r}\right)^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k O\left(r^{l-k}\right)O\left(r^{-n+k+1}\right)=O\left(r^{l-n+1}\right),$$

и, следовательно, $\left(r^l e^{ik_0 r}\right)^{(n)}\in C(\Omega)$, когда $l-n+1\geq 1$, значит, $r^l e^{ik_0 r}\in C^n(\Omega)$, как только $l\geq n$, $r=|x-y|$.

Формула (5) позволяет сглаживать ядро до нужного нам порядка.

Таким образом, мы представили тензор Грина в виде $\widehat{\mathbf{G}}_E=\widehat{\mathbf{G}}_{E,1}+\widehat{\mathbf{R}}$, где слагаемому $\widehat{\mathbf{R}}$, как будет показано ниже, отвечает компактный оператор (выше мы обозначили его R).

Рассмотрим оператор T с ядром $\widehat{\mathbf{G}}_{E,1}$, где на диагонали стоят элементы $G_{E,1}^{m}(r)=e^{ik_0 r}\dfrac{e^{-r}}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r}+\sum\limits_{k=0}^{l-1}\dfrac{r^k}{(k+1)!}\right)$ (см. формулу (5)) и найдем его преобразование Фурье, где $r=|x-y|$.

Обозначим $T_m u=\int G_{E,1}^{m}(|x-y|)u(y)\,dy$, теперь мы считаем, что интеграл берется по всему $\mathbb{R}^3$ (поскольку носитель функции $u(x)$ – компактное множество, мы можем доопределить $u(x)$ нулем вне носителя):

$$F[T_m](u)=F\left[\int G_{E,1}^{m}(|t-y|)u(y)\,dy\right]=\int e^{-it\cdot\xi}\int G_{E,1}^{m}(|t-y|)u(y)\,dydt=$$

$$=\int e^{-it\cdot\xi}G_{E,1}^{m}(|t|)\,dt\times\int e^{-it\cdot\xi}u(t)\,dt,$$

где последнее равенство получено в силу свойства преобразования Фурье свертки функций.

Обратимся к вычислению первого сомножителя. Поскольку t и ξ – векторы в $\mathbb{R}^3$, то $t\cdot\xi=|t||\xi|\cos\gamma$, где γ – угол между этими векторами. Введем сферическую систему координат, причем ось t_3 направим по вектору ξ (см. рис. 1).

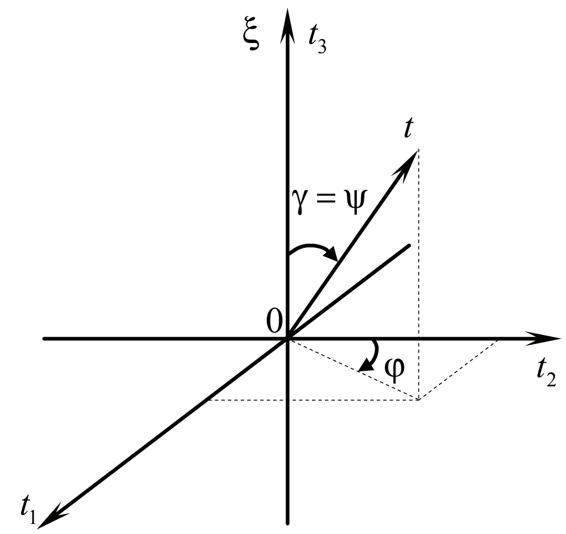

Рис. 1

Имеем: $t_1=r\sin\psi\cos\varphi$, $t_2=r\sin\psi\sin\varphi$, $t_3=r\cos\psi$, $\mathrm{Jac}=r^2\sin\psi$. Очевидно, что $\gamma=\psi$, и мы получаем:

$$\int e^{-it\cdot\xi}G_{E,1}^{m}(|t|)\,dt=\int\limits_0^{\infty}dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}e^{-ir|\xi|\cos\psi}G_{E,1}^{m}(r)r^2\sin\psi\,d\psi=$$

$$= 2\pi \int_0^\infty G_{E,1}^m(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-ir|\xi|\cos\psi} \sin\psi d\psi =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty G_{E,1}^m(r) r^2 \left(\frac{e^{-ir|\xi|\cos\psi}}{ir|\xi|} \Bigg|_0^\pi \right) dr \int_0^\pi e^{-ir|\xi|\cos\psi} \sin\psi d\psi =$$

$$= \frac{2\pi}{i|\xi|} \int_0^\infty G_{E,1}^m(r) r \left(e^{ir|\xi|} - e^{-ir|\xi|} \right) dr =$$

$$= \frac{4\pi}{i|\xi|} \int_0^\infty G_{E,1}^m(r) r \,\mathrm{sh}\left(ir|\xi|\right) dr = \frac{4\pi}{i|\xi|} \int_0^\infty \frac{e^{-r(1-ik_0)}}{4\pi} \left(1 + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} \right) \mathrm{sh}\left(ir|\xi|\right) dr =$$

$$= \frac{1}{i|\xi|} \int_0^\infty e^{-r(1-ik_0)} \,\mathrm{sh}\left(ir|\xi|\right) \sum_{k=0}^{l} \frac{r^k}{k!} dr = \frac{1}{i|\xi|} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-r(1-ik_0)} r^k \,\mathrm{sh}\left(ir|\xi|\right) dr =$$

$$= \frac{1}{2i|\xi|} \sum_{k=0}^{l} \frac{\Gamma(k+1)}{k!} \left[\left(1 - ik_0 - i|\xi|\right)^{-k-1} - \left(1 - ik_0 + i|\xi|\right)^{-k-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2i|\xi|} \sum_{k=0}^{l} (k+1) \frac{\left(1 - ik_0 + i|\xi|\right)^{k+1} - \left(1 - ik_0 - i|\xi|\right)^{k+1}}{\left((1 - ik_0)^2 + |\xi|^2 \right)^{k+1}}.$$

Пусть

$$t(\xi) = \frac{1}{2i|\xi|} \sum_{k=0}^{l} (k+1) \frac{\left(1 - ik_0 + i|\xi|\right)^{k+1} - \left(1 - ik_0 - i|\xi|\right)^{k+1}}{\left((1 - ik_0)^2 + |\xi|^2 \right)^{k+1}}, \qquad (6)$$

тогда

$$F[T_m](u) = \int e^{-it\cdot\xi} G_{E,1}^m(|t|) dt \times \int e^{-it\cdot\xi} u(t) dt = t(\xi) \int e^{-it\cdot\xi} u(t) dt. \qquad (7)$$

Используя формулу (7), мы получаем

$$T_m u = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int e^{i(x-t)\cdot\xi} t(\xi) u(t) dt d\xi. \qquad (8)$$

Это уже представление оператора T_m как ПДО с точностью до компактного слагаемого R_m (R_m – скалярный оператор, а R – матричный), отвечающего слагаемым ядра g_l и g^m из формулы (5).

Теперь мы преобразуем символ (6) в полиоднородный, это нам понадобится в дальнейшем. Пока будем рассматривать одно слагаемое вида

$$t_k(\xi)=\frac{k+1}{2i|\xi|}\left(\frac{1}{\left(1-ik_0-i|\xi|\right)^{k+1}}-\frac{1}{\left(1-ik_0+i|\xi|\right)^{k+1}}\right).$$

Введем обозначения: $1-ik_0=\alpha$, $i|\xi|=r$, получаем

$$t_k(r)=\frac{k+1}{2r^{k+2}}\left((-1)^{k+1}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1}-\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1}\right)=$$

$$=\frac{k+1}{2r^{k+2}}\left((-1)^{k+1}t_k^-(r)-t_k^+(r)\right),$$

где $t_k^-(r)=\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1}$, $t_k^+(r)=\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1}$.

Воспользуемся биноминальным разложением для $t_k^-(r)$, $t_k^+(r)$, получаем

$$t_k^-(r)=\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{n!k!}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n;$$

и

$$t_k^+(r)=\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(k+n)!}{n!k!}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n.$$

Теперь мы можем выписать $t_k(r)$:

$$t_k(r)=\frac{k+1}{2r^{k+2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{n!k!}\left((-1)^{k+1}-(-1)^n\right)\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n.$$

Найдем выражение для $t(r)$:

$$t(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{k+1}{2r^{k+2}}\frac{(k+n)!}{n!k!}\left((-1)^{k+1}-(-1)^n\right)\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1-(-1)^n\right)\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n\sum_{k=0}^{l}\frac{(2k+1)(n+2k)!}{(2k)!r^{2k+2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n\sum_{k=0}^{l}\frac{(2k+2)(n+2k+1)!}{(2k+1)!r^{2k+3}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2k+1)(2n+2k)!}{(2k)!r^{2k+2}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2k+2)(2n+1+2k+1)!}{(2k+1)!r^{2k+3}}=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2k+1)(2n+2k)!}{(2k)!r^{2k}}+$$

$$+\frac{\alpha}{r^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2k+2)(2n+1+2k+1)!}{(2k+1)!r^{2k}}.$$

В результате мы получаем такое разложение:

$$t(r)=-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(-3+4\alpha-\alpha^2\right)+\frac{1}{r^6}\left(-5+16\alpha-18\alpha^2+8\alpha^3-\alpha^4\right)+$$

$$+\frac{1}{r^8}\left(-7+36\alpha-75\alpha^2+80\alpha^3-45\alpha^4+12\alpha^5\right)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(\alpha)}{r^{2n}},$$

где $p_n(\alpha)$ – многочлен от α, его степень в общем случае не равна n.

Вернемся в выражении для символа $t(\xi)$ к старым переменным, получим

$$t(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(1-ik_0)}{(i|\xi|)^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p_n(1-ik_0)}{|\xi|^{2n}}. \tag{9}$$

Из формулы (9) видно, что символ $t(\xi)$ является полиоднородным (классическим), а оператор ему отвечающий – полиоднородный (классический) ПДО.

Теперь мы можем выписать символ оператора T, рассматриваемого как ПДО:

$$\mathbf{t}(\xi)=t(\xi)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=t(\xi)\mathbf{I}.$$

Рассмотрим оператор $D=\left(k_0^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)$. Нетрудно показать, что символ $\mathbf{d}(\xi)$ оператора D, рассматриваемого как ПДО, будет равен

$$\mathbf{d}(\xi)=-\begin{pmatrix}\xi_1^2-k_0^2&\xi_1\xi_2&\xi_1\xi_3\\\xi_1\xi_2&\xi_2^2-k_0^2&\xi_2\xi_3\\\xi_1\xi_3&\xi_2\xi_3&\xi_3^2-k_0^2\end{pmatrix}.$$

По теореме о композиции $D\circ T$ – ПДО и асимптотическое разложение символа оператора $D\circ T$ есть $\mathbf{dt}(\xi)$ (теорема о композиции имеет место, поскольку оператор D является собственным):

$$\mathbf{dt}(\xi) = -t(\xi)\begin{pmatrix} \xi_1^2 - k_0^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 - k_0^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2 - k_0^2 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Уравнение (2) как псевдодифференциальное запишется в виде

$$A\mathbf{J} = \mathbf{E}^0, \qquad (11)$$

где

$$A\mathbf{J} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) - \mathbf{dt}(\xi)\right)\mathbf{J}(y)\,dyd\xi, \qquad (12)$$

где $\mathbf{dt}(\xi)$ определяется формулой (10).

4 Эллиптичность и фредгольмовость ПДО задачи

В этом пункте на основе изучения символа (10) оператора (12) мы покажем, что этот оператор при некоторых ограничениях является эллиптическим на Ω. Мы также докажем фредгольмовость этого оператора при дополнительном условии.

Пусть $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|\xi|^2}\begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим выражение $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) + \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})\right]\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x) = \mathbf{a}_0(x,\xi)$. Это выражение – главный символ исследуемого ПДО (12). Вычислим $\det\mathbf{a}_0(x,\xi)$, важно, чтобы он не обращался в нуль (см. определение в п. 3):

$$\det\mathbf{a}_0(x,\xi) = \det\left(\left[\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})\right]\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)\right) = \det\left(\mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})\right)\left(\det(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})\right)^{-1}.$$

Полагаем, что

$$\det(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I}) \neq 0, \; x \in \overline{\Omega} \qquad (13)$$

(это соответствует физическим ограничениям). Имеем для $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ представление в виде

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|\xi|^2}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1/|\xi| \\ \xi_2/|\xi| \\ \xi_3/|\xi| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1/|\xi| & \xi_2/|\xi| & \xi_3/|\xi| \end{pmatrix},$$

очевидно, можно положить $\frac{\xi_i}{|\xi|} = \cos\alpha_i$, где $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$.

Определитель $\det\mathbf{a}_0(x,\xi)$ отвечает за эллиптичность оператора A.

Введем следующие обозначения: $\mathbf{n}^{\mathrm{T}}=(\cos\alpha_1 \quad \cos\alpha_2 \quad \cos\alpha_3)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}=(\varepsilon_{1i} \quad \varepsilon_{2i} \quad \varepsilon_{3i})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}=a_i$. Теперь определитель $\det\left(\mathbf{I}+\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}-\mathbf{I}\right)\right)$ вычислить просто:

$$\det\left(\mathbf{I}+\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}-\mathbf{I}\right)\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha_1(a_1-\cos\alpha_1) & \cos\alpha_1(a_2-\cos\alpha_2) & \cos\alpha_1(a_3-\cos\alpha_3) \\ \cos\alpha_2(a_1-\cos\alpha_1) & 1+\cos\alpha_2(a_2-\cos\alpha_2) & \cos\alpha_2(a_3-\cos\alpha_3) \\ \cos\alpha_3(a_1-\cos\alpha_1) & \cos\alpha_3(a_2-\cos\alpha_2) & 1+\cos\alpha_3(a_3-\cos\alpha_3) \end{vmatrix}.$$

Используя свойства определителей и обозначения $\cos\alpha_i=b_i$, $a_i-\cos\alpha_i=c_i$, получаем следующее:

$$\det\left(\mathbf{I}+\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}-\mathbf{I}\right)\right)=\begin{vmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3 \\ b_2c_1 & 1+b_2c_2 & b_2c_3 \\ b_3c_1 & b_3c_2 & 1+b_3c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_2c_1 & 1+b_2c_2 & b_2c_3 \\ b_3c_1 & b_3c_2 & 1+b_3c_3 \end{vmatrix}.$$

Далее точно так же поступаем с каждой строкой, в которой есть элемент вида $1+a_ib_i$, получим сумму определителей, которые состоят только из элементов вида a_ib_i, 1 и 0. После простейших выкладок получаем окончательный результат:

$$\Delta(x)\equiv\det\left(\mathbf{I}+\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}-\mathbf{I}\right)\right)=\sum_{i,j=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\alpha_j\varepsilon_{ij}\neq 0,\ \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(x), x\in\overline{\Omega}. \quad (14)$$

Ограничение, о котором шла речь в начале этого пункта, – это отличие от нуля последнего определителя.

Из вышесказанного следует

Теорема 4.1. Оператор $A:H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega)\to H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, определенный по формуле (12), является эллиптическим ПДО при условиях (13) и (14).

Теперь докажем фредгольмовость этого оператора.

Определим пространства Соболева:

$$H^s(\Omega):=\left\{u\big|_{\Omega}:u\in H^s\left(\mathbb{R}^2\right)\right\} \text{ и } \tilde{H}^s\left(\overline{\Omega}\right):=\left\{u\in H^s\left(\mathbb{R}^2\right):\operatorname{supp}u\subset\overline{\Omega}\right\}.$$

Будем рассматривать указанные пространства при $s\geq 0$ исходя из физических соображений (условие конечности энергии в любом ограниченном объеме) [1].

Мы докажем при некоторых дополнительных условиях фредгольмовость с нулевым индексом оператора A в двух случаях. Представим A в виде $A=A_0+A'$, где A_0 определяется символом $\mathbf{a}_0(x,\xi)=\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)+\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\xi)$; A' – компактный оператор. Из формул (9) и (10) видно, что оператор A' действует из H^s в H^{s+2}. Поскольку H^{s+2} компактно вкладывается в H^s, то из этого следует компактность A'. Поскольку индекс фредгольмова оператора не меняется при прибавлении к нему компактного оператора, то нам достаточно доказать фредгольмовость с нулевым индексом оператора A_0.

Известно (см., например, [6]), что если ограниченный оператор A имеет вид $A = S + T$, где S – непрерывно обратим, а T – компактный, то A – фредгольмов оператор с нулевым индексом.

Нам остается доказать непрерывную обратимость оператора A_0.

Случай 1. Докажем, что $\operatorname{Re}(A_0 u, u) \geq C_0 \|u\|_0^2$. Это будет иметь место когда $\operatorname{Re}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x), u(x)\right) \geq C_1 \|u\|_0^2$. Действительно,

$$\operatorname{Re}(A_0 u, u) == \operatorname{Re}\int\limits_\Omega \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx +$$

$$+\operatorname{Re}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_\Omega\left(\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega e^{i(x-y)\cdot\xi}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\xi)u(y)\,dy\,d\xi\right)\cdot\overline{u(x)}\,dx =$$

$$= \operatorname{Re}\int\limits_\Omega \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx +$$

$$+\operatorname{Re}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_\Omega \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\xi)\left(\int\limits_\Omega e^{-iy\cdot\xi}u(y)\,dy\right)\cdot\left(\overline{\int\limits_\Omega e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx}\right)d\xi =$$

$$= \operatorname{Re}\int\limits_\Omega \widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx + \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_\Omega\left|\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\tilde{u}(\xi)\right|^2 d\xi \geq C_1\|u\|_0^2.$$

При проведении вычислений мы воспользовались известной теоремой Планшереля о переходе к образам Фурье в скалярном произведении (см., например, [7]). Поскольку теорема Планшереля имеет место для $s = 0$ (т.е. для пространства L_2), то фредгольмовость с нулевым индексом доказана в пространствах $H^0(\Omega)$.

Рассмотрим условие $\operatorname{Re}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x), u(x)\right) \geq C_1\|u\|_0^2$, имея в виду, что $\operatorname{Re}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x), u(x)\right) = \int\limits_\Omega \operatorname{Re}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x)\cdot\overline{u}(x)\right)dx$. Пусть $u = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{-1}v = \left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)v$.

Тогда

$$\operatorname{Re}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x)\cdot\overline{u}(x)\right) = \operatorname{Re} v\cdot\overline{\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)v} =$$

$$= \operatorname{Re}\overline{\overline{v}\cdot\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)v} = \operatorname{Re}\overline{v}\cdot\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)v = \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{Re}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)v\cdot\overline{v} - |v|^2.$$

Таким образом, условие $\operatorname{Re}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x), u(x)\right) \geq C_1\|u\|_0^2$ следует из

$$\operatorname{Re}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)v\cdot\overline{v} \geq (C_2 + 1)|v|^2,\ \text{при } x \in \overline{\Omega} \text{ и } C_2 > 0. \qquad (15)$$

Случай 2. Чтобы показать, что $\operatorname{Ker} A_0 = \{0\}$, достаточно (см., например, [8]) доказать, что $\operatorname{Im}(A_0 u, u) \geq C_0 \|u\|_0^2$. Последнее выполняется при условии $\operatorname{Im}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x), u(x)\right) \geq C_2 \|u\|^2$, $x \in \overline{\Omega}$. Вычисления здесь аналогичны случаю 1, но условия на тензор $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, которые мы получим в результате, будут другими.

Рассмотрим условие $-\operatorname{Im}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x), u(x)\right) \geq C_2 \|u\|^2$, имея в виду, что

$$-\operatorname{Im}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x), u(x)\right) = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{Im}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x) \cdot u(x)\right)dx .$$

Пусть $u = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{-1} v = \left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)v$. Тогда

$$-\operatorname{Im}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x) \cdot u(x)\right) = -\operatorname{Im} v\overline{\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)v} =$$

$$= -\operatorname{Im} \overline{\overline{v}\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)v} = \operatorname{Im} \overline{v}\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)v = \operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) v \cdot \overline{v} .$$

Таким образом, условие $\operatorname{Im}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)u(x), u(x)\right) \geq C_1 \|u\|^2$, $x \in \overline{\Omega}$, следует из

$$\operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) v \cdot \overline{v} \geq C_3 |v|^2 \text{ при } x \in \overline{\Omega} . \quad (16)$$

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия (13) и (14). Тогда, если дополнительно выполнено одно из двух условий (15) или (16), то оператор $A : \mathbf{L}_2(\Omega) \to \mathbf{L}_2(\Omega)$, определенный формулой (12), является фредгольмовым с нулевым индексом.

5 О компактности оператора *R*

Здесь мы докажем компактность матричного оператора R, состоящего из скалярных операторов R_m, с ядрами $g_l(|x-y|) + g^m(x,y)$ (см. формулу (5)).

Пусть Ω – область с бесконечно гладкой границей.

Теорема 5.1 [9]. Пространство $H^k(\Omega)$ компактно вкладывается в $C^l(\Omega)$, если $k - l > n/2$.

Ясно, что тогда и $\tilde{H}^k(\overline{\Omega})$ (см. обозначения в конце п. 4) компактно вкладывается в $C^l(\Omega)$ при тех же условиях.

Рассмотрим интегральный оператор с ядром $g_l(|x-y|)$. Функция $g_l(|x-y|)$ на области Ω является ограниченной, следовательно, и интегральный оператор будет ограниченным. Кроме того, т.к. функция $g_l(|x-y|) \in C^l(\Omega)$, то интегральный оператор с ядром $g_l(|x-y|)$ действует из $C^l(\Omega)$ в $C^l(\Omega)$. Тогда из теоремы 5.1 следует компактность этого оператора как оператора из $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$ в $C^l(\Omega)$ при $s > l + 3/2$. Легко показать, что тождественный оператор $I : C^k(\Omega) \to H^k(\Omega)$ является оператором вложения. Оператор вложения всегда ограничен. Из этого следует компактность интегрального оператора с ядром $g_l(|x-y|)$ из $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$ в $H^l(\Omega)$ при $s > l + 3/2$. Наличие оператора дифференцирования в композиции операторов не играет ключевой роли, поскольку гладкость функции $g_l(|x-y|)$ мы можем повысить до нужного порядка. Аналогичное утверждение (о компактности) будет иметь место и для оператора, отвечающего слагаемому $g^m(x,y)$ в формуле (5), поскольку это слагаемое бесконечно гладкое.

Таким образом, мы обосновали все этапы перехода от уравнения (2) к уравнению (11) и доказали, что оператор A, определенный формулой (12), является фредгольмовым с нулевым индексом при условиях (13), (14) и любом из условий (15) или (16).

Список литературы

1. **Самохин, А. Б.** Итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и связь, 1998.
2. **Smirnov, Yu. G.** Investigation of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / K. Kobayashi, Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 2009. – V. 70. – № 3. – P. 969–983.
3. **Егоров, Ю. В.** Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории / Ю. В. Егоров, М. А. Шубин // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Т. 31. Итоги науки и техники. – М. : ВИНИТИ, 1988. – С. 5–125.
4. **Шубин, М. А.** Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М. А. Шубин. – М. : Добросвет, 2005.
5. **Ремпель, Ш.** Введение в общую теорию индекса эллиптических краевых задач / Ш. Ремпель, Б.-В. Шульце. – М .: Мир, 1986.
6. **Като, Т.** Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972.
7. **Егоров, Ю. В.** Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы / Ю. В. Егоров. – М. : Изд-во Московского университета, 1985.
8. **Панич, О. И.** Введение в общую теорию эллиптических краевых задач / О. И. Панич. – Киев : Вища Школа, 1986.
9. **Мазья, В. Г.** Пространства Соболева / В. Г. Мазья. – Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1985.

Валовик Дмитрий Викторович
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

Valovik Dmitry Viktorovich
Candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

E-mail: dvalovik@mail.ru

Смирнов Юрий Геннадьевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: smirnovyug@mail.ru

Smirnov Yury Gennadyevich
Doctor of physico-mathematical sciences, professor, head of sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

УДК 517.958; 517.968.23

Валовик, Д. В.

Метод псевдодифференциальных операторов для исследования объемного сингулярного интегрального уравнения электрического поля / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 70–84.