Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

M. Müller, On a modification of Prandtl system of the boundary-layer theory for the stationary flow round a plane profile, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 84, 174–184

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.173
January 22, 2025, 21:49:25

М.Мюллер

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ ПРАНДТЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКОГО ПРОФИЛЯ

В [I] О.А.Ладыженская предложила разные модификации системы уравнений Навье-Стокса для описания движения вязкой несжимаемой жидкости. Для одной из этих модификаций в [5] была выведена система уравнений пограничного слоя. Она в свою очередь обобщает известную систему Прандтля уравнений теории пограничного слоя [3].

Задачи пограничного слоя для классической системы Прандтля были исследованы в работах О.А.Олейник [6 - 9]. В частности ею рассмотрен и случай стационарного обтекания плоского профиля.

В настоящей заметке рассматривается задача стационарного обтекания плоского профиля для модифицированной системы уравнений Прандтля. Для этого применяется методика из [6]. При естественных предположениях о данных задачи доказывается существование и единственность классического решения. Здесь дается только краткое изложение основных результатов. Более подробное изложение, включающее доказательства, будет опубликовано в журнале Beiträge zur Analysis, Berlin.

Автор выражает свою благодарность О.А.Ладыженской за постановку задачи и за ценные советы, данные во время разных дискуссий о данной тематике.

I. Постановка задачи

В области $D_A=\{(x,y): 0<x<A, 0<y<+\infty\}$, $A>0$, рассматривается система уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\left[\nu_0+6\nu_1\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{dp(x)}{dx}\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\}\quad(I)$$

с граничными условиями

$$
\left.\begin{aligned}
& u\big|_{y=0}=0\ , \qquad v\big|_{y=0}=v_0(x) \\
& u\big|_{x=0}=u_0(y) \\
& u(x,y)\xrightarrow[y\to\infty]{}\mathcal{U}(x) \qquad \text{равномерно относительно } x\in[0,A]
\end{aligned}\right\}\quad (2)
$$

При этом $\nu_0=\mathrm{const}>0$, $\nu_1=\mathrm{const}\geqslant 0$. $\mathcal{U}(x)$ – продольная компонента скорости внешнего потока. Она удовлетворяет закону Бернулли

$$
\mathcal{U}^2(x)+2p(x)=R_0=\mathrm{const}. \qquad (3)
$$

Пусть выполнены следующие предположения:

$$
\left.\begin{aligned}
& u_0(y)>0 \text{ для } y>0\ , \quad u_0(0)=0\ , \quad u_0'(0)>0, \\
& u_0(y)\xrightarrow[y\to\infty]{}\mathcal{U}(0)\ , \quad \mathcal{U}(x)>0;
\end{aligned}\right\}\quad (4)
$$

u_0, u_0', u_0'' на $[0,\infty]$ ограничены и непрерывны по Гельдеру с некоторым показателем $\beta\in(0,1)$; (5)

$$
\frac{dp}{dx}\ , v_0\in H^{1+\beta}([0,b]) \qquad \text{для любого } b>0. \qquad (6)
$$

В точке $(0,0)$ требуется выполнение условия согласования:

$$
\left.\begin{aligned}
& [\nu_0+6\nu_1 u_0'^2]u_0''-v_0(0)u_0'-p'(0)=O(y^{2(-1-\varkappa)}) \\
& \text{для некоторого } \varkappa\in(0,\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}\right\}\quad (7)
$$

Перейдем теперь к переменным Мизеса. Для этого выберем функцию тока $\Psi=\Psi(x,y)$ такую, чтобы

$$
u=\frac{\partial\Psi}{\partial y}\ , \qquad v-v_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\ , \quad \Psi(x,0)=0
$$

и сделаем замену переменных

$$
\xi=x, \quad \eta=\Psi(x,y).
$$

Для новой искомой функции $w=u^2$ получим из (I) следующее уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} - \sqrt{w}\left[\nu_0 + \frac{3}{2}\nu_1\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + V_0\frac{\partial w}{\partial \eta} = -2\frac{dp}{d\xi}. \qquad (8)$$

Оно рассматривается в области

$$G_A = \{(\xi,\eta): 0<\xi<A,\ 0<\eta<+\infty\}$$

при граничных условиях, вытекающих из (2):

$$\left.\begin{aligned} & w\big|_{\eta=0} = 0, \\ & w(\xi,\eta)\xrightarrow[\eta\to\infty]{} U^2(\xi) \text{ равномерно относительно } \xi\in[0,A] \\ & w\big|_{\xi=0} = w_0(\eta) \equiv u_0^2(g(\eta)), \\ & \text{где } g(\eta) \text{ - обратная для функции } h(y)=\int_0^y u_0(z)\,dz. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Из предположений (4),(5) получим для w_0 следующие свойства:

$$\left.\begin{aligned} & w_0(\eta)>0 \text{ для } \eta>0,\ w_0(0)=0,\ w_0'(0)>0, \\ & w_0(\eta)\xrightarrow[\eta\to\infty]{} U^2(0)\neq 0; \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} & w_0, w_0', \sqrt{w_0}\ w_0'' \text{ ограничены на } [0,+\infty], \\ & w_0, w_0', w_0'' \text{ непрерывны по Гельдеру на } [a,+\infty) \text{ с} \\ & \text{показателем } \beta,\ a>0 \text{ любое.} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Условие согласования (7) дает:

$$\delta(\eta) \equiv \sqrt{w_0}\left[\nu_0 + \frac{3}{2}\nu_1 w_0'^2\right] w_0'' - V_0(0) w_0' - 2p'(0) = O(\eta^{1-\varkappa}). \qquad (12)$$

Считаем, что условия (10)-(12) в дальнейшем всегда выполняются.

2. Вспомогательная задача

Для решения задачи (8), (9) ищется сначала решение уравнения (8) в срезанной области

$$G_{A,\frac{1}{\varepsilon}} = \{(\xi,\eta): 0<\xi<A,\ 0<\eta<\tfrac{1}{\varepsilon}\}$$

с начально-краевыми условиями

$$w_\varepsilon\big|_{\Gamma_{A,\frac{1}{\varepsilon}}} = \varphi_\varepsilon . \qquad (13)$$

Здесь $\Gamma_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$ обозначает часть границы области $G_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$, лежащую на прямых $\eta=0,\ \xi=0,\ \eta=\frac{1}{\varepsilon}$, а φ_ε есть функция со следующими свойствами:

$$\varphi_\varepsilon(0,\eta)=w_0(\eta+\varepsilon) \qquad \text{для } 0\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varphi_\varepsilon(\xi,\eta)\in C^2([0,+\infty)) \qquad \text{для } \eta=0,\ \eta=\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varphi_\varepsilon(\xi,\eta)=\begin{cases} w_0(\varepsilon+\eta)+\delta(\varepsilon+\eta)\xi & \text{для } |\delta(\varepsilon+\eta)|\xi\leqslant\frac{1}{\varphi}w_0(\varepsilon+\eta) \\ \text{любое такое, чтобы} & \\ \frac{1}{2}w_0(\varepsilon+\eta)\leqslant\varphi_\varepsilon(\xi,\eta)\leqslant\frac{3}{2}w_0(\varepsilon+\eta) & \text{для всех} \\ \left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{d\xi}(\xi,\eta)\right|\leqslant|\delta(\varepsilon+\eta)|,\left|\frac{d^2\varphi_\varepsilon}{d\xi^2}(\xi,\eta)\right|\leqslant C_0 & \text{других } \xi \end{cases}$$

$$C_0=\mathrm{const}\geqslant 0,\ \eta=0,\frac{1}{\varepsilon}.$$

Прежде всего построим барьерную функцию для всех возможных решений задачи (8), (13).

ТЕОРЕМА I. Пусть $w_\varepsilon\in H^{1+\frac{\beta}{2},2+\beta}(\bar G_{A,\frac{1}{\varepsilon}}),\ \beta$ есть любое решение задачи (8), (13), а $f=f(\eta)$ – функция со следующими свойствами: $f\in C^2((0,+\infty))$

$$f(\eta)=\begin{cases} K_1\eta^\tau+K_2\eta & \text{для } 0\leqslant\eta\leqslant 1 \\ \text{любое такое, чтобы} & \\ f(1)\leqslant f(\eta)\leqslant K_3, & \text{для } \eta\geqslant 1 \\ |f'(\eta)|\leqslant K_4,\ |f''(\eta)|\leqslant K_5 . & \end{cases}$$

При этом $K_i,\ i=1,\dots,5$ – некоторые постоянные, зависящие от данных задачи; τ – некоторая фиксированная постоянная, $1<\tau<\frac{3}{2}$. Пусть кроме того $\alpha=\mathrm{const}>0$.

Тогда для всех достаточно малых ε справедливы следующие априорные оценки:

а) Если A достаточно мало, то в $\bar G_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$:

$$W_\varepsilon(\xi,\eta) \geqslant \varphi_\varepsilon(\xi,0) + f(\eta)(1+e^{-\alpha\xi}). \tag{14}$$

Постоянная A зависит от свойств функций $\frac{dp}{d\xi}, V_0, W_0$, но не зависит от ε.

б) Если $V_0 \leqslant 0$ и $\frac{dp}{d\xi} \leqslant 0$, то в $\overline{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$ с любым фиксированным $A>0$:

$$W_\varepsilon(\xi,\eta) \geqslant \varphi_\varepsilon(\xi,0) + f(\eta) e^{-\alpha\xi} \tag{15}$$

с) Если $\frac{dp}{d\xi} \leqslant K_0 < 0$, то в $\overline{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$ с любым фиксированным $A>0$:

$$W_\varepsilon(\xi,\eta) \geqslant \varphi_\varepsilon(\xi,0) + f(\eta). \tag{16}$$

Во всех трех случаях постоянные K_i, $i=1,\ldots,5$, α не зависят от ε. Постоянные K_1, K_2, K_3 достаточно малы, α достаточно велико.

Имея в руках барьерную функцию, мы можем после соответствующего изменения коэффициента при $\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial\eta^2}$ в уравнении (8) применить известные результаты О.А.Ладыженской, В.А.Солонникова и Н.Н.Уральцевой по квазилинейным параболическим уравнениям [2]. Это даст следующую теорему существования и единственности решения задачи (8), (13):

ТЕОРЕМА 2. а) Задача (8), (13) имеет для всех достаточно малых единственное решение $W_\varepsilon \in H^{1+\frac{\beta}{2},2+\beta}(\overline{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}})$. Число $A>0$ определяется из теоремы 1.а).

б) Если $\frac{dp}{d\xi} \leqslant 0$, то задача (8), (13) имеет единственное решение $W_\varepsilon \in H^{1+\frac{\beta}{2},2+\beta}(G_{A,\frac{1}{\varepsilon}})$ для всех достаточно малых ε и любого фиксированного $A>0$.

Рассматривая теперь уравнение (8) как линейное с известными коэффициентами, можно привлечь результаты Фридмана [10] по линейной теории параболических уравнений и установить следующие дифференциальные свойства решения задачи (8), (13):

ТЕОРЕМА 3. Для решения $W_\varepsilon \in H^{1+\frac{\beta}{2},2+\beta}(\overline{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}})$ справедливы следующие свойства дифференцируемости:

$$\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial\xi^2}, \frac{\partial^k W_\varepsilon}{\partial\eta^k}, \frac{\partial^l W_\varepsilon}{\partial\xi\partial\eta^{l-1}} \in H^{\frac{\beta}{2},\beta}(\overline{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}} \setminus \Gamma_{A,\frac{1}{\varepsilon}})$$

$$k=3,4,\ldots,\quad l=2,3,\ldots .$$

3. Оценки для W_ε, равномерные по ε.

Для выполнения предельного перехода $\varepsilon \to v$ требуется для решений $W_\varepsilon(\xi,\eta)$ задачи (8), $(13)_2$ с достаточно малым ε и для их производных $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \xi}$, $\frac{\partial W_0}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial \eta^2}$ целый ряд оценок, равномерных по ε. Они доказываются с помощью принципа максимума для параболических операторов и некоторых дополнительных рассуждений и выкладок. Приведем эти оценки.

Число $A > 0$ определяется в соответствии с теоремой I..

ЛЕММА 1. В $\bar{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$ справедлива оценка

$$0 < W_\varepsilon(\xi,\eta) \leqslant A_1 . \tag{17}$$

ЛЕММА 2. Для всех $\xi \in [0,A]$ справедливы оценки

$$0 < A_2 \leqslant \left.\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \leqslant A_3$$

$$\left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \eta}\right|\Bigg|_{\eta=\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant A_4$$

ЛЕММА 3. В $\bar{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \eta}\right| \leqslant A_5 . \tag{18}$$

Учитывая оценки для W_ε и $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \eta}$ и используя результаты О.А.Ладыженской, В.А.Солонникова и Н.Н.Уральцевой [2], можно доказать оценку в норме пространства $H^{1+\frac{\beta}{2},\,2+\beta}$. Однако она получится не по всей области $G_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$, а только для любой ее части, отстоящей от границы $\eta = 0$ на положительное расстояние.

ТЕОРЕМА 4. Для любого фиксированного $\eta^* \in (0,\frac{1}{\varepsilon})$ обозначим

$$G^{\eta^*}_{A,\frac{1}{\varepsilon}} = \{(\xi,\eta) = 0 : 0 < \xi < A,\ \eta^* < \eta < \tfrac{1}{\varepsilon}\}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|w_\varepsilon|^{(2+\beta)}_{\bar{G}^{\eta^*}_{A,\frac{1}{\varepsilon}}} \leqslant A_6, \tag{19}$$

причем постоянная A_6 зависит от η^*.

ЛЕММА 4. В $\bar{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \xi}\right| \leqslant A_7 \tag{20}$$

$$\sqrt{w_\varepsilon}\left|\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \eta^2}\right| \leqslant A_8 \tag{21}$$

ЛЕММА 5. Существует такое $\hat{\eta}>0$, что в $\bar{G}_{A,\hat{\eta}}$ – справедлива оценка

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \eta} \geqslant A_9 > 0\,. \tag{22}$$

ЛЕММА 6. В $\bar{G}_{A,\frac{1}{\varepsilon}}$ справедлива оценка

$$\frac{1}{w_\varepsilon^{1-\varkappa}}\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \xi}\right| \leqslant A_{10}\,. \tag{23}$$

4.Предельный переход $\varepsilon \to 0$.

Решив вспомогательную задачу (8), (13) для всех достаточно малых ε устремим на основании оценок (17)–(19) $\varepsilon \to 0$. При этом окажется, что решения $w_\varepsilon(\xi,\eta)$ задачи (8), (13) стремятся к единственному решению задачи (8), (9).

Введем еще обозначения

$$\tilde{G}_A = \{(\xi,\eta): 0 \leqslant \xi \leqslant A,\ 0<\eta<+\infty\}$$

$$G_A^{\eta^*} = \{(\xi,\eta): 0<\xi<A,\ \eta^*<\eta<+\infty\}.$$

ТЕОРЕМА 5. В $\bar{G}_A$ существует функция $w(\xi,\eta)$ со следующими свойствами:

а) $w \in C^1(\bar{G}_A)$, $\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \in C(\bar{G}_A)$

б) $|w| \leqslant B_1$ в $\bar{G}_A$ (24)

$$B_2\eta \leqslant w(\xi,\eta) \leqslant B_3\eta \quad \text{в} \quad \bar{G}_{A,1} \tag{25}$$

$$w(\xi,\eta) \geqslant B_4 \quad \text{в} \quad \bar{G}_A^1, \tag{26}$$

причем $B_2, B_4 > 0$.

$$\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial w}{\partial \eta}\right| \leqslant B_5 \quad \text{в} \quad \bar{G}_A \tag{27}$$

$$\sqrt{w}\left|\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right| \leqslant B_5 \quad \text{в} \quad \tilde{G}_A \tag{28}$$

с) $$\left|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right| \leqslant B_7 \eta^{1-\varkappa} \quad \text{в} \quad \bar{G}_{A,1} \tag{29}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} \geqslant B_8 > 0 \quad \text{в} \quad \bar{G}_{A,\hat{\eta}}, \tag{30}$$

причем $\hat{\eta} \leqslant 1$ достаточно мало.

Постоянные B_i, $i=1,\ldots,8$, зависят от A и свойств функций $w_0, v_0, \frac{dp}{d\xi}$.

д) Функция $w(\xi,\eta)$ является решением задачи (8), (9). Число A следует взять в соответствии с теоремой I.

Для доказательства заметим, что из оценок (I7)-(I9), равномерных по ε, на основании теоремы Арцелы-Асколи следует существование подпоследовательности $\{w_{\varepsilon k}\} \subseteq \{w_\varepsilon\}$ и такой функции $w(\xi,\eta)$, определенной в $\bar{G}_A$, что выполняются следующие предельные соотношения:

$$w_{\varepsilon_{N+j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} w \qquad \text{равномерно в } \bar{G}_A$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_{\varepsilon_{N+j}}}{\partial \xi} &\xrightarrow[j\to\infty]{} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w_{\varepsilon_{N+j}}}{\partial \eta} &\xrightarrow[j\to\infty]{} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w_{\varepsilon_{N+j}}}{\partial \eta^2} &\xrightarrow[j\to\infty]{} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \end{aligned}\right\} \quad N=2,3,\ldots \qquad \text{равномерно в } \tilde{G}_A$$

Поэтому функция $w(\xi,\eta)$ непрерывна в $\bar{G}_A$, а производные $\frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \frac{\partial w}{\partial \xi}$ непрерывны в $\tilde{G}_A$. Кроме того, функция $w(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению (8). Оценки (24)-(30) являются следствиями оценок (I4)-(23), а из оценок (25), (28) вытекает еще непрерывность производных $\frac{\partial w}{\partial \xi}$, $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ на границе $\eta=0$ области G_A.

Граничное условие $w(\xi,0)=0$ следует из оценки (25), а $w(0,\eta)=w_0(\eta)$ из $w_{\varepsilon_K}(0,\eta)=w_0(\eta+\varepsilon_K)$ и непрерывности функции $w_0(\eta)$. Соотношение $w(\xi,\eta)\xrightarrow[\eta\to\infty]{}U^2(\xi)$, равномерное по $\xi\in[0,A]$, можно установить, используя закон Бернулли (3) и принцип максимума для параболического оператора в полуполосе.

ТЕОРЕМА 6. В множестве функций, определенных в $\bar{G}_A$ и обладающих свойствами а),б) из теоремы 5, существует не более одного решения задачи (8), (9).

Доказательство ведется с помощью принципа максимума в полуполосе.

Можно также доказать, что решение $w(\xi,\eta)$ задачи (8),(9), обладает дифференциальными свойствами аналогичными тем, которые указаны в теореме 3 для решения $w_\varepsilon(\xi,\eta)$ задачи (8),(I3).

5. Решение исходной задачи

Вернемся к задаче (I), (2), считая выполненными условия (4)-(7). Сделаем для этого следующую замену переменных:

$$x=\Phi_1(\xi,\eta)=\xi,\quad y=\Phi_2(\xi,\eta)=\int_0^\eta\frac{d\zeta}{\sqrt{w(\xi,\zeta)}}\,. \tag{3I}$$

На основании оценок (25), (29) можно доказать, что преобразование (3I) непрерывно в $\bar{G}_A$ и якобиан $\frac{D(\Phi_1,\Phi_2)}{D(\xi,\eta)}=\frac{1}{\sqrt{w(\xi,\eta)}}>0$ в $\tilde{G}_A$. Поэтому преобразование (3I) дает взаимно-однозначное отображение области G_A на D_A. Кроме того, существует обратное преобразование, непрерывное в $\bar{D}_A$ и непрерывно дифференцируемое в $\tilde{D}_A$:

$$\xi=F_1(x,y)=x,\quad \eta=F_2(x,y)\,. \tag{32}$$

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$
\left.\begin{aligned}
u(x,y) &= \sqrt{w(x, F_2(x,y))} \\
v(x,y) &= -\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) + v_0(x)
\end{aligned}\right\} \tag{33}
$$

Сформулируем основные результаты для задачи (I), (2).

ТЕОРЕМА 7. Пара функций $\{u(x,y), v(x,y)\}$, определенных соотношениями (33), является решением задачи (I), (2). Эти функции обладают следующими свойствами:

а) $$u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \in C(\bar{D}_A)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \in C(\tilde{D}_A)$$

б) $|u| \leqslant C_1$ в $\bar{D}_A$

$C_2 y \leqslant u(x,y) \leqslant C_3 y$ в $\bar{D}_{A,\tilde{y}}$

$u(x,y) \geqslant C_4$ в $\bar{D}_A^{\tilde{y}}$

для некоторого $\tilde{y} \in (0,1]$. При этом $C_2, C_4 > 0$

$\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right| \leqslant C_5$ в $\bar{D}_A$

$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right| \leqslant C_6$ в $\tilde{D}_A$

с) $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, |v|, \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| \leqslant C_7$ в $\bar{D}_{A,R}$ (34)

для любого $R > 0$.

$\frac{\partial u}{\partial \eta} \geqslant C_8 > 0$ в $\bar{D}_{A,\hat{y}}$

для достаточно малого $\hat{y} \in (0,1]$.

Постоянные C_i, $i = 1,\dots,8$ зависят от A и свойств функций $u_0, v_0, \frac{dp}{dx}$. Постоянная C_7 зависит также и от R.

Число A следует взять в соответствии с теоремой I. Доказательство основывается на свойствах решения $w(\xi,\eta)$ задачи (8),(9) и на свойствах функции преобразования $F_2(x,y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если производная $u_0'(y)$ удовлетворяет условию

$|u_0'(y)| \leqslant m_1 e^{-m_2 y}$ с некоторыми постоянными $m_1, m_2 \geqslant 0$, то для $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ вместо (34) справедливо более сильное утверждение

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| \leqslant C_9 \qquad \text{в } \bar{D}_A .$$

ТЕОРЕМА 8. В множестве пар функций, определенных в $\bar{D}_A$ и обладающих свойствами а),б) из теоремы 7, существует не более одного решения задачи (I),(2). Доказательство можно свести к теореме единственности для задачи (8), (9).

Литература

I. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, I967, I02, 85-I04.

I. Л а д ы ж е н с к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., Наука, I967.

3. Л о й ц я н с к и й Л.Г. Ламинарный пограничный слой, М., Физматгиз, I962.

4. К а н т о р о в и ч Л.В., А к и л о в Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, I959.

5. M u l l e r, M. Uber eine Verallgemeinerung der Prandteschen Grenzschichtgleichungen. - Beitrage zur Analysis,1972,4,69-74.

6. О л е й н и к О.А. О системе уравнений теории пограничного слоя. - Журн.вычислит.мат. и физ., I963 г., 3,№ 3,489-5077.

7. О л е й н и к О.А. К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости. - ПММ, I966,30,№ 5, 80I-82I.

8. О л е й н и к О.А. Об устойчивости решений системы уравнений пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости. - ПММ, I966, 30, № 3, 4I7-423.

9. О л е й н и к О.А. Математические задачи теории пограничного слоя. - УМН, I968, 23,№ 3, 3-65.

I0. Ф р и д м а н А. Уравнения параболического типа, М., Мир, I968.