УДК 512.6

Н. А. Тюрин

Пространства эрмитовых троек и уравнения Зайберга–Виттена

В работе [12] было найдено каноническое отображение τ из пространства всех эрмитовых троек в пространство вещественных когомологий. Посредством этого отображения в настоящей работе вводятся новые уравнения, калибровочно инвариантные относительно действия группы $\mathrm{Diff}^+ X$, а также представлена связь этих уравнений с уравнениями и инвариантами Зайберга–Виттена для 4-мерных многообразий.

Библиография: 14 наименований.

§ 0. Введение

В 1994 г. Э. Виттеном [14] были предложены новые инварианты гладких структур в 4-мерной геометрии. Эти инварианты очень близки к введенным ранее инвариантам Дональдсона.

Однако конкретные вычисления этих новых инвариантов оказались более доступными, что привело к решению многих проблем, изучаемых до этого с помощью инвариантов Дональдсона. Первые результаты, полученные в рамках теории Зайберга–Виттена, были уже известны в теории Дональдсона:

1) для связной суммы $Y = X_1 \sharp X_2$, где $b_2^+(X_i) > 0$, инварианты тривиальны (как и инварианты Дональдсона);

2) для келеровой поверхности S инвариант Зайберга–Виттена канонического класса K_S равен ± 1 [14]; исходя из этого, Виттен передоказал, что a priori келерова поверхность S не диффеоморфна своей топомодели [14] (и так же, как и в теории Дональдсона, новые инварианты определены для многообразий с $b_2^+ > 1$).

Вместе в новыми инвариантами открылась новая страница в исследованиях симплектических многообразий. А именно так же, как и в келеровом случае, имеется

Теорема [9]. *Пусть (X, ω) – симплектическое многообразие такое, что $b_2^+(X) > 1$. Тогда инвариант Зайберга–Виттена канонического класса $K_\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$, определенного данной симплектической структурой, равен ± 1.*

Иными словами, для симплектического многообразия канонический класс является базисным классом. Но обратное утверждение оказалось неверным: в работе [7] был построен контрпример (несимплектического многообразия с нетривиальным SW-инвариантом). В качестве такого контрпримера берется связная сумма

Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (грант № 99-01-01133), INTAS-OPEN (грант № 97-2072) и гранта поддержки ведущих научных школ № 00-15-96085.

$Y = X\sharp N$ симплектического многообразия X с $b_2^+(X) > 1$ и некоторого N такого, что $b_1(N) = b_2^+(N) = 0$, но фундаментальная группа $\pi_1(N)$ нетривиальна и допускает факторгруппу конечного порядка. Тогда Y не допускает существование симплектической структуры, но имеет нетривиальный SW-инвариант [7].

Однако идея найти критерий нетривиальности SW-инварианта в геометрических терминах остается очень заманчивой. Эта идея продиктована желанием построить твисторное пространство для уравнений Зайберга–Виттена, как это было сделано в случае функционала Янга–Миллса и, как следствие, для теории Дональдсона (см. [3]). В свою очередь, если такое твисторное пространство будет построено, оно станет естественной частью геометрической программы Пенроуза (см. [8]). Напомним, что практическое следствие этой программы заключается в том, что все необходимые для описания законов природы дифференциальные уравнения могут быть переписаны в комплексно-геометрических терминах. Так в теории твисторов (см. [3]) вместо дифференциального уравнения Янга–Миллса предлагается условие голоморфности соответствующего расслоения над твисторным пространством (которое, конечно, тоже можно рассматривать как решение дифференциального уравнения с оператором Коши–Римана, однако это условие имеет чисто геометрическое задание).

Попытка обобщить результат Таубса на более широкий класс почти комплексных 4-многообразий, названных *псевдосимплектическими многообразиями* (см. [12]), и найти критерий нетривиальности инварианта Зайберга–Виттена основывалась (см. там же) на рассмотрении канонического отображения

$$\tau\colon \mathscr{M}_X \to H^2(X,\mathbb{R}), \tag{0.1}$$

где X – некоторое гладкое ориентируемое компактное риманово 4-мерное многообразие, $\mathscr{M}_X$ – пространство всех C^∞-эрмитовых троек над X, допускаемых данной гладкой структурой. Напомним, что это пространство состоит из троек следующего вида:

$$\mathscr{M}_X = \{(g,J,\omega)\},$$

где g – некоторая риманова метрика над X, J – некоторая согласованная с первым элементом почти комплексная структура:

$$J\colon TX \to TX, \qquad J^2 = -\operatorname{id}, \quad g(Ju,Jv) = g(u,v) \quad \forall\, u,v \in \Gamma(TX).$$

Третий элемент эрмитовой тройки определен первыми двумя: невырожденная 2-форма ω получается, как обычно, подстановкой

$$\omega(u,v) = g(u,Jv) \qquad \forall\, u,v \in \Gamma(TX).$$

Заметим, однако, что в эрмитовой тройке любой элемент восстанавливается из двух других (простой локальный факт).

Напомним определение канонического отображения τ (см. [12]). Любой элемент из пространства $\mathscr{M}_X$ определяет соответствующий класс

$$(g,J,\omega) \mapsto \tau(g,J,\omega)$$

следующим образом. Первый элемент тройки (g, J, ω) определяет конформный класс метрики g, второй элемент определяет соответствующую J ориентацию многообразия X. Вместе это дает оператор Ходжа

$$* = *(g, J).$$

Тогда по известной теореме Ходжа (см., например, [4]) для каждой дифференциальной формы имеется единственное разложение на гармоническую, точную и коточную компоненты. Конкретно для третьего элемента нашей тройки ω имеем

$$\omega = \omega_H + d\rho_1 + d^*\rho_2, \tag{0.2}$$

где ω_H – некоторая гармоническая 2-форма, а оператор d^* определяется, как обычно, как формально сопряженный обычному d. Подчеркнем, что гармоническая форма ω_H определена однозначно. Тогда по другой известной теореме Ходжа (см. [4]) мы имеем некоторый класс когомологий $[\omega_H] \in H^2(X, \mathbb{R})$, представляемый гармонической формой ω_H. Этот класс и является образом:

$$\tau\colon (g, J, \omega) \mapsto [\omega_H] \in H^2(X, \mathbb{R}). \tag{0.3}$$

Мы называем отображение τ *каноническим*, поскольку определение этого отображения не требует введения никаких дополнительных структур, кроме исходной гладкой структуры. Более того, из каноничности следует и стабильность относительно действия группы $\mathrm{Diff}^+ X$ диффеоморфизмов X, сохраняющих ориентацию. При этом, однако, необходимо заметить, что отображение τ сохраняется при диффеоморфизме $\Psi \in \mathrm{Diff}^+ X$ по модулю ортогонального преобразования решетки $H^2(X, \mathbb{Z})$, индуцируемого этим диффеоморфизмом. Это наблюдение позволяет нам представить калибровочно инвариантные по действию $\mathrm{Diff}^+ X$ уравнения на пространстве $\mathscr{N}_X$, определяемом как факторпространство:

$$\mathscr{N}_X = \mathscr{M}_X / \mathrm{Diff}^+ X.$$

Интересным и интригующим является то, что в терминах канонического отображения τ выражается необходимое условие нетривиальности инварианта Зайберга–Виттена для канонических (и, как мы увидим ниже, не только канонических) классов. А именно, ниже мы покажем, что любое решение системы уравнений Зайберга–Виттена определяет некоторое множество эрмитовых троек с нетривиальными образами по действию канонического отображения τ, а еще более сильное условие – нетривиальность инварианта, т. е. стабильность решения – приводит к еще более сильным результатам в терминах калибровочно инвариантных уравнений на пространстве $\mathscr{N}_X$.

Для удобства работы со статьей мы начинаем следующий параграф с краткого напоминания основных конструкций теории Зайберга–Виттена, а затем показываем, как из любого неприводимого решения можно построить эрмитову тройку с нетривиальным образом. § 2 посвящен основным свойствам отображения τ, используемым в дальнейшем. В § 3 приведены простейшие факты, касающиеся структуры самого пространства эрмитовых троек $\mathscr{M}_X$. § 4 содержит формулировку и доказательство необходимого условия на базисные классы гладкого компактного 4-мерного многообразия. В § 5 мы обсуждаем возможные приложения канонического отображения τ для построения калибровочной теории с группой диффеоморфизмов в качестве калибровочной группы.

§ 1. Уравнения Зайберга–Виттена и эрмитовы тройки

Пусть X – гладкое компактное ориентируемое риманово многообразие. Выбор некоторой римановой метрики и ориентации определяет пару твисторных $\mathbb{P}U(2)$-расслоений $\mathbb{P}^{\pm} \to X$, а также вместе с оператором Ходжа

$$*\colon \Omega^i_X \to \Omega^{4-i}_X \tag{1.1}$$

разложение пространства 2-форм на пространства автодульных и антиавтодульных 2-форм:

$$\Omega^2_X = \Omega^+_X \oplus \Omega^-_X. \tag{1.2}$$

Это дает и разложение расслоения $\Lambda^2 T^* X$ в прямую сумму подрасслоений:

$$\Lambda^2 T^* X = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-. \tag{1.2$'$}$$

В силу ориентируемости X проективные расслоения $\mathbb{P}^{\pm} \to X$ можно поднять до векторных $U(2)$-расслоений выбором $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры – некоторого класса $c \in H^2(X,\mathbb{Z})$, сравнимого по модулю 2 с вторым классом Штиффеля–Уитни многообразия X:

$$c = w_2(X) \pmod 2.$$

Если такой класс c фиксирован, мы получаем пару $U(2)$-расслоений $W^{\pm} \to X$ с классами Черна

$$\begin{aligned} c_1(W^+) &= c, \quad & c_2(W^+) &= \frac{1}{4}\bigl(c^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)\bigr), \\ c_1(W^-) &= c, \quad & c_2(W^-) &= \chi(X) + c_2(W^+), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\chi(X)$, $\sigma(X)$ – эйлерова характеристика и сигнатура подлежащего многообразия соответственно (так как ориентация фиксирована, мы можем представлять вторые классы Черна целыми числами). Расслоения $W^{\pm} \to X$ называются *спинорными расслоениями*, они обладают следующими свойствами:

1) $T^* X = \mathrm{Hom}_u(W^-, W^+)$, где индекс u указывает на то, что все гомоморфизмы согласованы с обеими эрмитовыми структурами на спинорных расслоениях;

2) $\mathrm{ad}\, W^{\pm} = \Lambda^{\pm}_{\mathbb{C}}$.

Конфигурационным пространством для уравнений Зайберга–Виттена является пространство пар $\mathscr{A}_h(\det W^+) \times \Gamma(W^+)$, состоящее из эрмитовых связностей на детерминантном расслоении $\det W^+$ и гладких сечений спинорного расслоения (или спиноров). Любая абелева связность $a \in \mathscr{A}_h(\det W^+)$ вместе со связностью Леви-Чивита, индуцированною римановой метрикой g, однозначно определяет некоторую связность на всем спинорном расслоении W^+ с оператором ковариантного дифференцирования

$$\nabla_a\colon \Gamma(W^+) \to \Gamma(W^+ \otimes T^* X).$$

Композиция

$$\Gamma(W^+) \to \Gamma(W^+ \otimes T^* X) = \Gamma\bigl(W^+ \otimes \mathrm{Hom}(W^+, W^-)\bigr) \to \Gamma(W^-),$$

в которой на второй стрелке мы используем свойство 1) спинорных расслоений (см. выше), называется *оператором Дирака*, скрученным с абелевой связностью a, и обозначается D_a.

Система уравнений Зайберга–Виттена для пары переменных

$$(a, \phi) \in \mathscr{A}_h(\det W^+) \times \Gamma(W^+)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} D_a(\phi) &= 0, \\ F_a^+ &= -(\phi \otimes \overline{\phi})_0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где в левой части второго уравнения стоит автодуальная часть тензора кривизны связности a, а в правой части – бесследовая часть эндоморфизма расслоения W^+. В силу свойства 2) спинорных расслоений второе уравнение определено корректно.

Система уравнений выдерживает действие калибровочной группы

$$\mathscr{G} = \mathrm{Aut}_h(\det W^+)$$

послойных унитарных автоморфизмов детерминантного расслоения $\det W^+$, и в центре внимания теории – изучение многообразия модулей решений системы (1.4)

$$\mathscr{M}(g, c) \subset \mathscr{C} = \big(\mathscr{A}_h(\det W^+) \times \Gamma(W^+)\big)/\mathscr{G}$$

в объемлющем факторпространстве. Линеаризация системы (1.4) по модулю калибровочных преобразований представлена парой эллиптических операторов D_a и $d \oplus d^+$, откуда имеем следующие свойства многообразия модулей:

1) для общей римановой метрики g и $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ многообразие модулей $\mathscr{M}(g, c)$ является гладким компактным ориентируемым вещественным многообразием размерности $c_2(W^+)$, если $b_2^+(X) > 0$;

2) более того, если $b_2^+(X) > 1$, то топология многообразия модулей не зависит от выбора такой общей метрики, а именно если $b_2^+(X) > 1$, то для любых двух общих римановых метрик g_0, g_1 существует непрерывный путь

$$\gamma = \{g_t, t \in [0, 1]\}$$

в пространстве метрик такой, что для любой метрики g_t многообразие модулей обладает свойством 1).

Для данной теории риманова метрика является общей, если определяемая для нее система (1.4) не допускает приводимых решений. В нашем случае решение (a, ϕ) приводимо, если спинорная часть ϕ тождественно равна нулю. Из системы (1.4) видно, что это возможно, если и только если первый класс Черна $c_1(\det W^+)$, равный по определению c, представляется относительно конформного класса данной римановой метрики гармонической формой α_c, являющейся антиавтодуальной. Если специфицировать конформные классы римановых метрик ортогональными разложениями векторного пространства $H^2(X, \mathbb{R})$ на подпространства размерности $b_2^+(X)$ и $b_2^-(X)$ (автодуальное и антиавтодуальное соответственно), то условие того, что метрика g допускает для системы (1.4) существование приводимых решений, равносильно тому, что точка в $H^2(X,\mathbb{R})$, соответствующая классу c, лежит в антиавтодуальном подпространстве. Отсюда видно, что в пространстве метрик подпространство тех метрик, которые допускают приводимые решения (или, говоря по-другому, допускают существование абелевых инстантонов), имеет коразмерность b_2^+. Поэтому если $b_2^+ > 1$, то подпространство римановых метрик, не допускающих абелевых инстантонов, является связным подмножеством в пространстве всех метрик. Отсюда следует свойство 2).

Инвариант Зайберга–Виттена определяется как целочисленная функция на множестве всех $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур над X. Пусть для гладкого компактного ориентированного риманового многообразия X выполнены топологические условия $b_2^+(X) > 1$, $\frac{1}{4}\bigl(\chi(X) + \sigma(X)\bigr) \in \mathbb{Z}$. Обозначим тогда множество всех $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур как $\mathrm{Spin} \subset H^2(X,\mathbb{Z})$. Тогда для любого элемента $c \in \mathrm{Spin}$ и для общей метрики g рассмотрим соответствующее многообразие модулей $\mathscr{M}(g,c)$, причем размерность его всегда четна. В объемлющем факторпространстве $\mathscr{C}$ имеется выделенный класс 2-когомологий $h \in H^2(\mathscr{C},\mathbb{Z})$. Ориентация многообразия модулей может быть выбрана единым способом. После этого определим значение функции

$$N_{\mathrm{SW}}\colon \mathrm{Spin} \to \mathbb{Z}$$

на классе c как

$$N_{\mathrm{SW}}(c) = \langle h^{c_2(W^+)}; [\mathscr{M}(g,c)]\rangle \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

По свойству 2) значение функции не зависит от конкретного выбора общей метрики, а только от подлежащей гладкой структуры. Классы из подмножества Spin, обладающие нетривиальным инвариантом, называются *базисными классами*. Согласно [6] их конечное число для любой гладкой структуры на компактном многообразии, и набор базисных классов является инвариантом гладкой структуры. Подробнее основные конструкции и определения теории Зайберга–Виттена изложены в [2], [6], [14].

Перед тем как перейти к расшифровке системы (1.4) в терминах канонического отображения τ, определенного во введении, необходимо особо подчеркнуть различие между существованием решений системы (1.4) и нетривиальностью инварианта. Для некоторой общей метрики (в смысле данной теории, см. выше) решения могут существовать и решений может быть очень много, но они будут нестабильны относительно деформаций двух типов, которые будут использованы в дальнейшем, если инвариант тривиален. Но сейчас речь пойдет именно о решениях системы Зайберга–Виттена.

Утверждение 1.1. *Пусть для некоторой римановой метрики g и некоторой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $c \in H^2(X,\mathbb{Z})$ такой, что $c^2 = 2\chi + 3\sigma$, уравнения Зайберга–Виттена (1.4) имеют неприводимое решение (a_0,ϕ_0) и не имеют приводимых. Тогда в конформном классе метрики g существует метрика g_1, которая вместе с некоторой почти комплексной структурой J_1 и соответствующей 2-формой ω_1 дает эрмитову тройку с нетривиальным образом*

$$\tau(g_1,J_1,\omega_1) \neq [0] \in H^2(X,\mathbb{R}).$$

Более того, из доказательства будет видно, какой именно образ имеет такая тройка в $H^2(X,\mathbb{R})$.

Доказательство. Для построения искомого элемента

$$(g_1, J_1, \omega_1) \in \mathscr{M}_X$$

достаточно раскодировать информацию, содержащуюся в системе (1.4). А именно, второе уравнение читается так. Стоящая в правой части уравнения форма $-(\phi_0 \otimes \overline{\phi}_0)_0$ после сокращения на множитель $2\pi i$ дает вещественную автодуальную форму ω_0. Как всякая автодуальная 2-форма, ω_0 имеет в каждой точке ранг 0 или 4, следовательно, ω_0 невырождена там, где ϕ_0 отличен от нуля.

Рассмотрим для этой формы ω_0 разложение Ходжа (0.2), индуцируемое конформным классом исходной метрики g и фиксированной ориентацией

$$\omega_0 = \omega_H + d\rho_1 + d^*\rho_2. \tag{1.6}$$

Однако мы имеем из второго уравнения системы (1.4) разложение следующего вида:

$$(\alpha_c + d\rho_0)^+ = \omega_0, \tag{1.7}$$

где α_c – гармоническая форма, представляющая класс когомологий

$$c \in H^2(X, \mathbb{Z}) \subset H^2(X, \mathbb{R})$$

относительно нашей исходной метрики g, а ρ_0 – некоторая вещественная 1-форма. Нетрудно видеть, что формула (1.7) может быть переписана следующим образом:

$$\omega_0 = \alpha_c^+ + \frac{1}{2} d\rho_0 + \frac{1}{2} d^*(*\rho_0), \tag{1.8}$$

где α_c^+ – автодуальная часть гармонической формы α_c – сама является гармонической 2-формой. Так как метрика g не допускает приводимых решений, то эта автодуальная часть не может быть тривиальна.

Таким образом, сравнивая (1.6) и (1.8) и используя единственность последнего разложения, получаем

$$\omega_H = \alpha_c \neq [0]. \tag{1.9}$$

Следующий шаг в доказательстве – построение спинорного поля ϕ_1 такого, что ϕ_1 не обращается в нуль нигде на X, но достаточно близко к исходному ϕ_0. Для этого рассмотрим множество нулей $Z \subset X$ исходного спинорного поля ϕ_0. Разложим Z на "неприводимые" гладкие компоненты Z_i. Имеется следующая

Лемма 1.2. *В условиях утверждения* 1.1 *размерность компонент* Z_i *не превосходит* 2.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. существует компонента Z_i размерности 3. Тогда гладкое подмногообразие $Z_i \subset X$ должно быть гомологически тривиально. Рассмотрим четырехмерное подмногообразие $X_1 \subset X$ с границей Z_i.Ограничим на X_1 первое уравнение системы (1.4). Имеем тогда над X_1

эллиптическое уравнение первого порядка. По единственности отсюда имеем, что спинорное поле ϕ_0 обращается в нуль на всем X_1, а следовательно, и на всем X, а это противоречит условиям утверждения 1.1.

Далее, так как расслоение W^+ имеет классы Черна $c_1(W^+) = c$, $c_2(W^+) = 0$, то имеются следующие две возможности для множества нулей Z исходного спинорного поля ϕ_0. Первая – множество нулей Z гомологически тривиально. Тогда существует такое необращающееся в нуль сечение ϕ_b расслоения W^+, что $\phi_0 = \lambda\phi_b$, где λ – некоторая комплексная гладкая функция. Так как топологически $W^+ = I \oplus L_c$, где L_c – комплексное линейное расслоение с классом Черна c, то мы можем выбрать такое сечение ϕ_c подрасслоения L_c, что множество нулей ϕ_c имеет пустое пересечение с Z. Это можно сделать, поскольку можно выбрать гладкий представитель гомологического класса, двойственный по Пуанкаре классу c, так, чтобы этот представитель не пересекал двумерную гомологически тривиальную компоненту $Z^2 \subset Z$ множества нулей Z.

Рассмотрим теперь гладкую функцию μ, равную δ на Z и нулю вне δ-окрестности Z, где δ – вещественный параметр. Тогда спинорное поле

$$\phi_1 = \phi_0 + \mu\phi_c \tag{1.10}$$

обладает нужными нам свойствами: не обращается в нуль и отличается от ϕ_0 только вблизи Z.

Возможность вторая – нули нашего спинорного поля гомологически нетривиальны. Тогда существует гладкое сечение ϕ_c подрасслоения L_c такое, что $\phi_0 = \lambda\phi_c$. Теперь, наоборот, выбираем сечение тривиального подрасслоения I, обозначаемое снова как ϕ_b, но такую же, как и выше, функцию μ, так что спинорное поле

$$\phi_1 = \phi_0 + \mu\phi_b \tag{1.10$'$}$$

обладает теми же необходимыми нам свойствами.

Рассмотрим теперь автодуальную вещественную 2-форму

$$\omega_1 = \frac{i}{2\pi}(\phi_1 \otimes \overline{\phi}_1)_0. \tag{1.11}$$

По построению она в каждой точке имеет полный ранг. Более того, для достаточно малых δ форма ω_1 имеет гармоническую компоненту, сколь угодно близкую к гармонической компоненте исходной формы ω_0 (поскольку норма их разности $\omega_1 - \omega_0$ мажорирует норму разности их гармонических компонент, а сама стремится к нулю вместе с $\delta \to \infty$).

Наконец, поскольку и разложение (0.2), и автодуальность 2-форм зависят только от конформного класса g_0, мы можем выбрать в этом конформном классе риманову метрику g_1 такую, что относительно нее построенная нами 2-форма ω_1 имеет длину $\sqrt{2}$ в каждой точке X. По метрике g_1 и по автодуальной 2-форме ω_1 восстановим второй элемент в соответствующей эрмитовой тройке (g_1, J_1, ω_1) (на самом деле, мы уже встречались с J_1 под видом спинорного поля ϕ_1).

Образ эрмитовой тройки (g_1, J_1, ω_1) по действию канонического отображения τ по построению близок к $[\alpha_c^+] \neq [0]$. Опять же из конструкции видно, что, варьируя δ, можно получать в качестве образов классы, сколь угодно близкие к выделенному классу $[\alpha_c^+]$.

Определим теперь этот класс: он совпадает с проекцией $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры c на "автодуальное" относительно конформного класса g_0 подпространство в $H^2(X, \mathbb{R})$. Этим завершается доказательство утверждения 1.1.

§ 2. Простейшие свойства канонического отображения τ

В этом параграфе мы обсудим основные свойства разложения (0.2) и связанные с ними свойства канонического отображения (0.1). Прежде всего, имеется следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Для произвольной эрмитовой тройки (g, J, ω) соответствующая гармоническая компонента ω_H, определяемая* (0.2), *является автодуальной гармонической формой, т. е. образ канонического отображения* $\operatorname{Im} \tau$ *содержится в $H^+ \cup [0] \subset H^2(X, \mathbb{R})$, где H^+ – внутренняя часть конуса классов с положительными квадратами.*

Действительно, для произвольной эрмитовой тройки (g, J, ω) третий элемент является автодуальной формой относительно метрики g и ориентации, задаваемой J. Применим к обеим частям разложения (0.2) соответствующий оператор Ходжа:

$$*\omega = *\omega_H + *d\rho_1 + *d^*\rho_2. \tag{2.1}$$

Пользуясь автодуальностью формы ω и известным выражением для d^*:

$$d^* = *d*,$$

получаем

$$\omega = *\omega_H + d(*\rho_2) + d^*(*\rho_1). \tag{2.2}$$

Однако в силу единственности разложения (0.2) из формулы (2.2) имеем

$$*\omega_H = \omega_H, \qquad \rho_2 = *\rho_1. \tag{2.3}$$

Из автодуальности гармонической формы имеем

$$\langle [\omega_H]^2; [X] \rangle = \int_X \omega_H \wedge \omega_H = \int_X |\omega_H|^2 \, d\mu, \tag{2.4}$$

где в последнем равенстве мы пользуемся автодуальностью ω_H.

Из формулы (2.4) видно, что выражение

$$\langle [\omega_H]^2; [X] \rangle = \langle \tau^2(g, J, \omega); [X] \rangle$$

положительно всегда, кроме случая $\tau(g, J, \omega) = [0]$. Это дает нам утверждение леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Норма $\|\omega_H\|$ всегда не больше нормы $\|\omega\|$, и равенство возможно только в том случае, когда ω – симплектическая форма.*

Доказательство. Неравенство

$$\int_X |\omega|^2 \geqslant \int_X |\omega|^2$$

очевидно из ортогональности разложения (0.2). По той же причине имеется импликация

$$\|\omega\| = \|\omega_H\| \implies \omega = \omega_H,$$

откуда следует утверждение леммы 2.2.

Заметим теперь, что и разложение (0.2), и, как следствие, каноническое отображение (0.1) могут быть определены для почти комплексного многообразия любой размерности. Если Y – произвольное гладкое компактное многообразие размерности $2n$, пространство $\mathscr{M}_Y$ определяется как пространство эрмитовых троек над Y, то имеется такое же каноническое отображение

$$\tau_Y \colon \mathscr{M}_Y \to H^2(Y,\mathbb{R}),$$

определяемое также через разложение (0.2). Хотя в этом случае и нет автодуальных 2-форм (если $n \neq 2$), лемма 2.2 вполне справедлива и для этого, более общего, случая.

Лемма 2.2 позволяет в общей ситуации для произвольного почти комплексного 4-мерного многообразия X определить на пространстве $\mathscr{M}_X$ специальную функцию

$$F_\tau \colon \mathscr{M}_X \to \mathbb{R},$$

задаваемую следующим образом. Для произвольной эрмитовой тройки

$$(g,J,\omega) \in \mathscr{M}_X$$

рассмотрим отношение

$$F_\tau(g,J,\omega) = \frac{\|\omega_H\|}{\|\omega\|} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}. \tag{2.6}$$

Согласно лемме 2.2 область значений построенной нами функции F_τ есть некоторое подмножество единичного отрезка $[0;1]$. Из той же леммы видно, что абсолютные максимумы этой функции (когда $F_\tau = 1$) соответствуют симплектическим структурам на X. Вместе с тем, поскольку каноническое отображение (0.1) по построению инвариантно по действию группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^+(X)$, сохраняющих ориентацию, то же верно и для функции F_τ.

В том случае, когда X не допускает симплектической структуры, интересно было бы рассмотреть максимумы функции F_τ и установить поведение этой функции при стремлении к границе $\mathscr{M}_X$. Однако рассмотрение такой задачи не входит в план настоящей работы.

Следующее замечание касается того, каков образ пространства всех эрмитовых троек $\mathscr{M}_X$ в пространстве вещественных когомологий по действию канонического отображения τ.

Лемма 2.3. *Образ* $\operatorname{Im}\mathscr{M}_X \subset H^2(X,\mathbb{R})$ *является конусом, т. е. для любого элемента* $h_0 \in \operatorname{Im}\mathscr{M}_X$ *и любого вещественного числа* $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, *элемент* $c \cdot h_0$ *также принадлежит* $\operatorname{Im}\mathscr{M}_X$.

Доказательство очевидно. Если эрмитова тройка (g_0, J_0, ω_0) имеет в качестве образа h_0:

$$\tau(g_0, J_0, \omega_0) = h_0,$$

то для любой положительной константы c имеем

$$\tau(c \cdot g_0, J_0, c \cdot \omega_0) = c \cdot h_0.$$

Для отрицательной константы c имеем

$$\tau(|c| \cdot g_0, -J_0, |c| \cdot \omega_0) = c \cdot h_0.$$

Таковы основные свойства канонического отображения τ, которыми мы непосредственно пользуемся в настоящей работе. В конце этого параграфа хотелось бы все же обратить внимание на следующее: из определения канонического отображения τ видно, что это отображение является в некотором смысле непрерывным. Однако поскольку в настоящей работе нам не потребуется это гораздо более тонкое свойство (для доказательства которого требуется введение специальной топологии на пространстве всех эрмитовых троек и т. п.), мы ограничиваемся лишь упоминанием этого факта перед тем, как перейти в следующем параграфе к описанию структуры пространства всех эрмитовых троек $\mathscr{M}_X$.

§ 3. Структура пространства эрмитовых троек

В конце предыдущего параграфа уже возник косвенным образом вопрос о структуре пространства $\mathscr{M}_X$, а именно упоминалась граница этого пространства. Теперь мы переходим непосредственно к описанию этой структуры. Начнем с "дискретных параметров", разбивающих все пространство $\mathscr{M}_X$ на несвязные компоненты.

Первый такой параметр определяется выбором ориентации на X. Действительно, каждому элементу $(g, J, \omega) \in \mathscr{M}_X$ соответствует выбор ориентации, определяемый вторым элементом – почти комплексной структурой. Однако мы обратимся сразу к более специальному параметру – каноническому классу почти комплексной структуры.

Пусть $\mathscr{K} \subset H^2(X,\mathbb{Z})$ – подмножество всех возможных канонических классов в решетке двумерных целочисленных когомологий. Напомним, что в случае четырехмерной базы любой элемент $K \in \mathscr{K}_X$ является решением следующей системы уравнений (при одной или другой ориентации):

$$K = w_2(X) \pmod 2, \qquad K^2 = 2\chi + 3\sigma \tag{3.1}$$

(теорема Ву).

Таким образом, мы можем разбить подмножество $\mathscr{K}_X$ на решения при разных ориентациях:

$$\mathscr{K}_X = \mathscr{K}_X^+ \cup \mathscr{K}_X^-,$$

однако обозначения $+$ и $-$ условны, так как a priori обе ориентации равноценны, и мы не можем приписать им знаки каноническим образом. Таким образом, наше пространство $\mathscr{M}_X$ "расслоено":

$$\mathscr{M}_X \to \mathscr{K}_X, \tag{3.2}$$

и для некоторого $K \in \mathscr{K}_X$ имеем в качестве слоя множество

$$\mathscr{M}_X^K = \{(g, J, \omega) \mid K_J = K\}. \tag{3.3}$$

Интересно, что на расслоении (3.2) имеется структура, отдаленно напоминающая связность. А именно, в разных слоях, соответствующих каноническим классам K_i и K_J, мы можем выделить пару подмножеств, соответствующих некоторой выбранной римановой метрике g. Для более конкретного описания рассмотрим две естественные проекции:

$$p\colon \mathscr{M}_X \to \mathscr{H}_X, \qquad q\colon \mathscr{M}_X \to \mathscr{J}_X, \tag{3.4}$$

где $\mathscr{H}_X$, $\mathscr{J}_X$ – пространство всех римановых метрик и пространство всех почти комплексных структур соответственно. Рассмотрим следующие подмножества:

$$(\mathscr{M}_X^{K_i})_g = \mathscr{M}_X^{K_i} \cap p^{-1}(g), \qquad (\mathscr{M}_X^{K_j})_g = \mathscr{M}_X^{K_j} \cap p^{-1}(g). \tag{3.5}$$

Если бы можно было задать еще и соответствие между почти комплексными структурами, согласованными с одной и той же метрикой, но с разными каноническими классами, мы получили бы связность на расслоении (3.2).

Теперь нашей задачей будет описание слоев проекций, определенных в (3.4).

Проекция p. Выберем на X некоторую риманову метрику g. Тогда в каждой точке подлежащего многообразия x в комплексифицированном касательном пространстве $T_x^{\mathbb{C}}X$ мы имеем $\mathbb{C}$-билинейное продолжение римановой метрики g до билинейной формы $g_{\mathbb{C}}$. Проективизируем комплексное 4-мерное пространство $T_x^{\mathbb{C}}X$, получая проективное пространство

$$\mathbb{CP}^3 = \mathbb{P}T_x^{\mathbb{C}}X,$$

в котором имеются стандартная вещественная структура Θ_x, наследуемая при комплексификации из исходного вещественного 4-мерного пространства, и невырожденная квадрика Q_x, состоящая из проективизированных изотропных векторов формы $g_{\mathbb{C}}$. Более того, квадрика Q_x является вещественной относительно вещественной структуры Θ_x (поскольку мы начинали с вещественной формы), но без вещественных точек, поскольку исходная риманова метрика не допускает существования вещественных изотропных векторов.

На квадрике Q_x имеются две системы прямых, и наша квадрика представляется в виде

$$Q_x = \mathbb{P}^+_x \times \mathbb{P}^-_x,$$

где проективные прямые $\mathbb{P}^\pm_x$ параметризуют две системы прямых. (Заметим, что выбор знаков в данном случае предполагает, что мы выбрали некоторую ориентацию, присвоив ей знак $+$.) С другой стороны, почти комплексная структура J локально над точкой x соответствует выбору в $\mathbb{CP}^3_x$ пары прямых l, $\Theta_x(l)$, определяемых следующим образом. После комплексификации T_xX в комплексном 4-мерном пространстве $T^{\mathbb{C}}_xX$ оператор J однозначно определяется своими собственными подпространствами с собственными значениями i и $-i$, т. е. разложением

$$T^{\mathbb{C}}_xX = T^{1,0}_xX \oplus T^{0,1}_xX.$$

После проективизации это дает нам пару проективных прямых в $\mathbb{CP}^3_x$. Однако эти прямые сопряжены вещественной структурой Θ_x и не имеют вещественных точек.

Условие согласованности метрики g и почти комплексной структуры J означает просто, что прямые l, $\Theta_x(l)$ лежат на квадрике Q_x. Действительно, покажем, что $g_{\mathbb{C}}(v,v) = 0$, если $v \in T^{1,0}_xX$ и J согласована с g. Действительно, из условия согласованности следует, что

$$g_{\mathbb{C}}(v,v) = g_{\mathbb{C}}(Jv,Jv) = g_{\mathbb{C}}(iv,iv) = -g_{\mathbb{C}}(v,v).$$

Таким образом, любая точка $l \in \mathbb{P}^+_x$ представляет некоторую согласованную с g почти комплексную структуру, которая, кроме того, согласована с выделенной ориентацией, а любая точка $l \in \mathbb{P}^-_x$ представляет почти комплексную структуру, согласованную с противоориентацией. Глобализуем проективную картину, получая над базой X пару проективных расслоений $\mathbb{P}^\pm \to X$. Эти расслоения известны в дифференциальной геометрии как твисторные расслоения.

В терминах твисторных расслоений описание слоя проекции p становится достаточно простым. А именно, по определению любое сечение расслоения $\mathbb{P}^+ \to X$ представляет некоторую почти комплексную структуру, согласованную с метрикой g и выделенной ориентацией, тогда как любое сечение проективного расслоения $\mathbb{P}^- \to X$ представляет почти комплексную структуру, задающую противоориентацию. Опишем почти комплексную структуру J, соответствующую некоторому сечению $s\colon X \to \mathbb{P}^+$. Для этого напомним конструкцию из теории твисторов универсальной почти комплексной структуры на тотальном пространстве $Y = \mathbb{P}^+ \to X$, определяемой метрикой g. Метрика g определяет связность Леви-Чивита на касательном расслоении к X, которая индуцирует некоторую связность на проективном расслоении $\mathbb{P}^+ \to X$. Эта связность в каждой точке $y \in Y$ определяет разложение касательного пространства T_yY на вертикальную и горизонтальную компоненты:

$$T_yY = T_{\mathrm{vert}} \oplus T_{\mathrm{hor}}, \tag{3.6}$$

причем T_{hor} представляется изоморфным с касательным пространством:

$$T_{\mathrm{hor}} \cong T_{\pi(y)}X,$$

где $\pi\colon Y \to X$ – естественная проекция. T_{vert} есть касательное пространство к слою расслоения $\mathbb{P}^+ \to X$ в точке y. Однако на слое есть стандартная комплексная структура (поскольку слой есть $\mathbb{CP}^1$). В силу разложения (3.6) определим почти комплексную структуру на Y следующим образом: в каждой точке $y \in Y$ на касательном пространстве T_yY рассмотрим прямую сумму почти комплексных структур на T_{vert} и T_{hor}, причем на первой компоненте берем стандартную комплексную структуру слоя, а на второй – тавтологически почти комплексную структуру, соответствующую точке y слоя (поскольку каждая точка слоя соответствует некоторой почти комплексной структуре в точке, над которой слой расположен).

Таким образом, имеем на Y универсальную почти комплексную структуру $\widetilde{J}$. Теперь рассмотрим произвольное сечение $s\colon X \to Y$ и в каждой точке $s(x) \in Y$ касательное пространство $T_{s(x)}Y$ вместе с универсальной почти комплексной структурой $\widetilde{J}$ и спроецируем его посредством $d\pi$ в касательное пространство T_xX. Поскольку слои проекции π псевдоголоморфны, полученный оператор J есть корректно определенная почти комплексная структура в x. Таким образом, пространство согласованных почти комплексных структур для метрики g и выделенной ориентации представляется в виде пространства гладких вложений $i_J(X) \subset Y$ подлежащего многообразия X в твисторное пространство Y таких, что подмногообразие $i_J(X)$ трансверсально слоям проекции $\pi\colon Y \to X$.

Возникает естественный вопрос: как различить вложения $i_{J_1}(X)$ и $i_{J_2}(X)$, соответствующие почти комплексным структурам с разными каноническими классами? Ответ напрашивается сам собой: в твисторном пространстве Y вложения $i_{J_i}(X)$ определяют пару классов гомологий

$$[i_{J_i}(X)] \in H_4(Y, \mathbb{Z})$$

и почти комплексные структуры имеют одинаковые канонические классы тогда и только тогда, когда эти 4-гомологические классы совпадают. Более того, используя стандартную технику, мы можем явно вычислить эти 4-гомологические классы.

А именно, воспользуемся описанием твисторного расслоения как проективизации спинорного расслоения (см. [11]). Спинорное расслоение W^+ может быть выбрано с точностью до подкрутки на комплексное линейное расслоение. Выберем некоторый канонический класс K_0 и соответствующий этому классу подъем $\mathbb{P}^+ \to X$ до векторного спинорного расслоения $W^+ = I \oplus K_0^{-1}$. Тогда кольцо когомологий проективизации $\mathbb{P}(W^+)$ описывается следующим образом:

$$H^2 * (Y, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}H/(-K_0H + H^2), \tag{3.7}$$

поскольку мы выбрали W^+ с классами Черна $c_2(W^+) = 0, c_1(W) = -K_0$. Класс H определен неоднозначно – если мы подкрутим проективизируемое расслоение W^+ на произвольное комплексное линейное расслоение, изменится и эта образующая.

Однако в выбранной нами системе образующих нетрудно видеть, что

$$[i_{J_0}(X)]^* = H \in H^2(Y, \mathbb{Z}), \tag{3.8}$$

где J_0 имеет канонический класс K_0, а звездочка обозначает взятие двойственного по Пуанкаре класса. Более того, для любой другой почти комплексной структуры J_1 с каноническим классом K_1 имеем

$$[i_{J_1}(X)]^* = H + \frac{1}{2}\pi^*(K_1 - K_0) \tag{3.9}$$

(напомним, что разность двух канонических классов всегда четна).

Например, сопряженная комплексная структура $-J_0$ с каноническим классом $-K_0$ определяет вложением класс, двойственный по Пуанкаре, классу $H-\pi^*(K_0)$. Тогда пересечение $i_{J_0}(X)$ и $i_{-J_0}(X)$ определяет нулевой класс гомологий. Действительно, класс такого пересечения должен быть двойственным по Пуанкаре классу

$$H.\big(H - \pi^*(K_0)\big) \in H^4(Y,\mathbb{Z}),$$

но этот класс тривиален согласно описанию кольца когомологий (3.7).

Однако мы могли бы найти ответ и другим способом. Напомним, что на твисторном пространстве имеется естественная инволюция

$$\sigma\colon Y \to Y, \tag{3.10}$$

определяемая инволюцией без неподвижных точек в каждом слое, являющемся топологически двумерной сферой. На сфере $\mathbb{P}_x^+$ имеем соответствие

$$J \mapsto -J \tag{3.11}$$

и топологически это антиподальная инволюция (без неподвижных точек). Таким образом, мы можем описать вложение $i_{-J_0}(X)$ как результат композиции вложения $i_{J_0}(X)$ и инволюции σ:

$$i_{-J_0}(X) = \sigma\big(i_{J_0}(X)\big), \tag{3.12}$$

и отсюда видно, что пересечение $i_{J_0}(X) \cap i_{-J_0}(X)$ пусто.

Проекция q. Перейдем теперь к описанию слоя второй проекции. Выберем некоторую почти комплексную структуру J на X и построим подходящее пространство, описывающее все римановы метрики, согласованные с данной почти комплексной структурой. Самый простой путь такого рода построений – привлечь третий элемент в эрмитовых тройках, невырожденную 2-форму. Рассмотрим расслоение $\Lambda^2 T^*X \to X$ и выделим подрасслоение на вещественные (1,1)-формы (т. е. рассмотрим индуцируемый на пространстве вещественных 2-форм почти комплексной структурой J вещественный оператор с собственными числами ± 1 и возьмем собственное пространство с собственным значением $+1$).

Таким образом, имеем вещественное расслоение $\Lambda^{1,1} \to X$ со слоем $\mathbb{R}^4$. В каждом слое этого расслоения имеется конформный класс лоренцевой метрики, определяемый внешним произведением 2-форм. Так как ориентация фиксирована, мы имеем знаки $+$ или $-$ для такого произведения.

Рассмотрим квадратичный конус, задаваемый условием того, что внешний квадрат формы больше нуля. Это обычный конус над двумерной сферой. Покажем, что любой элемент "верхней" полы этого конуса соответствует римановым метрикам (а соответственно "нижняя" пола соответствует отрицательно определенным метрикам). Для этого заметим, что любая 2-форма, удовлетворяющая условию невырожденности в каждой точке с положительным (поточечно) внешним квадратом и имеющая в каждой точке тип (1,1), определяет или риманову метрику, или отрицательно определенную метрику. Чтобы избежать отрицательности, мы и рассматриваем верхнюю полу конуса. Это чисто локальный факт, известный из линейной алгебры. Однако для определения дополнительной структуры на необходимом нам расслоении на конусы необходимо привлечь некоторую выделенную риманову метрику на X, согласованную с J, поскольку сама по себе J не определяет какого-то подходящего аналога связности Леви-Чивита в отличие от случая твисторного расслоения, рассмотренного выше.

Пусть кроме почти комплексной структуры J мы с самого начала фиксировали и некоторую согласованную риманову метрику g. Тогда, во-первых, соответствующая 2-форма ω указывает нам сразу, какую полу квадратичного конуса нужно выбрать, чтобы содержащиеся в ней формы определяли вместе с J римановы метрики. Во-вторых, реализуем конформные классы согласованных с J метрик как формы с поточечной нормой $\sqrt{2}$ относительно индуцируемой g поточечной нормой. Тогда все пространство согласованных с J конформных классов римановых метрик представляется как пространство сечений расслоения на трехмерные открытые шары

$$B_3 \to X \tag{3.13}$$

и тотальное пространство этого расслоения B снабжено в каждой точке разложением касательного пространства на вертикальную и горизонтальную компоненты. Это разложение индуцировано связностью Леви-Чивита фиксированной нами метрики g. Конечно, в каждом слое выделена точка, соответствующая тоже метрике g.

Тотальное пространство B представляется как открытое семимерное вещественное многообразие с фиксированной ориентацией, граница которого

$$\partial B = S \to X \tag{3.14}$$

представляется как расслоение на двумерные сферы над X.

Топологически расслоение (3.14) связано с твисторным расслоением, поэтому назовем тотальное пространство B *внутритвисторным пространством.* Возможно, как и в случае твисторного расслоения, построить некоторую универсальную метрику на внутритвисторном пространстве, однако это не входит в круг задач настоящей работы.

Наконец, мы хотим представить следующее утверждение, показывающее, что каждая связная компонента пространства всех эрмитовых троек является в некотором смысле кусочно линейным пространством. Из каждой точки в любую другую точку одной и той же компоненты можно попасть, используя или деформацию метрики при фиксированной почти комплексной структуре, или деформацию почти комплексной структуры при фиксированной метрике. Это подразумевается под "кусочно линейностью" каждой компоненты.

Утверждение 3.1 ("путеводитель"). *Пусть* (g_0, J_0, ω_0) *и* (g_1, J_1, ω_1) – *пара эрмитовых троек над* X *с одинаковым каноническим классом* $K_{J_i} = K \in H^2(X, \mathbb{Z})$. *Тогда существуют некоторая почти комплексная структура* J_{junct} *(с тем же каноническим классом) и пара римановых метрик* g_p, g_q *такие, что*:

1) g_p *согласована одновременно с* J_0, J_{junct};
2) g_q *согласована одновременно с* J_{junct}, J_1.

Доказательство состоит в том, чтобы построить такую почти комплексную структуру J_{junct}; поэтому начнем с рассмотрения того, что означает локально условие леммы. Именно, над каждой точкой $x \in X$ имеем в пространстве $\mathbb{CP}^3 = \mathbb{P}(T_x^{\mathbb{C}} X)$ две пары проективных прямых l_i, $\Theta_x(l_i)$, $i = 0, 1$, соответствующих данным почти комплексным структурам J_0, J_1.

Очевидно, что в общем случае (в случае общего положения) не существует римановой метрики (невырожденной вещественной квадрики без вещественных точек), согласованной с обеими почти комплексными структурами (содержащей все четыре проективные прямые). Посмотрим, что мы имеем тогда в $\mathbb{CP}^5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 T_x^{*\mathbb{C}} X)$. Условия леммы дают нам две пары точек на грассмановой квадрике $\mathrm{Gr} \subset \mathbb{CP}^5$, и наши четыре проективные прямые лежат на одной и той же вещественной квадрике в $\mathbb{CP}^3$, если и только если соответствующие им четыре точки в $\mathbb{CP}^5$ лежат на одной и той же вещественной двумерной плоскости (которая есть, конечно, $\mathbb{P}(\Lambda_x^+)$).

Таким образом, имея четыре точки l_0, $\Theta_x(l_0)$, l_1, $\Theta_x(l_1)$, мы должны построить еще одну пару сопряженных точек l_{junct}, $\Theta_x(l_{\text{junct}})$ так, что оболочка

$$\langle l_i, \Theta_x(l_i), l_{\text{junct}}, \Theta_x(l_{\text{junct}}) \rangle$$

будет являться проективной 2-плоскостью $\mathbb{P}_i^2$, $i = 0, 1$. Ключевым является тот факт, что такая плоскость автоматически будет вещественной и конформные классы метрик g_p и g_q будут определяться тем, что $\mathbb{P}_0^2 \subset \mathbb{CP}^5$ есть проективизация $\Lambda_{g_p}^+$ и $\mathbb{P}_1^2$ есть проективизация $\Lambda_{g_q}^+$.

Таким образом, оставшаяся часть доказательства леммы является лишь несложным упражнением в классической проективной геометрии. Построение двух сопряженных точек l_{junct}, $\Theta_x(l_{\text{junct}})$ проводим по следующей схеме. Рассмотрим множество проективных 2-плоскостей, проходящих через прямую $\langle l_0, l_1 \rangle$. Найдем в этом семействе такую 2-плоскость π, которая содержит две вещественные точки r_0, r_1 такие, что $\Theta_x(r_i) = r_i$, т.е.

$$l_0, l_1, r_0, r_1 \in \pi.$$

Тогда сопряженная проективная 2-плоскость $\Theta_x(\pi)$ содержит точки $\Theta_x(l_0)$, $\Theta_x(l_1)$, r_0, r_1.

Мы можем построить следующие две сопряженные точки:

$$\begin{gathered} l'_{\text{junct}} = \langle l_0, r_0 \rangle \cap \langle l_1, r_1 \rangle \in \pi, \\ \Theta_x(l'_{\text{junct}}) = \langle \Theta_x(l_0), r_0 \rangle \cap \langle \Theta_x(l_1), r_1 \rangle \in \Theta_x(\pi). \end{gathered} \tag{3.15}$$

Легко видеть, что проективные прямые $\langle l_0, \Theta_x(l_0)\rangle$ и $\langle l'_{\mathrm{junct}}, \Theta_x(l'_{\mathrm{junct}})\rangle$ лежат в одной и той же проективной 2-плоскости (отличной от стартовой плоскости π) и то же выполнено для проективных прямых $\langle l_1, \Theta_x(l_1)\rangle$ и $\langle l'_{\mathrm{junct}}, \Theta_x(l'_{\mathrm{junct}})\rangle$.

Но пара построенных нами сопряженных точек еще не есть то, что нам нужно, потому что a priori эти точки не лежат на грассмановой квадрике Gr и не представляют, следовательно, проективные прямые в нашем $\mathbb{CP}^3$. Поэтому необходимо еще рассмотреть пересечение

$$\langle l'_{\mathrm{junct}}, \Theta_x(l'_{\mathrm{junct}})\rangle \cap \mathrm{Gr} = \{l_{\mathrm{junct}}, \Theta_x(l_{\mathrm{junct}})\}, \tag{3.16}$$

которое и даст нужную нам пару l_{junct} и $\Theta_x(l_{\mathrm{junct}})$. Остается показать, что используемая нами проективная плоскость π существует.

Построим такую плоскость следующим образом:

1) рассмотрим оболочку

$$\langle l_0, l_1, \Theta_x(l_0), \Theta_x(l_1)\rangle = \mathbb{CP}^3 \subset \mathbb{CP}^5; \tag{3.17}$$

2) наша стандартная вещественная структура Θ_x ограничивается на это $\mathbb{CP}^3$ как *стандартная вещественная структура* (которую мы обозначим как Θ'_x) на $\mathbb{CP}^3$;

3) поскольку эта Θ'_x является стандартной (т. е. допускает существование вещественных точек), имеется инвариантное вещественное подмножество $\mathbb{RP}^3 \subset \mathbb{CP}^3$;

4) рассмотрим некоторую 2-плоскость π, содержащую проективную прямую $\langle l_0, l_1\rangle$ и лежащую в нашем $\mathbb{CP}^3$;

5) так как любые две проективные плоскости в $\mathbb{CP}^3$ имеют нетривиальное пересечение (которое есть проективная прямая), получаем

$$\rho = \pi \cap \Theta'_x(\pi); \tag{3.18}$$

6) эта прямая ρ инвариантна относительно Θ'_x (т. е. вещественна):

$$\Theta'_x(\rho) = \rho;$$

7) любая вещественная прямая в $\mathbb{CP}^3$ имеет по меньшей мере две вещественные точки.

Таким образом, любая проективная 2-плоскость, содержащаяся в оболочке (3.17), удовлетворяет необходимому нам свойству.

Далее, мы должны проверить только шаги 2) и 7), остальные являются просто построениями. Напомним прежде всего, что на проективных пространствах имеются два типа вещественных структур. Первая – стандартная вещественная структура, имеющая вид

$$\Theta_s(z_0 : \ldots : z_n) = (\bar{z}_0 : \ldots : \bar{z}_n). \tag{3.19}$$

Очевидно, она допускает вещественные точки. Второй тип существует только для $\mathbb{CP}^n$ с нечетным n. В этом нечетномерном случае имеем кватернионную вещественную структуру

$$\Theta_q(z_0 : z_1 : \ldots : z_{n-1} : z_n) = (-\bar{z}_1 : \bar{z}_0 : \ldots : -\bar{z}_n : \bar{z}_{n-1}).$$

Она вещественных точек не имеет.

Так как $\mathbb{CP}^3$ сохраняется по действию Θ_x, мы получаем при ограничении некоторую вещественную структуру Θ'_x на этом $\mathbb{CP}^3$. Нам необходимо показать, что эта вещественная структура является стандартной. Для этого достаточно найти хотя бы одну вещественную точку.

Рассмотрим проективную прямую

$$\langle l_0, \Theta_x(l_0)\rangle \subset \mathbb{CP}^3 \subset \mathbb{CP}^5.$$

Она также сохраняется по действию Θ_x. Следовательно, если мы покажем, что эта прямая имеет хотя бы одну вещественную точку, то это докажет правомерность и шага 2), и шага 7) в конструкции, приведенной выше.

Лемма 3.2. *Пусть некоторая проективная прямая $\rho \in \mathbb{CP}^n$ инвариантна по действию стандартной вещественной структуры Θ_s. Тогда эта прямая имеет не менее двух вещественных точек.*

Доказательство. Зафиксируем подходящие однородные координаты на $\mathbb{CP}^n$ так, чтобы стандартная вещественная структура Θ_s имела вид (3.19) в этих координатах. Рассмотрим систему однородных уравнений, определяющих нашу вещественную прямую ρ:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i z_i = 0, \tag{3.20}$$

$\alpha_j^i \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n-1$. Из Θ_s-инвариантности получаем, что все точки прямой ρ удовлетворяют и следующей системе:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i \overline{z}_i = 0, \tag{3.20$'$}$$

так же, как и исходной.

Тогда легко видеть, что точки

$$r_0 = (\operatorname{Re} z_0 : \ldots : \operatorname{Re} z_n), \qquad r_1 = (\operatorname{Im} z_0 : \ldots : \operatorname{Im} z_n)$$

удовлетворяют обеим системам, т. е. мы нашли две вещественные точки. Конечно, имеется гораздо больше вещественных точек на ρ:

$$\rho_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{RP}^1, \qquad \rho_{\mathbb{R}} \subset \rho,$$

– целая вещественная проективная прямая, но нам достаточно существование двух.

Таким образом, мы построили промежуточную почти комплексную структуру J_{junct} локально, но, поскольку топологических препятствий нет (канонические классы J_0 и J_1 совпадают), картину можно глобализовать над всем X. Например, воспользовавшись некоторым гладким атласом, построить J_{junct} на окрестностях, а затем склеить – склейки для гладких почти комплексных структур J_0 и J_1 будут окаймлять склейки для J_{junct}, что позволяет добиться их гладкости.

§ 4. Необходимое условие на базисные классы

В настоящем параграфе мы сформулируем и докажем необходимое условие для базисных классов в терминах канонического отображения τ.

В предыдущем параграфе было введено разложение пространства всех эрмитовых троек $\mathscr{M}_X$ в дискретный набор связных компонент (3.3), нумеруемых каноническими классами $K_i \in H^2(X,\mathbb{Z})$. Опишем сначала следующее соответствие, определяемое каноническим отображением. Рассмотрим для каждого канонического класса K_i образ соответствующих ему компонент

$$N_i = \mathrm{Im}(\mathscr{M}_X^{K_i} \cup \mathscr{M}_X^{-K_i}) \subset H^2(X,\mathbb{R}), \tag{4.1}$$

который является конусом и содержится в H^+ или H^-, в зависимости от того, согласован канонический класс с выбранной ориентацией или противоориентацией. Особо подчеркнем, что в размерности 4 почти комплексные структуры J и $-J$ с каноническими классами K_J и $-K_J$ соответственно задают одну и ту же ориентацию. Мы рассматриваем две компоненты $\mathscr{M}_X^{K_i}$ и $\mathscr{M}_X^{-K_i}$ вместе по нескольким причинам. Первая причина – и главная на сегодняшний день – для удобства формулировки необходимого условия на базисные канонические классы.

Эта конструкция определяет отображение

$$N\colon K_i \mapsto N(K_i) = N_i \tag{4.2}$$

из множества всех канонических классов во множество подконусов (произвольных) конусов $H^{\pm}$. Нетрудно видеть, что такое отображение согласовано с действием группы $\mathrm{Diff}^+ X$ (т. е. инвариантно относительно специальных ортогональных преобразований решетки $H^2(X,\mathbb{Z})$).

Продолжим это соответствие на более широкий набор классов из решетки $H^2(X,\mathbb{Z})$. Для этого воспользуемся основной идеей работы [13]. Пусть подлежащее многообразие X удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{1}{4}\bigl(\chi(X) + \sigma(X)\bigr) \in \mathbb{Z}.$$

Тогда для всякой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры c имеем, что второй класс Черна спинорного расслоения W^+ является четным числом.

Обозначим множество всех $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур как $\mathrm{Spin} \subset H^2(X,\mathbb{Z})$. Тогда для произвольной $c \in \mathrm{Spin}$ определим:

– если $(1/4)(c^2 - 2\chi - 3\sigma) = c_2(W_c^+) < 0$, то положим $N(c) = \varnothing$;

– если $c_2(W_c^+) = 0$ (случай почти комплексной структуры), определение дано выше;

– если $c_2(W_c^+) = 2k > 0$, то, пользуясь основной идеей [13], рассмотрим связную сумму $Y = X \sharp k\overline{\mathbb{CP}}^2$ и над таким Y рассмотрим пространство всех эрмитовых троек $\mathscr{M}_Y$; как было показано в [13], над Y имеется набор почти комплексных структур с каноническим классом $K_0 = c + \sum_{i=1}^{k} 3h_i$, которые являются продолжениями спинорных полей над X до спинорных полей над Y без нулей.

Рассмотрим каноническое отображение

$$\tau\colon \mathscr{M}_Y \to H^2(Y,\mathbb{R})$$

над всем Y. Определим конус $N_c = N(c) \subset H^2(X,\mathbb{R})$ как проекцию образа компоненты $\mathscr{M}_Y^{K_0}$ во вложенное пространство $H^2(X,\mathbb{R}) \subset H^2(Y,\mathbb{R})$:

$$N_c = \mathrm{pr}(\mathrm{Im}\,\mathscr{M}_Y^{K_0}) \subset H^2(X,\mathbb{R}),$$

где

$$\mathrm{pr}\colon H^2(Y,\mathbb{R}) = H^2(X,\mathbb{R}) \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{R}h_i \to H^2(X,\mathbb{R}).$$

Легко видеть, что конус N_c полностью содержится или в H^+, или в H^-.

Таким образом, мы имеем соответствие

$$N\colon \mathrm{Spin} \to H^2(X,\mathbb{R}), \tag{4.3}$$

инвариантное относительно группы диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию.

Утверждение 4.1. *Пусть X – гладкое ориентированное компактное риманово многообразие с $b_2^+(X) > 1$, и пусть K_0 – базисный канонический класс (т. е. класс с нетривиальным инвариантом Зайберга–Виттена). Тогда соответствующий образ $N(K_i)$ является подмножеством, всюду плотным в H^+.*

Иными словами, канонические классы с нетривиальными инвариантами Зайберга–Виттена выделены тем условием, что образ соответствующей компоненты пространства эрмитовых троек достаточно большой.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент из положительного конуса $h_0 \in H^+$ в векторном пространстве $H^2(X,\mathbb{Z})$. Нам достаточно найти такую достаточно общую риманову метрику g_0, что для этого элемента h_0 и для данного в условии канонического класса K_0 автодуальная часть гармонической формы α_{K_0}, представляющей класс K_0, представляет фиксированный нами класс h_0:

$$[\alpha_{K_0}^+] = h_0 \in H^+ \subset H^2(X,\mathbb{R}), \qquad \text{где} \quad [\alpha_{K_0}] = K_0. \tag{4.4}$$

Тогда согласно утверждению 1.1 существует такая эрмитова тройка, что ее образ сколь угодно близок к данному классу. Заметим, что для теории Зайберга–Виттена такая метрика является достаточно общей (конечно, если $h_0 \neq [0]$), и поскольку по условию инвариант отличен от нуля, выбранная нами метрика допускает существование неприводимых решений системы (1.4).

Однако из условия нетривиальности инварианта следует не только то, что неприводимые решения системы (1.4) существуют для любой общей римановой метрики, но и стабильность решений относительно возмущений самой системы (1.4).

А именно, вместе с исходной системой (1.4) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} &D_a(\phi) = 0, \\ &F_a^+ = -(\phi \otimes \overline{\phi})_0 + i\eta, \end{aligned} \tag{$*$}$$

где η – произвольная вещественная автодуальная 2-форма. Для малых возмущений вида $(*)$, т. е. таких, что η достаточно мала, нетривиальность инварианта влечет существование неприводимых решений и для системы $(*)$.

Далее, рассмотрим два случая.

Случай 1. Базисный канонический класс K_0 имеет неположительный квадрат

$$K_0^2 \leqslant 0.$$

В этом случае для любого h_0 с положительным квадратом мы можем найти такую риманову метрику g_0 вместе с малой автодуальной формой η, что (4.4) выполнено следующим образом.

Рассмотрим векторное пространство $H^2(X, \mathbb{R})$ с билинейной формой, индуцированной формой пересечения на X. Для любой пары векторов $e_+, e_- \in H^2(X, \mathbb{R})$, удовлетворяющих свойствам

$$e_+^2 > 0, \quad e_-^2 < 0, \qquad e_+.e_- = 0, \tag{4.5}$$

найдется риманова метрика g_0 такая, что гармонические формы $\alpha_{e_\pm}$, представляющие классы $e_\pm$, являются автодуальной и антиавтодуальной соответственно:

$$\alpha_{e_\pm} \in \Omega^\pm_X. \tag{4.6}$$

Для данных $h_0, K_0 \in H^2(X, \mathbb{R})$ будем искать векторы $e_\pm$ вида

$$e_+ = \lambda h_0, \qquad e_- = \lambda h_0 - K_0, \tag{4.7}$$

где λ – некоторое ненулевое вещественное число. Если мы найдем такое λ, что выражения (4.7) удовлетворяют соотношениям (4.5), то для метрики g_0 выполняется соотношение (4.4). Это простой факт из линейной алгебры. Распишем для выражений (4.7) условия (4.5):

$$\lambda^2 h_0^2 > 0, \tag{4.8}$$

$$(\lambda h_0 - K_0)^2 < 0 \tag{4.9}$$

и

$$(\lambda h_0 - K_0)\lambda h_0 = 0. \tag{4.10}$$

По условию утверждения неравенство (4.8) выполнено автоматически (если, конечно, $\lambda \neq 0$). Из условия (4.10) видно, что λ определено, если $h_0.K_0 \neq 0$. В этом случае условие (4.9) выполнено автоматически, так как из (4.10) имеем $\lambda h_0.K_0 > 0$, а $K_{0^2} \leqslant 0$ по условию.

Таким образом, почти для всех классов h_0 из положительного конуса H^+ существуют метрики такие, что условие (4.4) выполнено, исключение составляют классы, ортогональные K_0.

Для реализации этих классов в свете утверждения 1.1 воспользуемся малыми деформациями исходной системы (1.4). Именно, в качестве η возьмем произвольную автодуальную гармоническую форму, представляющую класс 2-когомологий, который имеет ненулевое пересечение с K_0. Тогда в выражения (4.7) вместо h_0 подставляем сумму $h_0 + [\eta]$, находим нужную риманову метрику, затем соответствующее решение возмущенной системы $(*)$, а из него после сокращения гармонической формы η в правой и левой частях получим решение, соответствующее прообразу класса h_0 в пространстве эрмитовых троек с каноническим классом K_0.

Случай 2. Теперь $K_0^2 > 0$. Однако и в этом случае, пользуясь вариацией метрики и автодуальной формы, приходим к необходимой конструкции.

Таким образом, без ограничения общности мы можем считать, что для нашего базисного канонического класса K_0 и произвольного класса $h_0 \in H^2(X, \mathbb{R})$ существует риманова метрика с необходимым нам условием (4.4).

Воспользуемся теперь утверждением 1.1. Из него следует, что существует эрмитова тройка (g_1, J_1, ω_1) (причем g_1 принадлежит тому же конформному классу, что и g_0), образ которой по действию канонического отображения τ сколь угодно близок к $[\alpha_c^+] = [\alpha_{K_0}] = h_0$. Таким образом, мы доказали, что для любого элемента из H^+ имеется некоторая тройка, образ которой сколь угодно близок к этому элементу. Отсюда видно, что если K_0 – канонический базисный класс, то

$$\operatorname{Im} \mathscr{M}_X^{K_0} \subset H^+$$

всюду плотен в H^+. Соответственно если K_0 согласован с противоориентацией, имеем вместо H^+ конус H^-.

Это дает утверждение 4.1.

Следствие 4.2. *Для односвязного многообразия X при остальных условиях, как и в утверждении* 4.1, *любой базисный класс (а не только канонический) должен удовлетворять тому же условию.*

Действительно, это немедленно следует из результата работы [13] и определения соответствия (4.1) для всех $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур.

Замечание. Как видно из приведенных выше конструкций, мы работаем со случаем, когда $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры определяют спинорные расслоения с четными вторыми классами Черна. Это продиктовано, конечно, тем, что, во-первых, в односвязном случае только для таких классов определено значение инварианта Зайберга–Виттена, а во-вторых, только в этом случае мы можем продолжить данную $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру до канонического класса на стандартной связной сумме $X \sharp k \overline{\mathbb{CP}}^2$. Однако в недавней работе [5] представлен интересный метод, рассматривающий связные суммы исходного многообразия с многообразием вида $S^3 \times S^1$, который выработан как будто специально для работы в неодносвязном случае. Опираясь на этот метод, кажется возможным продолжить соответствие (4.1) на *любые* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры и связать нетривиальность инварианта Зайберга–Виттена и в этом случае с геометрией соответствующих образов.

В заключение этого параграфа хотелось бы привести еще несколько замечаний.

Конечно, соответствие (4.1) требует уточнения. А именно, допустим, что на $H^2(X, \mathbb{R})$ имеется подходящая мера μ, инвариантная относительно специальных ортогональных преобразований решетки $H^2(X, \mathbb{Z})$ и определяющая конечный объем H^+:

$$\mathrm{Vol}_\mu(H^+) \in \mathbb{R}.$$

Тогда отнормированная мера подконуса

$$F_\mu(K_i) = \frac{\mathrm{Vol}_\mu(N_i)}{\mathrm{Vol}_\mu(H^+)} \in \mathbb{R}$$

является уже вещественнозначной функцией на множестве канонических классов, продолжаемой, как и выше, на все множество $\mathrm{Spin} \subset H^2(X, \mathbb{Z})$. Для этого случая имеется следующая

Гипотеза. *Пусть K_0 – базисный канонический класс, как и выше. Тогда*:

1) *для любой такой меры μ соответствующий подконус $N_0 = N(K_0)$ имеет положительную меру*;

и, более того,

2) *значение функции $F_\mu(K_0)$ равно* 1.

Интересно, что гипотетическая мера μ вместе с функцией F_μ естественно возникает в случае, когда $b_2^+ = 1$. В этом случае векторное пространство $H^2(X,\mathbb{R})$ снабжено гиперболической метрикой сигнатуры $\bigl(1, b_2^-(X)\bigr)$, определяемой формой пересечения на X. Тогда вместо всего положительного конуса H^+ можно рассматривать соответствующее пространство Лобачевского $\mathscr{L} = \mathbb{P}(H^+)$, снабженное стандартной римановой метрикой, и вместо подконусов N_i рассматривать их проективизации $P_i \subset \mathscr{L}$. Выбирая стандартную последовательность подмножеств

$$L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n \cup \dots = \mathscr{L}$$

таких, что $\mathrm{Vol}_\mu(L_k) = \mathrm{const}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим последовательность чисел

$$\frac{\mathrm{Vol}_\mu(P_i \cap L_k)}{\mathrm{Vol}_\mu(L_k)},$$

максимум которой и будет значение функции F_μ на классе K_i. Эта функция будет инвариантна относительно действия группы диффеоморфизмов.

Приведенные выше замечания и гипотезы требуют детальной проработки, однако естественно было бы ожидать более сильной спецификации необходимого условия на базисные классы в терминах канонического отображения τ, нежели содержащееся в условии утверждения 4.1.

§ 5. Diff^+-инвариантные уравнения

В этом параграфе мы рассматриваем еще одну конструкцию, естественно вытекающую из существования канонического отображения (0.1). А именно, в замечаниях, представленных ниже, мы будем пользоваться инвариантностью канонического отображения τ относительно действия группы Diff^+ по модулю ортогональных преобразований решетки $H^2(X,\mathbb{Z})$.

Рассмотрим на пространстве всех эрмитовых троек над X возможные уравнения, которые инвариантны относительно действия $\mathrm{Diff}^+ X$. Конечно, первым таким уравнением будет однородное уравнение

$$\tau(g, J, \omega) = [0]. \tag{5.1}$$

Действительно, правая часть этого уравнения инвариантна относительно любых преобразований решетки $H^2(X,\mathbb{Z})$, поэтому если (g_0, J_0, ω_0) является решением уравнения (5.1), то и для любого элемента $s \in \mathrm{Diff}^+ X$ очевидным образом имеем

$$\tau\bigl(s(g_0), s(J_0), s(\omega_0)\bigr) = [0]$$

(интересно то, что это замечание касается и элементов группы *всех* диффеоморфизмов X, а не только тех, которые сохраняют ориентацию).

Как мы видели выше (см. утверждение 4.1), с уравнениями Зайберга–Виттена связана неоднородная версия (5.1). Однако и для однородного уравнения имеется геометрическая интерпретация в специальном случае. Именно, пусть над некоторым X имеется эрмитова тройка (g_0, J_0, ω_0), которая является решением уравнения (5.1), и, кроме того, пусть J_0 интегрируема (т.е. X является комплексно-аналитическим многообразием). Тогда согласно определяющему тождеству (0.2) имеем

$$\omega_0 = d^+\rho_0, \tag{5.2}$$

где ρ_0 – некоторая вещественная 1-форма. Из тождества (5.2) следует, что $d\rho_0$ имеет тип (1,1):

$$d\rho_0 \in \Omega^{1,1}_X \subset \Omega^2_X.$$

Но для комплексно-аналитических многообразий имеется следующая

Лемма 5.1. *Любая точная 2-форма, имеющая тип $(1,1)$, представляется в виде*

$$d\rho \in \Omega^{1,1}_X \implies \rho = i(\partial\phi - \overline{\partial}\phi) = J(d\phi), \tag{5.3}$$

где ϕ – некоторая вещественная функция.

В формуле (5.3) мы используем и привычное написание оператора $\partial - \overline{\partial}$ над комплексно-аналитическими многообразиями, и вещественную запись $J(d)$, эквивалентную первой.

Доказательство леммы не представляет труда и может быть получено из локальных вычислений.

Таким образом, вместе с решением уравнения (5.1) над комплексно-аналитическим многообразием мы получаем некоторую функцию ϕ_0 (определенную с точностью до прибавления констант) такую, что вещественная $(1,1)$-форма

$$\omega_0 = (i\partial\overline{\partial}\phi_0)^+ \tag{5.4}$$

определяет на многообразии X риманову метрику, согласованную с данной комплексной структурой. Выражение (5.4) очень напоминает определение плюрисубгармонических функций (см., например, [1]). Было бы очень интересно, если бы наше абсолютно поверхностное замечание действительно отражало какую-либо связь уравнения (5.1) и теории таких функций.

В связи с системой Зайберга–Виттена нам необходимо рассмотреть неоднородный вариант уравнения (5.1). Для того чтобы сделать это в общем случае, рассмотрим в группе $\mathrm{Diff}^+ X$ всех диффеоморфизмов X, сохраняющих ориентацию, подгруппу, состоящую из компоненты тождественного диффеоморфизма. Эта подгруппа

$$\mathrm{Diff}^+_0 X \subset \mathrm{Diff}^+ X$$

может быть определена так: диффеоморфизм $s \in \mathrm{Diff}^+ X$ принадлежит подгруппе $\mathrm{Diff}^+_0 X$, если и только если индуцируемое им ортогональное преобразование решетки $H^2(X,\mathbb{Z})$ является тождественным преобразованием, т.е. на “области определения” канонического отображения τ подгруппа $\mathrm{Diff}^+_0 X$ действует нетривиально, а на “область значений” – тождественно.

Это позволяет рассмотреть неоднородное уравнение

$$\tau(g, J, \omega) = \eta, \tag{5.5}$$

где η – произвольный элемент H^+. Доказанное выше утверждение 3.1 удостоверяет в том, что если K_0 – некоторый базисный канонический класс, то уравнение (5.5) имеет решение для любой правой части. Инвариантность уравнения (5.5) относительно действия $\mathrm{Diff}_0^+ X$ позволяет определить виртуальное пространство модулей решений уравнения (5.5) в объемлющем факторпространстве

$$\mathscr{N}_X^{K_i} = \mathscr{M}_X^{K_i} / \mathrm{Diff}_0^+ X. \tag{5.6}$$

То, что решение существует для любой правой части (5.5), можно определить как стабильность существования решений. Заметим, что подгруппа $\mathrm{Diff}_0^+ X$ сохраняет компоненты $\mathscr{M}_X^{K_i}$, что позволяет в будущем рассмотреть именно покомпонентную факторизацию (5.6) всего пространства эрмитовых троек.

Допустим теперь, что для некоторой ориентации на подлежащем многообразии X выражение $2\chi(X) + 3\sigma(X)$ строго положительно. Тогда имеем, что все канонические классы, допускаемые на X и согласованные с выбранной ориентацией, имеют положительные квадраты. Тогда мы можем рассмотреть уравнение

$$\tau(g, J, \omega) = K_J. \tag{5.7}$$

Конечно, это уравнение можно рассматривать и без условия положительности, однако если $K_J^2 \leqslant 0$, то уравнение (5.7) не имеет решений (за исключением возможного случая $K_J = 0$). Универсальность этого уравнения очевидна – решение такого уравнения инвариантно относительно *всей* группы $\mathrm{Diff}^+ X$. Действительно, теперь и "область значений" изменяется, но изменяется согласованно с "областью определения". Кроме того, инвариантность подрешетки, натянутой на конечное множество базисных классов (см. [10]), дает возможность рассматривать неоднородные уравнения вида (5.7) с произвольным базисным классом в правой части. Конечно, все эти конструкции требуют уточнений, поэтому ограничимся здесь лишь этими замечаниями.

Постановка вопросов о пространстве модулей решений уравнений (5.5) и (5.7) не входит в цели настоящей работы, однако хотелось бы привести несколько простых замечаний, касающихся структуры таких пространств. Из §3 видно, что структура пространства эрмитовых троек достаточно неопределенна, однако утверждение 3.1 показывает, что касательное пространство может быть определено в геометрических терминах. Это особенно хорошо работает в случае, если мы вместо пространства эрмитовых троек рассмотрим его проективизацию – пространство пар

$$\mathscr{M}_X \to \mathscr{L}_X = \{(Q_{\mathrm{conf}}, J)\}, \tag{5.8}$$

где Q_{conf} – конформный класс римановых метрик, а J – некоторая согласованная с этим конформным классом почти комплексная структура. Переход от метрик к конформным классам осуществляется с помощью фиксации некоторой формы объема.

Легко видеть, что в каждом конформном классе существует одна и только одна риманова метрика, индуцирующая фиксированную форму объема. Выбор некоторой формы объема необходим и для того, чтобы избежать некомпактности исходного пространства эрмитовых троек. Поэтому выбор формы объема задает некоторое сечение

$$i\colon \mathscr{L}_X \to \mathscr{M}_X \tag{5.9}$$

расслоения (5.8), и композиция (0.1) и (5.9) дает нам отображение

$$\widetilde{\tau}_{d\mu}\colon \mathscr{L}_X \to H^2(X,\mathbb{R}). \tag{5.10}$$

Техника, используемая для доказательства утверждения 3.1, дает возможность описать пространство $\mathscr{L}_X$ как пространство гладких отображений вещественного многообразия X в многообразие, описывающее всевозможные пары (Q,l), где Q – невырожденная вещественная квадрика в $\mathbb{CP}^3$, а l – проективная прямая без вещественных точек, лежащая на этой квадрике. Следовательно, в таких терминах возможно определить касательное пространство $\mathscr{L}_X$ как пространство деформаций таких отображений, более того, $T\mathscr{L}_X$ допускает существование специальной почти комплексной структуры.

Кроме того, упомянутая в §3 твисторная конструкция для конформного класса римановой метрики может быть модифицирована в рамках настоящей дискуссии. Именно, как отмечалось выше, риманова метрика g на X (а не конформный класс) определяет на твисторном пространстве $Y \to X$ эрмитову тройку (G,J,Ω) (см. §3), в то время как всякая почти комплексная структура реализуется как вложение $i_J\colon X \to Y$. Естественно было бы ожидать того, что имеется связь между решениями уравнений (5.5) и (5.7) и специальными вложениями (например, псевдоголоморфными).

В качестве простейшего примера нулевого уровня напомним, что для келеровой поверхности S (рассматриваем S как вещественное 4-мерное многообразие с эрмитовой тройкой (g,J_S,ω_S) такой, что J_S интегрируема, а ω_S замкнута, т. е. является келеровой формой для S) соответствующее вложение

$$i_{J_S}\colon S \to Y_S$$

является псевдоголоморфным. В то же время уравнение (5.5) с классом $[\omega]=\eta$ в правой части в этом случае, очевидно, имеет решение. Однако в приведенном примере соответствие явно не полно – понятие псевдоголоморфности использует только универсальную почти комплексную структуру на твисторном пространстве, в то время как необходимо участие всех элементов универсальной тройки. Возможный вариант ответа: универсальная тройка (G,J,Ω) на твисторном пространстве Y определяет посредством канонического отображения τ некоторый элемент $H^2(Y,\mathbb{R})$, и необходимо условие псевдоголоморфности вложения $i_J(X)\subset Y$ дополнить подходящим условием, связывающим интегралы от квадратов форм Ω^2 и Ω_H^2 по гладкому циклу $i_J(X)$.

В заключение хотелось бы выразить глубокую благодарность всему коллективу института Макса Планка (Бонн), но особенно – Ю. И. Манину, за создание теплой и дружественной атмосферы, в которой была проделана первая часть настоящей работы. Также хочу выразить благодарность всем сотрудникам института математических исследований (CIMAT, Guanajuato), без помощи и дружеского внимания которых эта работа не была бы доведена до конца.

Список литературы

1. *Demailly J. P.* L^2-vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory // Lect. Notes in Math. V. 1464. Springer, 1994. P. 1–97.
2. *Donaldson S.* The Seiberg–Witten equation and 4-dimensional topology // Bull. of the AMS. 1996. V. 33. № 1. P. 45–70.
3. *Eastwood M., Penrose R., Wells R.* Cohomology and massless fields // Comm. in Math. Physics. 1981. V. 78. P. 305–351.
4. *Griffiths P., Harris J.* Principles of algebraic geometry. N.Y.: Springer, 1978.
5. *Del Rio H.*// Seiberg–Witten invariants of non-simple type and Einstein metrics. DG/0002243. P. 1–19.
6. *Kronheimer P., Mrowka T.* The genus of embedded surfaces in the projective plane // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 797–808.
7. *Kotshchik D., Morgan J., Taubes C.* 4-manifolds without symplectic form but with non-trivial Seiberg–Witten invariant // Math. Res. Lett. 1995. V. 2. P. 119–124.
8. *Penrose R.* The twistor programme // Reports on Mathematical Physics. 1977. V. 12. P. 65–76.
9. *Taubes C.* The Seiberg–Witten invariant and symplectic forms // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 809–822.
10. *Tyurin A.* Six lectures on four manifolds // Lect. Notes in Math. V. 1646. Springer, 1994. P. 186–246.
11. *Тюрин Н. А.* Необходимое и достаточное условия деформации B-монополя в инстантон // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. №1. С. 217–231.
12. *Тюрин Н. А.* Абелевы монополи и комплексная геометрия // Матем. заметки. 1998. Т. 65. №3. С. 420–428.
13. *Тюрин Н. А.* Абелевы монополи: случай положительной размерности многообразий модулей // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №1. С. 197–210.
14. *Witten E.* Monopoles and 4-manifolds // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 769–796.

МИИТ
E-mail: `tyurin@tyurin.mccme.ru`,
`jtyurin@mpim-bonn.mpg.de`

Поступило в редакцию
31.V.2000