N. N. Ural'tseva, Surfaces with inclination-dependent mean curvature,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 3, 231–241

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 3

Дорогому Людвигу Фаддееву
к юбилею

ПОВЕРХНОСТИ СО СРЕДНЕЙ КРИВИЗНОЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ НАКЛОНА[1]

Н. Н. Уральцева

§1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\varphi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — заданная гладкая функция. Дана также непрерывная по Гёльдеру функция $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$|f(x,p)| \leqslant c(1+|p|)^{-1}. \tag{1.1}$$

Через c здесь и ниже обозначаются различные константы, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$. Точки пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать через $X = (x, x_{n+1})$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$H[u] = f(x, u_x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.2}$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.3}$$

где $u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ — градиент неизвестной функции u, $H[u] = \operatorname{div} \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$ — средняя кривизна поверхности $(x, u(x))$, $x \in \Omega$, $u_x^2 = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2$. Другими словами, речь идет об отыскании непараметрической поверхности S с заданным краем, для которой ее средняя кривизна является заданной функцией точек $x \in \Omega$ и наклона, убывающей, когда наклон поверхности возрастает.

Следует отметить две существенные особенности этой задачи. Во-первых, в отличие от большинства работ, в которых изучалось уравнение (1.2), здесь не предполагается липшицевость f. Во-вторых, мы не предполагаем, что область Ω удовлетворяет условию Дженкинса–Серрина, которое в данном случае сводится к требованию положительности средней кривизны $H_{\partial\Omega}(x)$ поверхности $\partial\Omega$ относительно внутренней нормали при всех $x \in \partial\Omega$. Отметим лишь, что если бы это условие было выполнено, то для задачи (1.2), (1.3) можно было бы доказать существование классического решения, причем липшицевость $f(x,p)$ по переменным p гарантирует единственность решения.

В данной работе мы предполагаем, что множество

$$\partial_-\Omega = \{\, x \in \partial\Omega : H_{\partial\Omega}(x) < 0 \,\} \tag{1.4}$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований. Грант 93-011-1696.

не пусто. В этом случае задача (1.2), (1.3), вообще говоря, не имеет решения в обычном смысле, что хорошо известно уже для уравнения минимальной поверхности ($f \equiv 0$). Для $f = f(x)$ так же, как и для $f = f(x, y)$ было введено понятие обобщенного решения задачи (1.2), (1.3), имеющее естественную вариационную интерпретацию: оно минимизирует функционал

$$\int\limits_{\Omega} (\sqrt{1 + u_x^2} + \hat{f} u) dx + \int\limits_{\partial\Omega} |u - \varphi| dH_{n-1}$$

на классе $W_1^1(\Omega)$, где $\hat{f}(x, u) = \int_0^u f(x, t)\, dt$, H_{n-1} — $n-1$-мерная мера Хаусдорфа (см. [3]). Вариационная формулировка обеспечивает единственность такого решения. Если f — липшицева, то это обобщенное решение является гладкой функцией внутри Ω и удовлетворяет (1.2), а предписанные граничные значения φ может не принимать на части множества $\partial_-\Omega$.

Более детальному исследованию поведения обобщенного решения в точках отрыва от предписанных граничных значений посвящены работы [1, 2].

Если обратиться к уравнению (1.2), то для него, очевидно, нет естественного вариационного аналога. Поэтому мы вводим понятие обобщенного решения задачи (1.2), (1.3) с помощью процедуры регуляризации, которая, впрочем, является стандартной при изучении минимальных поверхностей.

Определение. Функция u называется обобщенным решением задачи (1.2), (1.3), если $u(x) = \lim u^\varepsilon(x)$, $x \in \Omega$, где предел берется по какой-либо последовательности $\varepsilon \searrow 0$, u^ε — решения регуляризованных задач

$$H[u^\varepsilon] + \varepsilon \Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon(x, u_x^\varepsilon) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.5}$$

$$u^\varepsilon = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.6}$$

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $f^\varepsilon : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, удовлетворяющие равномерной оценке

$$|f^\varepsilon(x, p)| \leqslant c(1 + |p|)^{-1} \tag{1.7}$$

и сходящиеся при $\varepsilon \to 0$ к f в C^α на компактных подмножествах $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Именно такой подход к решению задачи (1.2), (1.3) использовался в работе [4], где результаты Л. Саймона [1], касающиеся поведения минимальной поверхности вблизи $\partial_-\Omega$, распространялись на обобщенные решения u задачи (1.2), (1.3). В [4] установлены гёльдеровская непрерывность u и ограниченность касательных производных u вплоть до Γ, где Γ — произвольный компакт на $\partial_-\Omega$. Как следствие, отсюда вытекает липшицевость следа решения u на Γ. Строго говоря, в [4] дополнительно предполагались непрерывная дифференцируемость f в $\Omega \times \mathbb{R}^n$ и соответствующая сходимость производных функций f^ε. Это гарантировало $C^{2+\alpha}(\Omega)$ — гладкость и выполнение уравнения (1.2) в каждой точке $x \in \Omega$. Однако можно отказаться от требования $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, заменив его условием $f \in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Существенно, что в [4] не использовались никакие ограничения на производные фукнций f^ε, что, в частности, позволило применить эти результаты к решению эволюционной задачи о движении непараметрической поверхности под действием средней кривизны.

В данной работе продолжено изучение свойств обобщенного решения эллиптической задачи (1.2), (1.3) в окрестности точек $x \in \partial_-\Omega$. Заметим, что для $f \equiv 0$

(минимальная поверхность), а также для случая липшицевой в $\bar{\Omega}$ функции $f = f(x)$ имеются исчерпывающие результаты на этот счет [2]. Наша цель, как и в [4], состояла в замене требования гладкости f условием убывания при $|p| \to \infty$.

Ниже под $u = u(x)$ всегда подразумевается обобщенное решение задачи (1.2), (1.3) и используются следующие обозначения

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \{\, x \in \partial\Omega : u(x) > \varphi(x)\,\},\\ \Gamma_- &= \{\, x \in \partial\Omega : u(x) < \varphi(x)\,\},\\ \Sigma_+ &= \{\, X : x \in \Gamma_+, \varphi(x) < x_{n+1} \leqslant u(x)\,\},\\ \Sigma_- &= \{\, X : x \in \Gamma_-, u(x) \leqslant x_{n+1} < \varphi(x)\,\},\\ \operatorname{graph} u &= \{\, X : x \in \Omega, x_{n+1} = u(x)\,\},\\ S &= \operatorname{graph} u \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-.\end{aligned}$$

Относительно u известно, что $u \in W_1^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда $H_{\partial\Omega}(x) \neq 0$ на $\partial\Omega$, т.е. когда замыкания компонент границы $\partial_-\Omega$ и $\partial_+\Omega = \{\, x \in \partial\Omega : H_{\partial\Omega}(x) > 0\,\}$ не пересекаются. В этом случае, как следует из результатов [4, 3], $u \in C^\beta(\bar{\Omega})$, вблизи $\partial_-\Omega$ ограничен касательный градиент u, $u \in C^{1+\alpha}(\Omega \cup \partial_+\Omega)$ и $u = \varphi$ на $\partial_+\Omega$. Множества $\Gamma_\pm$, если они не пусты, содержатся в $\partial_-\Omega$. Геометрически обобщенное решение представляется поверхностью S в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая помимо графика функции u содержит еще участки $\Sigma_\pm$ вертикального цилиндра $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Ясно, что край поверхности S совпадает с предписанным множеством $\partial S = \{\, X : x \in \partial\Omega, x_{n+1} = \varphi(x)\,\}$.

Основной результат работы состоит в доказательстве того, что S есть поверхность класса W_q^2, $\forall q < \infty$, т.е. что для любой точки $(x, x_{n+1}) \in S$ существует ее окрестность $\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ такая, что в местной системе координат $S \cap \mathcal{O}$ представимо графиком функции $v \in W_q^2$. Поскольку S есть объединение $\operatorname{graph} u$ и бесконечно дифференцируемых многообразий $\Sigma_\pm$, то проблема состояла только в исследовании гладкости S в точках подмногообразий $\sigma_\pm = \Sigma_\pm \cap \overline{\operatorname{graph} u}$, которые, как вытекает из теоремы 1 [4], являются графиками липшицевых функций над Γ_+ и Γ_- соответственно.

Здесь не обсуждается вопрос о единственности обобщенного решения задачи (1.2), (1.3), но заметим, что для единственности необходима дополнительная гладкость f, в частности, липшицевость $f(x,p)$ по p.

§2. C^1-гладкость поверхности S

Будем использовать следующие обозначения. $d(x) = \operatorname{dist}\{x; \partial\Omega\}$, $\Omega_\delta = \{\, x \in \Omega : d(x) > \delta\,\}$; $\gamma(x) = (\gamma^1(x), \dots, \gamma^n(x))$ — единичный вектор нормали к $\partial\Omega$ в $x \in \partial\Omega$, внешней по отношению к Ω. Для $p \in \mathbb{R}^n$ полагаем

$$F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}, \quad F_i(p) = \frac{\partial F(p)}{\partial p_i} = \frac{p_i}{F(p)}.$$

Фиксируем функцию $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ и определим для произвольной $v \in L_1(\Omega)$ функционал

$$e(v) = \sup \int_\Omega [\theta_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} v] dx - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \theta_i \gamma^i \varphi \, dH_{n-1}, \tag{2.1}$$

где супремум берется по всем $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_n) \in [C^\infty(\Omega)]^{n+1}$ таким, что $\sum_{i=0}^n \theta_i^2 \leqslant 1$.

Известно, что (см.[5]) функционал e полунепрерывен снизу относительно сходимости в $L_1(\Omega)$, принимает конечные значения только на фукнциях $v \in BV(\Omega)$, а на функциях $v \in W_1^1(\Omega)$ принимает вид

$$e(v) = \int_\Omega \sqrt{1+v_x^2}dx + \int_{\partial\Omega} |v-\varphi| dH_{n-1}. \tag{2.2}$$

Всюду ниже u — обобщенное решение задачи (1.2), (1.3), т.е.

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u^\varepsilon(x), \tag{2.3}$$

где u^ε удовлетворяют (1.5), (1.6), $f^\varepsilon \to f$ в C^α на компактных подмножествах $\Omega \times \mathbb{R}^n$ и выполнено (1.7). Напомним, что для u^ε имеются следующие равномерные по ε оценки

$$\int_\Omega F(u_x^\varepsilon)dx \leqslant c, \quad \sup_\Omega |u^\varepsilon| \leqslant c, \tag{2.4}$$

$$\sup_{\Omega_\delta} |u_x^\varepsilon| \leqslant c(\delta), \quad \|u_{xx}^\varepsilon\|_{C^\alpha(\Omega_\delta)} \leqslant c(\delta) \quad \forall\delta > 0, \tag{2.5}$$

и при $\varepsilon \to 0$ имеют место сходимости $u_{x_i x_j}^\varepsilon \to u_{x_i x_j}$ равномерно на компактах в $\Omega \cup \partial_+\Omega$, $u^\varepsilon \to u$ в $L_q(\Omega)$, $\forall q < \infty$. Кроме того, предельная функция u удовлетворяет (1.2), $u \in W_1^1(\Omega)$,

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial_+\Omega \tag{2.6}$$

и для некоторых $\beta \in (0,1)$ и $\delta > 0$

$$u \in C^\beta(\bar\Omega), \tag{2.7}$$

$$\sup_{\Omega \setminus \Omega_\delta} [|u_x(x)|^2 - (u_x(x) \cdot d_x(x))^2] \leqslant c. \tag{2.8}$$

Следуя [5], можно доказать, что справедлива

Лемма 2.1. *При любой $w \in W_1^1(\Omega)$ функция u удовлетворяет соотношению*

$$\int_\Omega [F_i(u_x)w_{x_i} + f(x,u_x)w]dx + \int_{\partial\Omega} \sigma w dH_{n-1} = 0, \tag{2.9}$$

где $\sigma(x) \in \operatorname{sign}[u(x) - \varphi(x)]$.

Доказательство. Из уравнения (1.5) выводим, что при произвольной $v \in W_1^1(\Omega)$, удовлетворяющей условию

$$v = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2.10}$$

имеет место равенство

$$\int_\Omega [F_i(u_x^\varepsilon)(v_{x_i} - u_{x_i}^\varepsilon) + \varepsilon u_{x_i}^\varepsilon(v_{x_i} - u_{x_i}^\varepsilon) + f^\varepsilon(x, u_x^\varepsilon)(v - u^\varepsilon)]dx = 0,$$

из которого, в свою очередь, ввиду выпуклости F вытекает неравенство

$$e(v) - e(u^\varepsilon) + \int_\Omega [\varepsilon u_{x_i}^\varepsilon v_{x_i} + f^\varepsilon(x, u_x^\varepsilon)(v - u^\varepsilon)]dx \geqslant 0.$$

В силу сказанного выше здесь можно перейти к пределу по $\varepsilon \to 0$, в результате чего приходим к неравенству

$$e(v) - e(u) + \int\limits_{\Omega} f(x, u_x)(v - u)dx \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Теперь можно избавиться от ограничения (2.10). Для этого в случае произвольной $v \in W_1^1(\Omega)$ сначала подставляем в (2.11) вместо v функцию $v_{(m)}(x) = \varphi(x) + [v(x) - \varphi(x)]\min\{1; md(x)\}$, где φ — гладкое продолжение φ в Ω, а затем устремляем m к бесконечности (см. [5]). В результате убеждаемся, что неравенство (2.11) верно при любой $v \in W_1^1(\Omega)$.

Пусть теперь $w \in W_1^1(\Omega)$, $\lambda > 0$. Положим в (2.11) $v = u + \lambda w$, разделим результат на λ и устремим λ к нулю, замечая, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}(|u + \lambda w - \varphi| - |u - \varphi|) = \sigma w, \quad \sigma \in \operatorname{sign}(u - \varphi).$$

Это приведет к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} [F_i(u_x)w_{x_i} + f(x, u_x)w]dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma w dH_{n-1} \geqslant 0,$$

и поскольку в нем можно менять знак w, то оно эквивалентно (2.9).

Фиксируем точку $x^0 \in \Gamma_+ (x^0 \in \Gamma_-)$ и столь малый шар $B_\rho(x^0)$, что $\partial\Omega \cap B_\rho(x^0)$ содержится в Γ_+ (соответственно в Γ_-). Обозначим

$$\begin{gathered} \Gamma = \partial\Omega \cap B_\rho(x^0), \quad \omega = B_\rho(x^0) \cap \Omega; \\ \omega_\delta = \{\, x \in \omega : d(x) > \delta \,\}; \quad \Gamma_\delta = \partial\omega_\delta \cap B_\rho(x^0). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Считая $\delta > 0$ достаточно малым, возьмем в (2.9) в качестве w усредненную характеристическую функцию шара $B_{\rho - 2\sqrt{\delta}}(x^0)$ с радиусом усреднения равным $\sqrt{\delta}$, так что $\operatorname{supp} w \subset B_\rho(x^0)$, $\sup\limits_{\Omega}|w_x| \leqslant c\delta^{-1/2}$. Интеграл по области Ω в левой части (2.9) представим в виде суммы интеграла по $\omega \setminus \omega_\delta$ и интеграла по ω_δ и в последнем произведем интегрирование по частям. С учетом уравнения (1.2) это даст

$$\int\limits_{\omega \setminus \omega_\delta} [F_i(u_x)w_{x_i} + f(x, u_x)w]dx + \int\limits_{\Gamma_\delta} F_i(u_x)\gamma^i w dH_{n-1} + \int\limits_{\Gamma} \sigma w dH_{n-1} = 0. \tag{2.13}$$

Принимая во внимание вид функции w, можно при малых δ записать (2.13) в следующей форме:

$$\int\limits_{\Gamma_\delta} F_i(u_x)\gamma^i dH_{n-1} + \int\limits_{\Gamma} \sigma dH_{n-1} = 0(\sqrt{\delta}). \tag{2.14}$$

Напомним, что $\sigma \in \operatorname{sign}(u - \varphi)$.

Таким образом, доказана

Лемма 2.2. *Пусть $B_\rho(x^0)$ — шар с центром на $\partial\Omega$, Γ и Γ_δ определены в (2.12) и Γ целиком содержится в Γ_+ или Γ_-. Тогда существует предел*

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Gamma_\delta} F_i(u_x)\gamma^i dH_{n-1} = \begin{cases} -|\Gamma|, & \textit{если} \quad \Gamma \subset \Gamma_+, \\ |\Gamma|, & \textit{если} \quad \Gamma \subset \Gamma_-, \end{cases}$$

где $|\Gamma| = H_{n-1}(\Gamma)$ — $(n-1)$*-мерная мера* Γ.

Теперь рассмотрим шар B в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\Omega \Subset B$, и введем обозначения

$$C = B \times \mathbb{R}; \quad L = (B \setminus \Omega) \times \mathbb{R};$$
$$U_+ = \{ X \in \Omega \times \mathbb{R} : x_{n+1} > u(x) \} \text{ — надграфик } u,$$
$$U_- = \{ X \in \Omega \times \mathbb{R} : x_{n+1} < u(x) \} \text{ — подграфик } u$$

Для множеств $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ определим функционал

$$I(E) = \int\limits_C |D\chi_E| + \int\limits_C \chi_E(x)g(x)dx, \tag{2.15}$$

где χ_E — характеристическая функция множества E,

$$g(x) = f(x, u_x(x)). \tag{2.16}$$

Пусть $B_\rho(x^0)$ шар из леммы 2.2, $K_\delta = F_i(u_x)\gamma^i|_{\Gamma_\delta}$. Из уравнения (1.2) следует, что функция u минимизирует функционал

$$\int\limits_{\omega_\delta} \sqrt{1+\tilde{u}_x^2}dx + \int\limits_{\omega_\delta} g\tilde{u}dx - \int\limits_{\Gamma_\delta} K_\delta \tilde{u} dH_{n-1} \tag{2.17}$$

в классе липшицевых функций $\tilde{u}$, совпадающих с u на $\partial\omega_\delta \setminus \Gamma_\delta$ (см. (2.12). Тогда множество U_- дает минимум функционалу

$$\int\limits_{\omega_\delta \times \mathbb{R}} |D\chi_E| + \int\limits_{\omega_\delta \times \mathbb{R}} g(x)\chi_E(X)dX - \int\limits_{\Gamma_\delta \times \mathbb{R}} K_\delta(x)\chi_E(x)dH_{n-1}dx_{n+1}$$

относительно локальных вариаций в $(\omega_\delta \cup \Gamma_\delta) \times \mathbb{R}$. Повторяя далее рассуждения из доказательства леммы 2.3 из работы Е. Джусти [6] и используя лемму 2.2, убеждаемся, что если $\Gamma \subset \Gamma_-$, то

$$I(U_- \cup L) \leqslant I(V \cup L),$$

где $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — произвольное множество Каччополи такое, что $\operatorname{supp}(\chi_{U_-} \setminus \chi_V) \subset (\omega \subset \Gamma) \times (-\varkappa, \varkappa)$ с достаточно малым $\varkappa > 0$. Другими словами, множество $U_- \cup L$ минимизирует функционал (2.15) относительно локальных вариаций при наличии препятствия L. Из результатов [7] следует тогда, что в окрестности L граница локально минимального множества $U_- \cup L$ является поверхностью класса C^1. Иначе говоря, если $x^0 \in \Gamma_-$, то в окрестности точки $X^0 = (x^0, u(x^0))$ поверхность S является C^1-гладкой.

Точно так же проверяется, что если $\Gamma \subset \Gamma_+$, то $U_+ \cup L$ локально минимально для функционала J при наличии препятствия L, а это тоже влечет C^1-гладкость поверхности S в окрестности $(x^0, u(x^0))$, $x^0 \in \Gamma_+$.

Итак, доказана

Теорема 1.1. *Для любой точки* $x_0 \in \Gamma_+(\Gamma_-)$ *существует окрестность* $\mathcal{O}$ *точки* $(x^0, u(x^0))$ *в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *такая, что* $S \cap \mathcal{O}$ *есть поверхность класса* C^1.

Следствие. *Если* $x^0 \in \Gamma_+(\Gamma_-)$, *тогда существует предел*

$$\lim_{\substack{x\in\Omega \\ x\to x^0}} u_x(x)\cdot d_x(x) = +\infty(-\infty), \tag{2.18}$$

причем стремление к пределу равномерно относительно x^0 *на любой компактной части* $\Gamma_+(\Gamma_-)$.

Действительно, в точках $X \in \operatorname{graph} u$ нормаль $\nu(X)$ к поверхности S, внешняя по отношению к U_-, равна

$$\nu(X) = \left(\frac{-u_{x_1}}{F(u_x)}, \dots, \frac{-u_{x_n}}{F(u_x)}, \frac{1}{F(u_x)}\right),$$

а нормаль, внешняя по отношению к U_+, равна $-\nu(X)$. В силу теоремы 1.1 при $x \to x^0$

$$\nu(X) \to \nu(X^0) = -\gamma(x^0), \quad \text{если} \quad x^0 \in \Gamma_-,$$
$$-\nu(X) \to -\gamma(x^0), \quad \text{если} \quad x^0 \in \Gamma_+,$$

причем вектор $\gamma(x^0)$ имеет нулевую проекцию на ось x_{n+1}. Поэтому $|u_x(x)| \to \infty$,

$$\frac{-u_x(x)\cdot d_x(x)}{\sqrt{1+u_x^2}} = \nu(X)\cdot d_x(x) \to \begin{cases} |\gamma(x^0)|^2 = 1, & x^0 \in \Gamma_-, \\ -1, & x^0 \in \Gamma_+ \end{cases}$$

при $x \to x^0$. Это эквивалентно (2.18), а утверждение о равномерной сходимости к пределу в (2.18) следует из того, что $\nu(x)$ сходится к $\nu(x^0)$ равномерно на компактах в $\Gamma_+(\Gamma_-)$.

§3. W_q^2 — гладкость S

Рассмотрим какую-либо точку $X^0 = (x^0, u(x^0))$ на многообразии σ_+ или σ_- и, не ограничивая общности, предположим, что x^0 — начало координат в $\mathbb{R}^n$, а направление оси x_n совпадает с направлением внутренней по отношению к Ω нормали к $\partial\Omega$ в точке x^0, т.е. $-\gamma(x^0) = (0, \dots, 0, 1)$. Пусть $x_n = \psi(x')$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $|x'| < \rho$, есть уравнение $\partial\Omega$ в окрестности x^0, $b(x') := u(x', \psi(x'))$ есть след u на $\partial\Omega$. Напомним, что b — липшицева функция, $\psi \in C^\infty$ и $\psi(0) = 0$.

Удобнее с точкой X^0 связать местную декартову координатную систему в $\mathbb{R}^{n+1}$, в которой окрестность в S точки X^0 задавалась бы явным уравнением

$$y_{n+1} = v(y), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in B_\rho = B_\rho(O) \tag{3.1}$$

с некоторым $\rho = \rho(X^0) > 0$ и $v \in C^1(B_\rho)$. Для этого рассмотрим область $D = \{\, x = (x', x_n) \in \Omega : |x'| < \rho;\ \psi(x') < x_n < \psi(x') + \rho \,\}$. Для определенности будем считать, что $X^0 \in \sigma_+$. Относительно u известно, что $u \in C^\beta(\bar{D}) \cap C^{2+\alpha}(D)$, ее нормальная производная $u_x(x)\cdot d_x(x)$ стремится к $+\infty$ при $x_n \to \psi(x')$, а касательные производные ограничены. Можно считать ρ столь малым, что $\partial D \cap \partial\Omega \subset \Gamma_+$,

$$\inf_D u_{x_n} \geqslant 1, \tag{3.2}$$

$$u_{x_n}(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad x \in D, \quad x_n \to \psi(x'). \tag{3.3}$$

Из непрерывности u в $\bar{D}$ и строгой монотонности по переменной x_n следует, что уравнение

$$x_{n+1} = u(x', x_n), \quad x \in D, \tag{3.4}$$

однозначно разрешимо относительно x_n, т.е. для некоторой непрерывной функции v при $|x'| < \rho$, $b(x') < x_{n+1} < \hat{b}(x') := u(x', \psi(x') + \rho)$ тождественно выполняется соотношение

$$x_{n+1} = u(x', v(x', x_{n+1})). \tag{3.5}$$

Сделаем замену координат в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$y' = x', \quad y_n = x_{n+1}, \quad y_{n+1} = x_n,$$

тогда уравнение (3.4) эквивалентно уравнению $y_{n+1} = v(y', y_n)$ в области $\hat{D} = \{\, y = (y', y_n) : |y'| < \rho,\ b(y') < y_n < \hat{b}(y') \,\}$. При этом v принадлежит $C^2(\hat{D})$ и удовлетворяет условиям

$$\psi(y') < v(y', y_n) < \psi(y') + \rho,$$

$$v_{y_n}(y) = \frac{1}{u_{x_n}(y', v(y))} \leqslant 1 \quad \text{в} \quad \hat{D},$$

$$v(y) \to \psi(y'), \quad v_{y_n}(y) \to 0 \quad \text{при} \quad y_n \to b(y'). \tag{3.6}$$

Доопределим функцию v для значений $y_n \leqslant b(y')$, полагая

$$v(y) = \psi(y') \quad \text{при} \quad |y'| < \rho, \quad y_n \leqslant b(y'). \tag{3.7}$$

Таким образом, уменьшая несколько ρ, мы представим часть поверхности S, заключенную в шаре радиуса ρ с центром в точке X^0 в $\mathbb{R}^{n+1}$, с помощью уравнения (3.1) с функцией v, определяемой неявным уравнением (3.5) в $\hat{D}$ и соотношением (3.7) для $y \in B_\rho \setminus \hat{D}$. Из построения v и, в частности, из (3.6), (3.7) следует, что $v \in C^1(B_\rho)$. Это же, впрочем, вытекает из непрерывной дифференцируемости S.

Введем обозначения

$$N = \{\, y \in B_\rho : v(y) > \psi(y') \,\}, \tag{3.8}$$

$$\Lambda = \{\, y \in B_\rho : v(y) = \psi(y') \,\}, \quad \sigma = \Lambda \cap \bar{N} \tag{3.9}$$

и заметим, что $v \in C^2(N) \cap C^1(B_\rho) \cap C^\infty(\Lambda)$, $\sigma = \{\, y \in B_\rho : y_n = b(y') \,\}$.

Лемма 3.1. *Функция v удовлетворяет уравнению*

$$-H[v] = g \quad \textit{п.в. в} \quad N, \tag{3.10}$$

где $H[v] = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{v_{y_i}}{F(v_y)}\right)$, $g(y) = f(x, u_x(x))|_{x_n = v(y)}$, *причем* $g \in C(N) \cap L_\infty(N)$,

$$g(y) \to 0 \quad \textit{при} \quad y \in N, \quad \operatorname{dist}(y; \sigma) \to 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Утверждение леммы есть по существу следствие условий (1.2), (1.1) и, в частности, геометрического характера этих условий. Тем не менее нетрудно убедиться в справедливости (3.10), (3.11) с помощью непосредственных вычислений, принимая во внимание следующие соотношения между производными $u_i := u_{x_i}$, $u_{ij} := u_{x_i x_j}$, $v_i := v_{y_i}$, $v_{ij} := v_{y_i y_j}$ функций $u(x)$ и $v(y)$:

$$u_n = v_n^{-1}, \quad u_\tau = -v_n^{-1} v_\tau,$$

$$u_{nn} = -v_n^3 v_{nn}; \quad u_{n\tau} = -v_n^{-2} v_{n\tau} + v_n^{-3} v_{nn} v_\tau,$$

$$u_{\mu\tau} = v_n^{-2}(v_{\tau n} v_\mu + v_{\mu n} v_\tau) - v_n^{-3} v_{nn} v_\tau v_\mu - v_n^{-1} v_{\tau\mu},$$

где греческими буквами обозначаются индексы $\tau, \mu = 1, \ldots, n-1$. Заметим также, что $H[u] = (1 + u_x)^{-1/2}\left(\delta_i^j - \frac{u_i u_j}{1 + u_x^2}\right) u_{ij}$.

Лемма 3.2. *Существует* $\beta \in (0,1)$, *зависящее только от* $\sup_B |v_g|$ *и от* σ *такое, что* $v \in C^{1+\beta}(B_\rho)$.

Доказательство. Из уравнения (3.10) легко вывести, что для производных $w = v_{y_m}$, $m = 1, \ldots, n$, функции v выполняется интегральное тождество

$$\int_N (a^{ij} w_{y_j} + g\delta^i_m)\eta_{y_i} dy = 0 \tag{3.12}$$

при произвольной $\eta \in W^1_2(N)$ с компактным носителем в N. Здесь $(a^{ij}(y)) = \left(\frac{\partial^2 F(v_y)}{\partial v_i \partial v_j}\right)$ — непрерывная равномерно положительно определенная в N матрица, $g \in L_\infty(N)$. Принимая во внимание липшицевость σ и гладкость $w|_\sigma = \psi_{y_m}$, можно утверждать, что для любой точки $y^0 \in N$

$$\operatorname{osc}\{w; B_r(y^0) \cap N\} \leqslant c\left(\frac{r}{r_0}\right)^\beta, \tag{3.13}$$

где $r_0 = \operatorname{dist}\{y^0, \partial N \setminus \sigma\}$, а константа $c = c(\sup_N |v_y|; \sup_N |g|, \sigma)$. Строго говоря, оценка (3.13) для решений тождества (3.12) известна лишь при условии, что $w \in W^1_2(N)$, а такой информацией мы не располагаем. Однако доказательство оценки (3.13) в [8] применимо и к решениям $w \in W^1_{2\,\mathrm{loc}}(N) \cap C(\bar N)$ и, следовательно, к $w = v_{y_m}$, $m = 1, \ldots, n$.

Утверждение о гёльдеровской непрерывности v_{y_m} во всем шаре B_ρ вытекает из (3.13) и того, что $v \in C^1(B_\rho)$, $v_{y_m}|_\Lambda = \psi_{y_m} \in C^\infty(\Lambda)$.

Рассмотрим теперь функцию v как решение линейного уравнения

$$Lv := -a^{ij}(y)v_{y_i y_j} = g(y) \quad \text{в} \quad B_\rho \setminus \sigma, \tag{3.14}$$

где $a^{ij}(y)$ те же, что в лемме 3.2,

$$g(y) = \begin{cases} f(x, u_x(x))|_{x_n = v(y)} & \text{при } y \in N, \\ -H[\psi](y') & \text{при } y \in \Lambda. \end{cases}$$

Поскольку из $y \in \Lambda$ следует $x \in \partial_-\Omega$, то $-H[\psi](y') = -H_{\partial\Omega}(x) > 0$ при $y \in \Lambda$.

Таким образом,

$$g(y) \geqslant c_0 > 0 \quad \text{на} \quad \Lambda. \tag{3.15}$$

Отсюда и из (3.11) следует, что функция g имеет скачок на свободной поверхности σ. В силу леммы 3.2 коэффициенты $a^{ij} \in C^\beta(B_\rho)$.

Теорема 3.1. *Функция* v *принадлежит* $W^2_{q,\mathrm{loc}}(B_\rho)$ $\forall q < \infty$.

Доказательство. Фиксируем произвольный шар $B \Subset B_\rho$ и для каждого достаточно малого $\delta > 0$ построим две функции $v_{(\delta)}$ и $v^{(\delta)}$, принадлежащие $W^2_{q,\mathrm{loc}}(B) \cap C^1(\bar B)$, $\forall q < \infty$, и такие, что

$$v_{(\delta)}(y) \leqslant v(y) \leqslant v^{(\delta)}(y) \quad \text{в} \quad \bar B, \tag{3.16}$$

$$\sup_B |v^{(\delta)} - v_{(\delta)}| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0, \tag{3.17}$$

$$\sup_B |v^{(\delta)}_y| + \sup_B |v_{(\delta)y}| \leqslant c, \tag{3.18}$$

$$\|v^{(\delta)}\|_{W^2_q(B')} + \|v_{(\delta)}\|_{W^2_q(B')} \leqslant c(q, B') \quad \forall B' \Subset B. \tag{3.19}$$

Оценки (3.17)-(3.19) обеспечат тогда равномерную в $\bar{B}$ сходимость для некоторой последовательности $\delta \to 0$ функций $v^{(\delta)}$ и $v_{(\delta)}$ к функции $\tilde{v} \in W^2_{q,\mathrm{loc}}(B) \cap C(\bar{B})$, а из неравенств (3.16) будет следовать совпадение $v = \tilde{v}$ в B. В качестве таких функций мы возьмем решения следующих задач Дирихле:

$$\begin{cases} Lv^{(\delta)} = g^{+\delta} & \text{в } \ B, \\ v^{(\delta)} = v & \text{на } \ \partial B; \end{cases} \quad \begin{cases} Lv^{-\delta} = g_{(\delta)} & \text{в } \ B; \\ v_{(\delta)} = v & \text{на } \ \partial B, \end{cases} \tag{3.20}$$

Обе задачи (3.20) однозначно разрешимы в $W^2_{q,\mathrm{loc}}(B) \cap C^1(\bar{B})$, $\forall q < \infty$, и для их решений справедливы равномерные относительно δ оценки (3.18)–(3.19). Утверждение (3.17) следует из (3.20) и оценки А. Д. Александрова

$$\sup_B |v^{(\delta)} - v_{(\delta)}| \leqslant c\delta.$$

Осталось доказать (3.16). Для этой цели заметим, что каждая из функций $w = v - v^{\delta}$ и $w = v_{(\delta)} - v$ принадлежит $W^2_{q,\mathrm{loc}}(B \setminus \sigma) \cap C^1(\bar{B})$, $\forall q < \infty$, обращается в нуль на ∂B и удовлетворяет неравенству $Lw < 0$ почти всюду в B. Кроме того, нормальное отображение функции w определяемое равенством

$$\Psi_w(y) = w_y(y), \quad y \in B, \tag{3.21}$$

абсолютно непрерывно на Λ, и поэтому множество $\Psi_w(\sigma)$ имеет n-мерную лебегову меру нуль. Ниже, в приложении, будет показано, что к таким функциям применим принцип максимума. Это дает требуемое неравенство $w \leqslant 0$ в B, которое эквивалентно (3.16). •

§4. Приложение

Принцип максимума. *Пусть σ — замкнутое подмножество в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $L = -a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ — равномерно эллиптический оператор с измеримыми ограниченными коэффициентами в Ω. Предположим, что функция w обладает следующими свойствами:*

1°. $w \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap W^2_{q,\mathrm{loc}}(\Omega \setminus \sigma)$;

2°. $|\Psi_w(\sigma)|_n := |\{ p \in \mathbb{R}^n : p = w_x(x),\ x \in \sigma \}|_n = 0$, *где* $|\mathcal{E}|_n$ *обозначает n-мерную лебегову меру множества* $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$;

3°. $Lw < 0$ *почти всюду в* $\Omega \setminus \sigma$;

4°. $w \leqslant 0$ *на* $\partial\Omega$.

Тогда $w \leqslant 0$ *в* Ω.

Доказательство. Предположим, что $h = \sup_\Omega w > 0$ и определим верхнее контактное множество K^+ для функции w

$$K^+ = \{ z \in \Omega : w(z) + w_z(z) \cdot (x - z) \geqslant w(x),\ \forall x \in \Omega \}. \tag{4.1}$$

Легко проверить, принимая во внимание 4°, что $B_{h/d}(0) \subset \Psi_w(K^+)$, $d = \operatorname{diam}\Omega$, и поэтому

$$|B_{h/d}|_n \leqslant |\Psi_w(K^+)|_n. \tag{4.2}$$

Пусть $z \in K^+ \cap (\Omega \setminus \sigma)$. Тогда существует $\delta = \delta(z) > 0$ такое, что $B_\delta(z) \subset (\Omega \setminus \sigma)$, $w \in W^2_n(B_\delta(z))$. Более того, в силу (4.1) z есть точка максимума функции $\tilde{w}(x) = w(x) - w_z(z) \cdot x$, $x \in B_\delta(z)$. Тогда по принципу максимума Александрова-Бони справедливо неравенство $\operatorname{ess\,sup}_{B_\delta(z)} L\tilde{w} \geqslant 0$, которое противоречит условию 3°.

Таким образом, множество $K^+ \cap (\Omega \setminus \sigma)$ пусто, т.е. $K^+ \subset \sigma$. Отсюда и условия 2° получаем

$$|\Psi_w(K^+)|_n \leqslant |\Psi_w(\sigma)|_n = 0.$$

Вместе с неравенством (4.2) это противоречит предположению, что $h > 0$.

Список литературы

[1] Simon L., *Boundary regularity for solutions of the nonparametric least area problem*, Ann. Math. **103** (1976), 429–455.

[2] Lin F. H., *Boundary Behavior of Solutions of Area-Type Problems*, Comm. Pure App. Math. **XLI** (1988), 497–502.

[3] Miranda M., *Dirichlet Problem with L Data for the Nonhomogeneous Minimal Surface Equation*, Ind. Univ. J. **24** (1974), no. 3.

[4] Uraltseva N. N., *Boundary regularity for flows of nonparametric surfaces driven by mean curvature.*

[5] Lishnewsky, Temam R., *Pseudosolutions of the Time-Dependent Minimal Surface Problem*, J. Diff. Equat. **30** (1978), 340–364.

[6] Giusti E., *On the Equation of Surfaces of Prescribed Mean Curvature*, Inv. Math. **46** (1978), 111–137.

[7] Emmer M., *Superfici di curvatura media assegnata con ostocolo*, Ann. Math. Pura Appl **109** (1976), 371–389.

[8] Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N., *Linear and quasi-linear elliptic equations*, Acad. Press **46** (1968).

Поступило 3 марта 1994 г.