С. Я. Новиков, Котип и тип функциональных пространств Лоренца, *Матем. заметки*, 1982, том 32, выпуск 2, 213–221

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 32, № 2 (1982)

КОТИП И ТИП ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

С. Я. Новиков

1. **Введение.** Пусть $r_j(t) = \operatorname{sign}\sin 2^j\pi t$, $j = 1, 2, \ldots$, — последовательность функций Радемахера. Банахово пространство X, по определению, имеет котип q ($q \in [2, \infty)$) (соответственно, тип p ($p \in (1, 2]$)), если существует $K \in (0, \infty)$ такое, что для любого n и для любого набора элементов $\{x_j\}_{j=1}^n$ из X выполнено неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q\right)^{1/q} \leqslant K \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)\, x_j\right\| dt$$

(соответственно,

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)\, x_j\right\| dt \leqslant K \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p}\Bigg)$$

(см. [1]—[3]). Пространства L_p ($1 \leqslant p < \infty$) имеют котип $\max(2, p)$ и тип $\min(2, p)$ (см. [1, стр. 73]).

Пусть $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. Оператор T: $X \to Y$ называется (q, p)-абсолютно суммирующим, если существует $C \in (0, \infty)$ такое, что для любого n и для любого набора элементов $\{x_j\}_{j=1}^n$ из X выполнено неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^n \|Tx_j\|^q\right)^{1/q} \leqslant C \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^n |f(x_j)|^p\right)^{1/p}:\ f \in X^*,\ \|f\| \leqslant 1\right\}.$$

(p, p)-абсолютно суммирующий оператор называется p-абсолютно суммирующим. Пространство всех (q, p)-абсолютно суммирующих (соответственно, всех p-абсолютно суммирующих) операторов обозначается $\Pi_{q,p}(X, Y)$ (соответственно, $\Pi_p(X, Y)$) (см. [3]). Пусть id_X — тождественный оператор в X. Легко заметить, что если X имеет котип q, то $\mathrm{id}_X \in \Pi_{q,1}(X, X)$ ([2]). Введем, следуя [2], числа $q^X = \inf\{q: X$ имеет котип $q\}$, $q_X = \inf\{q: \mathrm{id}_X \in \Pi_{q,1}(X, X)\}$. В [2] доказано равенство $q^X = q_X$.

Важными примерами банаховых пространств являются симметричные функциональные пространства (см. [4, гл. 2]). Пусть $p \in [1, \infty)$. Симметричное пространство E, по определению, p-вогнуто (соответственно, p-выпукло), если существует $K \in (0, \infty)$ такое, что для любого n и для любого набора $\{x_j\}_{j=1}^n$ элементов из E выполнено неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p} \leqslant K \left\|\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}\right\|$$

(соответственно,

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}\right\| \leqslant K \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p})$$

(см. [1], [3]). Пространство L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ p-выпукло и p-вогнуто. Симметричное пространство (СП) E, по определению, допускает нижнюю p-оценку (соответственно, верхнюю p-оценку), если существует $K \in (0, \infty)$ такое, что для любого n и для любого набора $\{x_j\}_{j=1}^n$ попарно дизъюнктных элементов из E выполнено неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p} \leqslant K \left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\|$$

(соответственно,

$$\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| \leqslant K \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p})$$

(см. [1], [3]). Пусть E — СП, $p \in [1, \infty)$. Обозначим через $E_p = \{x: |x|^p \in E\}$. Множество E_p является СП с нормой $\|x\|_{E_p} = \| |x|^p \|_E^{1/p}$. Нетрудно проверить, что E q-вогнуто (соответственно, допускает нижнюю q-оценку) тогда и только тогда, когда E_p pq-вогнуто (соответственно, E_p допускает нижнюю pq-оценку) ([1, стр. 54]).

Индексами Бойда СП E называются числа

$$\beta_E = \lim_{\tau \to +0} (\ln \|\sigma_\tau\| / \ln \tau), \quad \alpha_E = \lim_{\tau \to \infty} (\ln \|\sigma_\tau\| / \ln \tau),$$

где σ_τ — оператор растяжения, при этом $0 \leqslant \beta_E \leqslant \alpha_E \leqslant \leqslant 1$ ([1], [4]). Если E допускает нижнюю q-оценку, то

$\beta_E \geqslant 1/q$; если E допускает верхнюю p-оценку, то $\alpha_E \leqslant \leqslant 1/p$ [1, стр. 132].

Функция растяжения для положительной функции $\psi(t)$ обозначается $N_\psi(s)$; γ_ψ и δ_ψ — соответственно нижний и верхний показатели растяжения функции $\psi(t)$. Если функция $\psi(t)$ эквивалентна вогнутой, то $0 \leqslant \gamma_\psi \leqslant \leqslant \delta_\psi \leqslant 1$ (см. [4, гл. 2, § 1]).

2. q-вогнутость пространства $\Lambda_p(\varphi)$. Пусть $\varphi(t)$ — положительная вогнутая непрерывная в нуле функция на $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $p \in [1, \infty)$. Пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ — это СП с нормой

$$\| x \|_{\Lambda_p(\varphi)} = \left(\int_0^1 [x^*(t)]^p \, \mathrm{d}\varphi(t)\right)^{1/p},$$

где $x^*(t)$ — убывающая перестановка функции $|x(t)|$. Пространства $\Lambda_p(\varphi)$, введенные в [5], играют важную роль в различных вопросах анализа (см. напр., [4]). Пространства $\Lambda_1(\varphi)$ будем обозначать $\Lambda(\varphi)$. Легко заметить, что $\Lambda_p(\varphi) = [\Lambda(\varphi)]_p$ (см. 1). Норма оператора растяжения σ_τ в $\Lambda(\varphi)$ и функция $N_\varphi(\tau)$ связаны равенством $\|\sigma_\tau\|_{\Lambda(\varphi)} = N_\varphi(\tau)$ [4, стр. 134], из которого следует, что $\gamma_\varphi = \beta_{\Lambda(\varphi)}$, $\delta_\varphi = \alpha_{\Lambda(\varphi)}$. Сопряженное пространство к банахову пространству $\Lambda(\varphi)$ изометрично пространству $M(\varphi)$, норма которого определяется следующим образом:

$$\| x \|_{M(\varphi)} = \sup_{0<h\leqslant 1} \frac{\int_0^h x^*(t)\,\mathrm{d}t}{\varphi(h)} = \sup_{e\subset[0,1]} \frac{\int_e |x(t)|\,\mathrm{d}t}{\varphi(me)}$$

(см. [4, гл. 2, § 5]).

ЛЕММА 2.1. *Пространство* $\Lambda_p(\varphi)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *q-вогнуто для некоторого* $q \in [1, \infty)$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma_\varphi > 0$.

Доказательство. Если $\Lambda(\varphi)$ q-вогнуто для некоторого $q \in [1, \infty)$, то $\gamma_\varphi = \beta_{\Lambda(\varphi)} \geqslant 1/q > 0$ (см. 1). Для доказательства обратного утверждения рассмотрим характеристики пространства $M(\varphi)$:

$$V(M(\varphi), n) = \sup \{ \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \|_{M(\varphi)} : x_k \geqslant 0, \; \| x_k \|_{M(\varphi)} = 1 \},$$

$$V(M(\varphi)) = \lim_{n\to\infty} V(M(\varphi), n)/n$$

(см. [3], [7]). Если $\gamma_\varphi > 0$, то $V(M(\varphi)) = 0$ ([6, теорема 4], [7, теорема 3]). Следовательно, $\Lambda(\varphi)$ имеет котип q при некотором q [3, следствие из теоремы 3.6] и q'-вогнуто для $q' > q$ ([1, стр. 100]). Если $p > 1$ и $\Lambda_p(\varphi)$ q-вогнуто, то $\Lambda(\varphi)$ q/p-вогнуто и $\gamma_\varphi > 0$. Если $\gamma_\varphi > 0$, то $\Lambda(\varphi)$ q-вогнуто для некоторого q, а $\Lambda_p(\varphi)$ pq-вогнуто (см. [1]). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* $q \in (1, \infty)$. *Пространство* $\Lambda(\varphi)$ *q-вогнуто тогда и только тогда, когда* $\gamma_\varphi > 1/q$.

Доказательство. Необходимость. Если пространство $\Lambda(\varphi)$ q-вогнуто, то $\gamma_\varphi > 0$ (лемма 2.1) и

$$\| x \|_{M(\varphi)} \approx F_\varphi(x) = \sup_{0<t\leqslant 1} (t/\varphi(t))\, x^*(t)$$

(см. [4, теорема 2.5.3]). Кроме того, пространство $M(\varphi)$ p-выпукло, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ([1, 1.d.4]). Следовательно, $M(\varphi)$ является пространством вида E_p (с точностью до эквивалентной нормы) ([1, стр. 54], [3, лемма 3.1]), т. е. $[F_\varphi(x)]^p \approx \| \, |x|^p \|_E$. Заметим, что $[F_\varphi(x)]^p = F_\psi(\,|x|^p)$, где

$$\psi(t) = \varphi(t)/t^{p-1} = [\varphi(t)/t^{1/q}]^p.$$

Поэтому функция $\psi(t)$ эквивалентна вогнутой [4, 2.4.7] и $\gamma_\psi > 0$ ([4, 2.5.3]). Простые вычисления показывают, что

$$\gamma_\psi = p(\gamma_\varphi - 1/q). \tag{1}$$

Действительно,

$$\gamma_\psi = \lim_{s\to 0} \frac{\ln N_\psi(s)}{\ln s} = \lim_{s\to 0} \frac{p(\ln N_\varphi(s) - \ln s/q)}{\ln s} = p(\gamma_\varphi - 1/q).$$

Из этого равенства следует, что $\gamma_\varphi > 1/q \Leftrightarrow \gamma_\psi > 0$.

Достаточность. Пусть $\gamma_\varphi > 1/q$. Тогда при достаточно малых s

$$N_\varphi(s) \leqslant s^{1/q+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ (см. [4, стр. 76]). Так как

$$N_\psi(s) = (N_\varphi(s)/s^{1/q})^p,$$

то при достаточно малых s $N_\psi(s) \leqslant s^{\varepsilon p} < 1$. Функция $\varphi(t)$ вогнута, поэтому $N_\varphi(s) \leqslant s$ при $s > 1$ [4, стр. 76], отсюда вытекает, что

$$N_\psi(s) \leqslant (s^{1-1/q})^p = s, \qquad s > 1.$$

По лемме 2.1.2 из [4] функция $\psi(t)$ эквивалентна вогнутой, а из равенства (1) следует, что $\gamma_\psi > 0$. Таким образом,

$$\|x\|^p_{M(\varphi)} \approx [F_\varphi(x)]^p = F_\psi(|x|^p) \approx \||x|^p\|_{M(\psi)},$$

т. е. пространство $M(\varphi)$ p-выпукло. Это означает, что пространство $\Lambda(\varphi)$ q-вогнуто. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пространство* $\Lambda(\alpha) \equiv \Lambda(t^\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *q-вогнуто тогда и только тогда, когда* $\alpha \in (1/q, 1]$.

Следствие 2. *Пусть* $q \in (1, \infty)$, $p \in [1, \infty)$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *пространство* $\Lambda_p(\varphi)$ *q-вогнуто*; 2) *либо* $p = q$ *и* $\varphi(t) \equiv t$, *либо* $p \in [1, q)$ *и* $\gamma_\varphi > p/q$.

Следствие 3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *пространство* $\Lambda_p(\varphi)$ *имеет котип* 2; 2) *любой оператор из* c_0 *в* $\Lambda_p(\varphi)$ *является 2-абсолютно суммирующим*; 3) *пространство* $\Lambda_p(\varphi)$ *2-вогнуто*; 4) *либо* $p = 2$ *и* $\varphi(t) \equiv t$, *либо* $p \in [1, 2)$ *и* $\gamma_\varphi > p/2$.

Доказательство. Утверждения 1) — 3) эквивалентны в любой банаховой решетке ([1,1.f.16], [3, теорема 1.14]), а 3) эквивалентно 4) по следствию 2.

В п. 1 были приведены определения важных числовых характеристик банахова пространства X : q_X и q^X. Если E — СП, то

$$q^E = q_E = q(E) \overset{\text{def}}{=} \inf\{q\colon q \geqslant 2,\ E\ q\text{-вогнуто}\}.$$

([1, стр. 100], [3, теоремы 1.13, 1.14]).

Следствие 4. *Справедливо равенство* $q(\Lambda_p(\varphi)) = \max(2, p/\gamma_\varphi)$.

Следствие 5. *Пусть* $q \in (2, \infty)$, *следующие утверждения эквивалентны*: 1) *любой оператор из* c_0 *в* $\Lambda_p(\varphi)$ *является q-абсолютно суммирующим*; 2) *справедливо неравенство* $\gamma_\varphi > p/q$.

Доказательство. В силу предложения 1.4 из [2] равенство $\Pi_q(c_0, E) = \mathscr{L}(c_0, E)$ имеет место тогда и только тогда, когда $q > q(E)$. Применение следствия 4 завершает доказательство.

3. $(q, 1)$-абсолютная суммируемость тождественного оператора в пространствах $\Lambda_p(\varphi)$. Тип пространств $\Lambda_p(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть* $q \in (1, \infty)$. *Следующие утверждения эквивалентны*: 1) *пространство* $\Lambda_p(\varphi)$ *допускает нижнюю q-оценку*; 2) $p \leqslant q$ *и существует число*

$K \in (0, \infty)$ *такое, что для любого* n *и для любого набора чисел* $\{h_i\}_{i=1}^n$, $h_i \in (0, 1)$, $\sum_{i=1}^n h_i \leqslant 1$, *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^n [\varphi(h_i)]^{q/p}\right)^{p/q} \leqslant K\varphi\left(\sum_{i=1}^n h_i\right).$$

Доказательство. Пусть $p = 1$. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — попарно дизъюнктные элементы пространства $M(\varphi)$, e — измеримое подмножество отрезка $[0, 1]$, $e_i = e \cap \operatorname{supp} x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\left(\int_e \left|\sum_{i=1}^n x_i(t)\right| \mathrm{d}t\right) \Big/ \varphi(me) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n \| x_i \|_{M(\varphi)} \frac{\varphi(me_i)}{\varphi(me)} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \| x_i \|_{M(\varphi)}^{q'}\right)^{1/q'} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\varphi(me)} \left(\sum_{i=1}^n [\varphi(me_i)]^q\right)^{1/q} \leqslant K\left(\sum_{i=1}^n \| x_i \|_{M(\varphi)}^{q'}\right)^{1/q'}.$$

Следовательно, $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|_{M(\varphi)} \leqslant K\left(\sum_{i=1}^n \| x_i \|_{M(\varphi)}^{q'}\right)^{1/q'}$, т. е. пространство $M(\varphi)$ допускает верхнюю q'-оценку, где $q'^{-1} + q^{-1} = 1$. Это означает, что пространство $\Lambda(\varphi)$ допускает нижнюю q-оценку [1, 1.f.5]. Переход к $p > 1$ осуществляется по стандартной схеме (см. доказательство леммы 2.1). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для того чтобы пространство* $\Lambda(\alpha)$ *допускало нижнюю* q*-оценку, необходимо и достаточно, чтобы* $\alpha \in [1/q, 1]$.

Следствие 2. *Пусть* $q \in (2, \infty)$. *Следующие утверждения эквивалентны*: 1) *пространство* $\Lambda_p(\varphi)$ *имеет котип* q; 2) *пространство* $\Lambda_p(\varphi)$ *допускает нижнюю* q*-оценку*; 3) *тождественный оператор в пространстве* $\Lambda_p(\varphi)$ *является* $(q, 1)$*-абсолютно суммирующим*; 4) $p \leqslant q$ *и функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условию* 2) *теоремы* 1.

Доказательство. Утверждения 1) — 3) эквивалентны в любой банаховой решетке [3, теорема 1.13], равносильность 2) и 4) доказана в теореме 3.1.

Пусть X — банахово пространство. Неизвестно, эквивалентны ли следующие утверждения: а) X имеет котип 2; б) тождественный оператор в пространстве X является (2, 1)-абсолютно суммирующим; ([2], [3 стр. 147]).

Следующая теорема устанавливает эквивалентность а) и б) в широком классе симметричных пространств.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если* E — СП *с* $0 < \beta_E \leqslant \alpha_E < 1$, *то* а) $\Leftrightarrow$ б).

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) очевидна. Докажем, что б) $\Rightarrow$ а). Рассмотрим пространство всех последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots$, и $x_i \neq 0$ лишь для конечного числа индексов i. Через $E(l_2)$ обозначим пополнение этого пространства по норме

$$\|(x_1, x_2, \ldots)\|_{E(l_2)} = \left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} \right\|_E .$$

При выполнении условий теоремы пространства E и $E(l_2)$ изоморфны [1, 2.d.4], поэтому, если б) выполнено, то тождественный оператор в пространстве $E(l_2)$ является (2, 1)-абсолютно суммирующим. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — набор элементов из E. Положим

$$u_i = 2^{-n/2}(\overbrace{x_i, \ldots x_i}^{2^{n-i}}, \overbrace{-x_i, \ldots, -x_i}^{2^{n-i}}, \ldots$$
$$\ldots, \overbrace{x_i, \ldots, x_i}^{2^{n-i}}, \overbrace{-x_i, \ldots, -x_i}^{2^{n-i}}, 0, 0, \ldots),$$

где число блоков по 2^{n-1} элемента равно 2^i, $i = 1, \ldots, n$. Заметим, что $\|u_i\|_{E(l_2)} = \|x_i\|_E$, $i = 1, \ldots, n$. Для любого набора скаляров $\{a_i\}_{i=1}^n$

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i u_i\right\|_{E(l_2)} = 2^{-n/2}\left\|\left(\sum_{\varepsilon_i = \pm 1}\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i\right|^2\right)^{1/2}\right\|_E =$$
$$= \left\|\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(u) a_i x_i\right|^2 du\right)^{1/2}\right\|_E .$$

В частности, для любого набора знаков $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i\right\|_{E(l_2)} =$$
$$= \left\|\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(u) x_i\right|^2 du\right)^{1/2}\right\|_E = \left\|\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}\right\|_E .$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{E(l_2)}^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C \max_{\varepsilon_i = \pm 1}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i\right\|_{E(l_2)} = C\left\|\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}\right\|_E ,$$

т. е. пространство E имеет котип 2 (см. следствие из теоремы 2.1). Теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим пространство $\Lambda(1/2)$. Легко проверить, что $\beta_{\Lambda(1/2)} = \alpha_{\Lambda(1/2)} = 1/2$. Пространство $\Lambda(1/2)$ допускает нижнюю 2-оценку (следствие 1 из теоремы 3.1), но $\mathrm{id}_{\Lambda(1/2)}$ не является (2, 1)-абсолютно суммирующим (теорема 3.2 и следствие 1 из теоремы 2.1). Интересно сравнить этот результат со следствием 2 из теоремы 3.1. Кроме того, этот результат дает отрицательный ответ на вопрос С. А. Ракова [8] о (2, 1)-абсолютной суммируемости оператора $\mathrm{id}_{\lambda(1/2)}$ в секвенциальном пространстве Лоренца $\lambda(1/2)$.

Если СП имеет тип r при некотором $r \in (1, 2]$, то оно рефлексивно ([1, 1.f]). Пространство $\Lambda_p(\varphi)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда $p > 1$. Поэтому вопрос о типе пространств $\Lambda_p(\varphi)$ имеет смысл лишь для $p > 1$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $p \in (1, \infty)$ и $r \in (1, 2]$. Пространство $\Lambda_p(\varphi)$ имеет тип r тогда и только тогда, когда $p \geqslant r$ и $\gamma_\varphi > 0$.*

Доказательство. Необходимость. Если пространство $\Lambda_p(\varphi)$ имеет тип r, то оно q-вогнуто для некоторого q (см. [1, 1.f.13]). Отсюда вытекает $\gamma_\varphi > 0$ (лемма 2.1). СП, имеющее тип r, допускает верхнюю r-оценку [1, стр. 101]. В пространстве $\Lambda_p(\varphi)$ существует последовательность нормированных попарно дизъюнктных элементов $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, эквивалентная стандартному базису пространства l_p ([9]). Таким образом, для любого n справедливо неравенство

$$C_1 n^{1/p} \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_{\Lambda_p(\varphi)} \leqslant C_2 n^{1/r},$$

где C_1 и C_2 — положительные константы, не зависящие от n. Следовательно, $p \geqslant r$.

Достаточность. Пространство $\Lambda_p(\varphi)$ p-выпукло. Если $p \geqslant r$, то $\Lambda_p(\varphi)$ r-выпукло [3, п.1]. Условие $\gamma_\varphi > 0$ обеспечивает q-вогнутость пространства $\Lambda_p(\varphi)$ для некоторого q (лемма 2.1). r-выпуклое и q-вогнутое для некоторого q СП имеет тип r [1, стр. 101]. Теорема доказана.

В заключение отметим, что класс секвенциальных пространств Лоренца и Орлича, имеющих котип 2, описан в [8], [10].

Автор глубоко благодарен Семенову Е. М. за руководство работой.

Воронежский государственный университет

Поступило 27.II.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Lindenstrauss J., Tzafriri L., Classical Banach Spaces, II. Function Spaces, Berlin, Springer Verlag, 1979.
[2] Maurey B., Pisier G., Series de variables aleatoires, Studia Math., 58, № 1 (1976), 45—90.
[3] Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я., Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории, Успехи матем. наук, **34**, № 2 (1979), 137—183.
[4] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., «Наука», 1978.
[5] Lorentz G. G., Some new functional spaces, Ann. of Math., **51**, № 1 (1950), 37—55.
[6] Лозановский Г. Я., О локализованных функционалах в векторных структурах, в сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», Харьков, вып. 19 (1974), 66—80.
[7] Абрамович Ю. А., Лозановский Г. Я., О некоторых числовых характеристиках KN-линеалов, Матем. заметки, **14**, № 5 (1973), 723—732.
[8] Раков С. А., О пространствах Лоренца последовательностей, Матем. заметки, **20**, № 4 (1976), 501—510.
[9] Новиков С. Я., Семенов Е. М., Токарев Е. В., Структура подпространств пространств $\Lambda_p(\varphi)$, Докл. АН СССР, **247**, № 3 (1979), 552—554.
[10] Комарчев И. А., О 2-абсолютно суммирующих операторах в некоторых банаховых пространствах, Матем. заметки, **25**, № 4 (1979), 591—602.