

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Безвербный, А. В. Шаповалов, Моделирование кинетики атомарного ансамбля в световом поле с помощью уравнения Ланжевена, *Матем. моделирование*, 2004, том 16, номер 9, 49–60

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

20 марта 2025 г., 18:55:35



**МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ АТОМАРНОГО АНСАМБЛЯ
В СВЕТОВОМ ПОЛЕ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА**© *А.В. Безвербный*^{1,2)}, *А.В. Шаповалов*²⁾¹⁾ Морской государственный университет им. адм. Г.И. Невельского, Владивосток, 690059²⁾ Томский государственный университет, Томск, 634046

e-mail: alexb@mail.vntc.ru, alexb@msun.ru

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 04-02-16488

Рассмотрено моделирование кинетики атомарного ансамбля в резонансном неоднородно поляризованном лазерном поле в рамках квазиклассического подхода, основанное на пошаговом интегрировании уравнения Ланжевена (УЛ). Характерными особенностями этого уравнения являются наличие вихревой компоненты и анизотропия тензора диссипации в регулярной силе, а также координатная зависимость и анизотропия тензора корреляции от случайной силы. Представлены различные схемы пошагового интегрирования УЛ. Для двумерной (2D) модели исследуется влияние вихревой компоненты и анизотропии диссипативных и диффузионных процессов на координатное и импульсное распределения атомов, полученные с помощью моделирования динамики одной частицы в соответствии с УЛ. Рассмотрены особенности кинетических распределений для трехлучевой 2D конфигурации поля, полученных с помощью различных схем пошагового интегрирования УЛ.

**MODELLING OF KINETICS OF ATOMIC ENSEMBLE
IN A LIGHT FIELD USING THE LANGEVIN EQUATION***A. V. Bezverbny*^{1,2)}, *A. V. Shapovalov*²⁾¹⁾ Maritime State University, Vladivostok, 690059²⁾ Tomsk State University, Tomsk, 634046

Numerical simulation of kinetics of atomic ensemble in resonant non-uniformly polarized laser field within the bounds of quasiclassical approximation is considered on the basis of step-by-step integration of Langevin equation (LE). Characteristic properties of this equation are the vortex-type component in the light-induced force and anisotropy of tensor of dissipation in the regular force, as well as coordinate dependence and anisotropy of correlation tensor of the random force. Various algorithms of step-by-step integration of LE are presented. For a two-dimensional (2D) model the influence of vortex-type component in force and the influence of anisotropy of processes of dissipation and diffusion are investigated for the coordinate and momentum distributions of atoms which are obtained by means of modelling of dynamics of single particle in accordance with LE. Some features in three-beam 2D configuration of light field are considered for kinetic distributions, which are formed on basis of various schemes of step-by-step integration of LE.

Введение

В настоящее время кинетика атомарных ансамблей в световых полях представляет значительный интерес: за последние два десятилетия достигнуты большие успехи в лазерном охлаждении [1], захвате и удержании атомов с образованием периодических и квазипериодических пространственных структур (оптических решеток) [2]. При анализе экспериментальных данных в достаточно сложных двумерных (2D) и трехмерных (3D) полевых конфигурациях и при учете реальной структуры энергетических уровней атомов преимущественно используются методы численного моделирования исходных квантовых кинетических уравнений: численное интегрирование квантовых уравнений для матрицы плотности атомов в импульсном пространстве [3]; рассмотрение зонной модели для атомарной среды во внешнем поле; метод Монте-Карло для волновых атомарных функций [4]. Эти методы дают хорошее количественное согласование результатов моделирования с

данными эксперимента, но требуют значительных вычислительных ресурсов. К тому же остается скрытой роль различных физических механизмов, приводящих к локализации и охлаждению атомов.

Квазиклассический подход [5, 6] является наглядным, хотя и ограниченным в применении¹. Он позволяет детально рассмотреть физические механизмы захвата и охлаждения атомов, оценить различные вклады в кинетические характеристики всего ансамбля. В основе подхода лежит описание кинетического этапа эволюции атомарного ансамбля посредством уравнения Фоккера-Планка (УФП) для функции распределения атомов $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в фазовом пространстве. Коэффициентами уравнения являются вектор дипольной силы $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и тензор диффузии $\hat{D}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в пространстве импульсов. Однако численное решение этого уравнения в полевых конфигурациях размерности $D > 1$ (при размерности фазового пространства $2D$) проблематично, тогда как методы интегрирования эквивалентного уравнения Ланжевена (УЛ) [7, 8], являющегося системой стохастических дифференциальных уравнений, вполне развиты, что позволяет провести моделирование динамики атомов под действием регулярных и случайных сил даже в условиях ограниченных вычислительных ресурсов.

В данной работе показано, что при моделировании кинетики медленных атомов в световых конфигурациях размерности $D > 1$ возникает проблема выбора схемы интегрирования УЛ, так как здесь помимо потенциальной составляющей у регулярной силы имеется вихревая компонента, а второй момент случайной силы, пропорциональный \hat{D} , существенно зависит от координаты. Диссипативные и диффузионные процессы анизотропны. Так, в $2D$ диссипативных атомарных решетках в областях преимущественной локализации имеется сильная анизотропия по радиальному и азимутальному направлениям относительно центров локализации: при существенном радиационном охлаждении по радиальной степени свободы обычно отсутствует эффективное охлаждение по азимутальному направлению. В итоге задача оказывается чувствительной к выбору алгоритма пошагового интегрирования УЛ. Рассматривается $2D$ модельная система с одним центром локализации при наличии вихревой силы и наличии анизотропии в диссипации и диффузии по радиальному и азимутальному направлениям. Исследуются кинетические атомарные распределения в симметричной полевой $2D$ конфигурации. Координатное и импульсное распределения формируются как результат большого числа $N \sim 10^7$ шагов интегрирования УЛ и демонстрируют образование периодических пространственных структур в плотности атомов, а также установление узких импульсных распределений за счет радиационного охлаждения. Проведен сравнительный анализ различных схем интегрирования УЛ на примерах данных моделей.

1. Особенности кинетических коэффициентов

Кинетика ансамбля из атомов, имеющих дипольные переходы $j_0 \rightarrow j_1$ (j_0 и j_1 – полные угловые моменты основного и возбужденного состояний атома) и резонансно взаимодействующих с полем ((...)* означает комплексное сопряжение)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^s (e^{-i\omega t + ik_n \mathbf{r}} \mathbf{E}_n + \text{к.с.}) = e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + e^{i\omega t} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}), \quad (1)$$

образованной конфигурацией из s когерентных световых пучков одинаковой частоты ω с волновыми векторами \mathbf{k}_n , в квазиклассическом приближении описывается замкнутым УФП

$$(\partial_t + \mathbf{v} \nabla) \mathcal{F} = -\nabla_{\mathbf{p}} (\mathbf{F} \mathcal{F}) + (1/2) \cdot \left(\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \hat{D} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) \mathcal{F}, \quad (2)$$

где ∇ , $\nabla_{\mathbf{p}}$ – градиенты по координатам и импульсам.

¹ например, он не дает корректных оценок для температуры атомарного ансамбля в пределах малых интенсивностей I и больших отстроек δ от резонанса для светового поля

Существуют различные подходы к моделированию кинетики атомов в данном приближении. В [7] кинетические коэффициенты \mathbf{F} , $\hat{\mathcal{D}}$ рассчитываются каждый раз на очередном шаге при решении некоторых кинетических уравнений для поляризационных атомарных операторов. Данный метод позволяет в принципе рассматривать произвольную полевою конфигурацию, в том числе с флуктуирующими параметрами поля, для достаточно широкого диапазона скоростей атомов и интенсивностей поля. Другой метод, представленный в [8], является по форме квазиклассическим, однако в нем не рассматривается УФП на $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ для всего ансамбля. Здесь при моделировании динамики атома действующая потенциальная сила \mathbf{F}_i зависит от его внутреннего (адиабатического) состояния $|i\rangle$, изменяющегося случайным образом и скачкообразно в процессе оптической накачки. Подход, представленный в данной работе, опирается на первый метод в рамках приближения медленных атомов, когда для корректного учета диссипативных процессов в \mathbf{F} достаточно ограничиться нулевым и первым порядками по скорости, а в $\hat{\mathcal{D}}$ – нулевым порядком по скорости:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \approx \mathbf{F}_0(\mathbf{r}) + \hat{\mathcal{X}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \quad , \quad \hat{\mathcal{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \approx \hat{\mathcal{D}}^i(\mathbf{r}) + \hat{\mathcal{D}}^s(\mathbf{r}) \quad , \quad (3)$$

где $\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$ – эффективная сила, действующая на неподвижный атом и определяющая процессы захвата и локализации атомов; $\hat{\mathcal{X}}$ – тензор, симметричная компонента которого определяет процессы радиационного трения, а роль антисимметричного вклада эквивалентна действию некоторой эффективной силы лоренцевского типа $\sim \mathbf{v} \times \mathbf{V}_{\text{эф}}$; тензор $\hat{\mathcal{D}}^i$ определяет интенсивность флуктуаций дипольной силы за счет вынужденных, а $\hat{\mathcal{D}}^s$ – за счет спонтанных переходов в атоме. Данное приближение адекватно описывает экспериментальные результаты, соответствующие области линейной зависимости температуры ансамбля от интенсивности суммарного поля. В [9] показано, что в этом случае существуют *аналитические представления* для коэффициентов (3), пригодные для *произвольных полевых конфигураций* вида (1). В частности, в [9] приведены выражения $\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$, $\hat{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{D}}^i$ и $\hat{\mathcal{D}}^s$ для дипольных переходов $0 \rightarrow 1$, $1/2 \rightarrow 3/2$ и $1 \rightarrow 2$. В [10, 11] приведены результаты для перехода $1/2 \rightarrow 1/2$, а также рассмотрены особенности пространственных распределений этих коэффициентов, где показано, что в окрестностях точек с циркулярной и линейной поляризациями и вблизи экстремумов интенсивности поля (1) асимптотики тензоров $\hat{\mathcal{X}}$ и $\hat{\mathcal{D}}$ содержат вклады с неопределенностями вида $(\mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{r}})/\hat{r}$, где \mathbf{C} – некоторый постоянный вектор, а \hat{r} означает расстояние до особой области конфигурации.

Отметим особенности \mathbf{F}_0 , $\hat{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{D}}$, имеющие, по нашему мнению, принципиальное значение при моделировании стохастической динамики атома в световом поле.

1. В конфигурациях размерности $D > 1$ сила $\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$ наряду с потенциальным вкладом $\mathbf{F}_0^{\text{P}} = -\nabla V$ (т.н. градиентная сила, определяющая процессы захвата атомов) также содержит вихревую компоненту \mathbf{F}_0^{V} (сила светового давления), где $\text{div} \mathbf{F}_0^{\text{V}} = 0$. Здесь V имеет смысл эффективного потенциала. Обычно \mathbf{F}_0^{P} ассоциируют с эффектами отдачи в процессах вынужденного излучения-поглощения фотонов, принадлежащих различным световым пучкам, формирующим поле (1), тогда как для \mathbf{F}_0^{V} принципиальную роль играет эффект отдачи при спонтанном испускании фотона возбужденным атомом. Следует отметить различный характер зависимости \mathbf{F}_0^{P} и \mathbf{F}_0^{V} от отстройки δ частоты поля ω от резонанса ω_0 : первая компонента имеет дисперсионную зависимость, а вторая является четной функцией δ , и при $|\delta| \gg \gamma$ их отношение $|\mathbf{F}_0^{\text{V}}/\mathbf{F}_0^{\text{P}}| \sim \gamma/|\delta| \ll 1$. Здесь γ^{-1} – время жизни возбужденного состояния атома. Положение областей локализации атомов зависит от знака δ и типа перехода. Например, при $\delta > 0$ для перехода $1/2 \rightarrow 1/2$ (тип **I**) это области минимумов интенсивности либо области циркулярной поляризации, а для перехода $1/2 \rightarrow 3/2$ (тип **II**) это области минимумов интенсивности либо области линейной поляризации.

2. Симметричный тензор $\mathcal{X}_{ij}^s = 1/2(\mathcal{X}_{ij} + \mathcal{X}_{ji})$ определяет протекание диссипативных процессов в ансамбле, в зависимости от знаков собственных значений χ_a . Так, при $\chi_a < 0$ в направлении, задаваемом соответствующим собственным вектором, имеет место лазерное

охлаждение. Известно несколько возможных механизмов этого явления [12]: доплеровский механизм, сизифовский эффект и т.д. Следует отметить, что при размерности $D > 1$ величины $\chi_a(\mathbf{r})$ в общем случае являются знакопеременными: в некоторых областях конфигурации возможно одновременное существование механизмов разогрева и охлаждения во взаимно перпендикулярных направлениях.

3. Симметричные тензоры \hat{D}^i и \hat{D}^s имеют собственные значения $\sigma_a \geq 0$. Сильная пространственная зависимость тензора $\hat{D}(\mathbf{r})$ диктуется зависимостью его компонент от локального значения степени линейной поляризации светового поля [13] $l(\mathbf{r}) = (\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_1^*) / \mathcal{J}_0^2$, определенной через полевые инварианты $\mathcal{J}_0 = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r})$ и $\mathcal{J}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$, где $l = 1$ соответствует линейной поляризации, а $l = 0$ – циркулярной поляризации поля. Обычно \hat{D} является анизотропным из-за разного порядка величин σ_a .

2. Уравнение Ланжевена: особенности моделирования

В пренебрежении зависимостью \hat{D} в (3) от \mathbf{p} не возникает проблем с определением эквивалентного к УФП (2) УЛ из-за различия в интерпретации шума по Ито и Стратоновичу [7]. Его вид в безразмерной форме

$$(d\mathbf{P})/(d\tau) = \mathbf{f}_0 + \mu \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{f}; \quad \langle \mathbf{f}(0) \otimes \mathbf{f}(\tau) \rangle = \mu \hat{\mathbf{D}} \delta(\tau), \quad (4)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}/p_0; \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}/r_0; \quad \tau = t/t_e; \quad \mathbf{f}_0 = t_e \mathbf{F}_0/p_0; \quad \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathcal{X}}/(2\omega_r); \quad \hat{\mathbf{D}} = \hat{D}/((\hbar k)^2 t_i),$$

где $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$ – прямое произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , случайная сила \mathbf{f} имеет гауссовское распределение [14]. Здесь $\mu = \sqrt{2\omega_r t_i} \ll 1$ – малый безразмерный параметр квазиклассичности, $\hbar\omega_r = (\hbar k)^2/(2m)$ – энергия отдачи при излучении фотона, $t_i = (\gamma S)^{-1}$ – характерное время динамики атомов по внутренним степеням свободы (время оптической накачки основного состояния атома), $t_e = t_i/\mu$ – характерное время для поступательных степеней свободы.

Моделирование кинетических характеристик *атомарного ансамбля* на основе стохастической динамики *одиночного атома* в соответствии с (4) возможно, если выполняется условие эргодичности² для движения атома в поле случайных светоиндуцированных сил [7]. Тогда можно оценить (квази)стационарные кинетические распределения *ансамбля*, отслеживая положение атома в фазовом пространстве через малые временные интервалы $\epsilon \ll 1$ за достаточно большой промежуток времени $\tau_{\max} \gg 1$. Для симметричных конфигураций поля достаточно рассмотреть ограниченную область фазового пространства, выбрав координатные границы $\{\mathbf{R}\}_{\text{lim}}$ по форме ячейки симметрии поля (1) с заданием циклических условий на границах. Границы $\{\mathbf{P}\}_{\text{lim}}$ по импульсам связаны с механизмами радиационного охлаждения, не позволяющими атому иметь большие скорости. Тогда конечную фазовую область можно разбить на ячейки, с различными вариантами разбиения в зависимости от типа моделируемых распределений, а процедуру моделирования кинетических распределений свести к подсчету “посещений” одним атомом ячеек фазового пространства.

Далее будут рассмотрены только 2D конфигурации, для которых в основном моделировались \mathbf{R} -распределение $\mathcal{F}(\mathbf{R}) = \int d^2\mathbf{P} \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{P})$, описывающее пространственную плотность атомов, и \mathbf{P} -распределение $\mathcal{F}(\mathbf{P}) = \int d^2\mathbf{R} \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{P})$, позволяющее оценить температуру всего ансамбля. Для этого разбивались по отдельности \mathbf{R} - и \mathbf{P} -области, каждая на $N_1 \times N_2$ ячеек (где $N_1 \sim N_2 \sim 100$), и находились числа “посещений” этих ячеек.

²В наших численных экспериментах на эргодичность динамики указывал характер движения атома: траектория охватывала все фазовое пространство при большом временном промежутке моделирования, где частота посещения фазовых ячеек стремилась к (квази)стационарному распределению и не зависела от выбора начальных условий

3. Алгоритмы пошагового интегрирования

Интегрирование УЛ актуально в различных областях физики [15-17] и в пошаговых расчетах проводится на малом интервале $\epsilon \ll 1$. Представим алгоритмы, использованные в данной работе.

1. Алгоритм Эйлера и его модификации. На $(n+1)$ -м шаге для расчета \mathbf{R}_{n+1} и \mathbf{P}_{n+1} в соответствии с интерпретацией Ито [16, 18]:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{P}_n = \epsilon(\mathbf{f}_0(\mathbf{R}_n) + \mu \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{R}_n) \cdot \mathbf{P}_n) + \sqrt{\mu \hat{\mathcal{D}}(\mathbf{R}_n)} \epsilon \cdot \boldsymbol{\xi} = (\Delta \mathbf{P})_d + (\Delta \mathbf{P})_r, \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_n = \epsilon \mathbf{P}_n, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\xi}$ – случайный гауссовский вектор с моментами $\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = 0$, $\langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}$. Проблем с извлечением корня у $\hat{\mathcal{D}}$ не возникает из-за уже упомянутого свойства $\sigma_a \geq 0$. Модификации состояли в выборе случайного вклада в $(\Delta \mathbf{P})_r$ со статистикой Пуассона [7] и в расчете детерминированного вклада по методу Гира.

2. Алгоритмы второго порядка. Известны алгоритмы, основанные на разложении Тейлора [17] либо методе Рунге-Кутты [16]. Мы использовали алгоритмы второго типа вследствие отсутствия гладкости в коэффициентах \mathbf{f}_0 , $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathcal{D}}$ (приведен порядок расчета $\{\mathbf{P}_{n+1}, \mathbf{R}_{n+1}\}$ по заданным $\{\mathbf{P}_n, \mathbf{R}_n\}$).

а) алгоритм RK1, основанный на факторизации эквивалентного УФП [16]:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \mathbf{P}^* = \mathbf{P}_n + (\epsilon/4) \mathbf{f}_d(\mathbf{R}_n, \mathbf{P}_n), & \mathbf{R}^* &= \mathbf{R}_n + (\epsilon/4) \mathbf{P}_n; \\ \text{(II)} \quad & \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}_n + (\epsilon/2) \mathbf{f}_d(\mathbf{R}^*, \mathbf{P}^*), & \mathbf{R}^{(1)} &= \mathbf{R}_n + (\epsilon/2) \mathbf{P}^*; \\ \text{(III)} \quad & \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)} + \sqrt{\epsilon} \mathcal{G}(\mathbf{R}^{(1)}) \cdot \boldsymbol{\xi}, & \mathbf{R}^{(2)} &= \mathbf{R}^{(1)}; \\ \text{(IV)} \quad & \mathbf{P}^{**} = \mathbf{P}^{(2)} + (\epsilon/4) \mathbf{f}_d(\mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{P}^{(2)}), & \mathbf{R}^{**} &= \mathbf{R}^{(2)} + (\epsilon/4) \mathbf{P}^{(2)}; \\ \text{(V)} \quad & \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}^{(2)} + (\epsilon/2) \mathbf{f}_d(\mathbf{R}^{**}, \mathbf{P}^{**}), & \mathbf{R}_{n+1} &= \mathbf{R}^{(2)} + (\epsilon/2) \mathbf{P}^{**}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее использованы сокращения $\mathbf{f}_d = \mathbf{f}_0 + \mu \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}$, $\mathcal{G} = \sqrt{\hat{\mathcal{D}}}$, $\boldsymbol{\xi}$ – гауссовский вектор; б) алгоритм RK2, основанный на ином порядке факторизации эквивалентного УФП [16]:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}_n + \sqrt{\epsilon/2} \mathcal{G}(\mathbf{R}_n) \cdot \boldsymbol{\xi}^{(1)}, & \mathbf{R}^{(1)} &= \mathbf{R}_n; \\ \text{(II)} \quad & \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^{(1)} + (\epsilon/2) \mathbf{f}_d(\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{P}^{(1)}), & \mathbf{R}^* &= \mathbf{R}^{(1)} + (\epsilon/2) \mathbf{P}^{(1)}; \\ \text{(III)} \quad & \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)} + \epsilon \mathbf{f}_d(\mathbf{R}^*, \mathbf{P}^*), & \mathbf{R}^{(2)} &= \mathbf{R}^{(1)} + \epsilon \mathbf{P}^*; \\ \text{(IV)} \quad & \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}^{(2)} + \sqrt{\epsilon/2} \mathcal{G}(\mathbf{R}^{(2)}) \cdot \boldsymbol{\xi}^{(2)}, & \mathbf{R}_{n+1} &= \mathbf{R}^{(2)}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ – независимые случайные гауссовские векторы;

в) leap-frog алгоритм LF предложен в [15] применительно к задачам с мультипликативным шумом $\hat{\mathcal{D}} \neq \text{const}$. Мы использовали его модификацию в виде

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \mathbf{P}^* = \mathbf{P}_n + (\epsilon/2) \mathbf{f}_d(\mathbf{R}_n, \mathbf{P}_n), & \mathbf{R}^* &= \mathbf{R}_n + (\epsilon/2) \mathbf{P}_n; \\ \text{(II)} \quad & \mathbf{P}^{(d)} = \mathbf{P}_n + \epsilon \mathbf{f}_d(\mathbf{R}^*, \mathbf{P}^*), & \mathbf{R}^{(d)} &= \mathbf{R}^* + (\epsilon/2) \mathbf{P}^{(d)}; \\ \text{(III)} \quad & \mathbf{P}^{(r)} = \sqrt{\epsilon} \mathcal{G}(\mathbf{R}^*) \cdot \boldsymbol{\xi} + (\epsilon^{3/2}/2) \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{R}_n) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{R}_n) \cdot \boldsymbol{\xi}, & \mathbf{R}^{(r)} &= (\epsilon^{3/2}/3) \mathcal{G}(\mathbf{R}_n) \cdot \boldsymbol{\xi}; \\ \text{(IV)} \quad & \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}^{(d)} + \mathbf{P}^{(r)}, & \mathbf{R}_{n+1} &= \mathbf{R}^{(d)} + \mathbf{R}^{(r)}, \end{aligned}$$

где моменты ξ имеют вид $\langle \xi_i \rangle = \langle (\xi_i)^3 \rangle = \langle (\xi_i)^5 \rangle = 0$, $\langle (\xi_i)^2 \rangle = 1$, $\langle (\xi_i)^4 \rangle = 3$ [15].

3. “Эвристический” алгоритм (ЭА). Рассмотрим обобщение на случай $D > 1$ алгоритма, учитывающего поправки всех порядков по ϵ [7, 19] при постоянных кинетических коэффициентах \mathbf{f}_0 , $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{D}}$, когда для УЛ вида (4) известно точное решение:

$$\mathbf{P}(\epsilon) - \mathbf{P}(0) = \Delta_d \mathbf{P} + \Delta_r \mathbf{P} = \int_0^\epsilon dx e^{\mu \hat{\mathbf{x}} x} \cdot \mathbf{f}_0 + \int_0^\epsilon dx e^{\mu \hat{\mathbf{x}} x} \cdot \mathbf{f}, \quad (8)$$

$$\mathbf{R}(\epsilon) - \mathbf{R}(0) = \Delta_d \mathbf{R} + \Delta_r \mathbf{R} = \int_0^\epsilon dx \Delta_d \mathbf{P} + \int_0^\epsilon dx \Delta_r \mathbf{P}, \quad (9)$$

где моменты случайных вкладов $\{\Delta_r \mathbf{R}, \Delta_r \mathbf{P}\}$ определены как

$$\langle \Delta_r \mathbf{P} \rangle = 0; \quad \langle \Delta_r \mathbf{P} \otimes \Delta_r \mathbf{P} \rangle = \hat{\mathfrak{P}} = \int_0^\epsilon dx e^{\mu \hat{\mathbf{x}} x} \cdot (\mu \hat{\mathbf{D}}) \cdot e^{\mu \hat{\mathbf{x}}^T x}; \quad (10)$$

$$\langle \Delta_r \mathbf{R} \rangle = 0; \quad \langle \Delta_r \mathbf{R} \otimes \Delta_r \mathbf{R} \rangle = \hat{\mathfrak{R}} = \int_0^\epsilon dx \left(1 - e^{\mu \hat{\mathbf{x}} x}\right) (\mu \hat{\mathbf{x}})^{-1} \mu \hat{\mathbf{D}} \left(1 - e^{\mu \hat{\mathbf{x}}^T x}\right) (\mu \hat{\mathbf{x}}^T)^{-1} \quad (11)$$

в соответствии со статистическими свойствами \mathbf{f} . Здесь $\hat{\mathbf{x}}^T$ – транспонированная матрица. Матрицы $\hat{\mathfrak{P}}$ и $\hat{\mathfrak{R}}$, как и $\hat{\mathbf{D}}$, симметричны и имеют неотрицательные собственные значения.

Экстраполируем (8)-(9) на случай изменяющихся за шаг ϵ коэффициентов \mathbf{f}_0 , $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{D}}$. Тогда ЭА можно представить в виде

$$(I) \quad \mathbf{P}^{(d)} = \mathbf{P}_n + \Delta_d \mathbf{P}(\epsilon), \quad \mathbf{R}^{(d)} = \mathbf{R}_n + \Delta_d \mathbf{R}(\epsilon); \quad (12)$$

$$(II) \quad \mathbf{P}^{(r)} = \sqrt{\hat{\mathfrak{P}}} \cdot \xi, \quad \mathbf{R}^{(r)} = \sqrt{\hat{\mathfrak{R}}} \cdot \xi; \quad (13)$$

$$(III) \quad \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}^{(d)} + \mathbf{P}^{(r)}, \quad \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}^{(d)} + \mathbf{R}^{(r)}. \quad (14)$$

Здесь нахождение $\{\Delta_d \mathbf{P}(\epsilon), \Delta_d \mathbf{R}(\epsilon)\}$ составляет обычную задачу Коши для системы (4) в пренебрежении случайной силой \mathbf{f} , которая решалась по методу Гира, пригодному при интегрировании жестких систем ОДУ.

Особенность ЭА заключается в шаге (13), корректирующем диффузионные поправки к координате и импульсу за счет “поворота”, задаваемого матрицей $\hat{\mathbf{x}}$. Расчет $\hat{\mathfrak{P}}$ и $\hat{\mathfrak{R}}$ основан на формулах для интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра [20]. Так, при $D = 2$ и $\chi_1 \neq \chi_2$ (в общем случае это комплексные числа)

$$e^{\mu \hat{\mathbf{x}} x} = (\chi_1 - \chi_2)^{-1} \left[(e^{\mu \chi_1 x} - e^{\mu \chi_2 x}) \hat{\mathbf{x}} - (\chi_2 e^{\mu \chi_1 x} - \chi_1 e^{\mu \chi_2 x}) \right].$$

Как отмечено в [7], расчет различных вариантов 1D моделей показал, что данный алгоритм обладает большей устойчивостью в сравнении с методами, основанными на удержании поправок фиксированной степени по ϵ .

4. Эталонная модель

Рассмотрим упрощенную 2D модель, обладающую тремя отмеченными выше особенностями кинетических коэффициентов: имеются симметричный потенциал с центром притяжения в $\mathbf{R}_0 = 0$, вихревая сила, анизотропные диссипативные и диффузионные процессы. Пусть в полярной системе координат с ортами $\{\mathbf{n}_R, \mathbf{n}_\varphi\}$ кинетические коэффициенты имеют вид

$$\mathbf{f}_0 = -A_1 \mathbf{n}_R + A_2 \mathbf{n}_\varphi; \quad \hat{\mathbf{x}} = -B_1 \mathbf{n}_R \otimes \mathbf{n}_R - B_2 \mathbf{n}_\varphi \otimes \mathbf{n}_\varphi; \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = C_1 \mathbf{n}_R \otimes \mathbf{n}_R + C_2 \mathbf{n}_\varphi \otimes \mathbf{n}_\varphi.$$

Здесь $A_1 > 0$, влияние вихревой силы регулируется величиной A_2 , анизотропия диффузионных и диссипативных процессов в радиальном и азимутальном направлениях устанавливается различием функций $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$ и соответственно B_1 , B_2 . Принципиален выбор знака последних: при $B_a > 0$ имеет место охлаждение в данном направлении, а при $B_a < 0$ – разогрев.

По результатам моделирования выделим следующие кинетические сценарии:

Нестабильный режим: $B_1, B_2 < 0$. Все схемы интегрирования УЛ показали рост P и R атома с увеличением времени интегрирования τ_{\max} .

Квазистационарный режим: одно из значений $B_a > 0$ (“охлаждаемая” с-степень свободы), тогда как другое значение $B_a \lesssim 0$ (h-степень свободы). При использовании схем RK1, RK2 траектория атома достаточно быстро выходит на нестабильный режим. Алгоритмы LF и ЭА также показывают рост полуширин \mathbf{P} - и \mathbf{R} -распределений, но они позволяют обнаружить практически важный квазистационарный режим, когда даже для больших промежутков моделирования $\tau_{\max} \sim 10^4$ формируются *локализованные* \mathbf{R} - и \mathbf{P} -распределения. Полуширины этих распределений зависят от величины τ_{\max} , что демонстрирует важное свойство стохастической динамики: даже при наличии сильного охлаждения по с-степеням отсутствие охлаждения по h-степеням приводит к *общему разогреву всей системы* из-за диффузионных явлений. На рис. 1а представлены линии уровня распределения азимутальной компоненты импульса $P_\varphi(R) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_\varphi)$ (ячейками являлись кольца в координатном пространстве радиусом R и толщиной $\delta_R \sim 0.1$) при величинах $A_1 = R$, $A_2 = 0$, $B_1 = 0.1$, $B_2 = 0$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.1$, задающих отсутствие азимутального трения при наличии диффузии в этом направлении. Сплошные линии соответствуют $\tau_{\max,1} = 5 \cdot 10^4$, штриховые – $\tau_{\max,2} = 2 \cdot 10^5$. Два “хвоста” в области $R > 6.0$ указывают на формирование противоположно направленных вихревых потоков с одинаковой величиной угловой скорости. Выбор ветви “хвоста”, на которой частица преимущественно находится, случаен, и при $\tau_{\max} > \tau_{\max,2}$ траектория частицы очень быстро уходит за границы $\{R_{\lim}, P_{\lim}\}$ за счет роста P_φ по выбранной ветви.

Стационарный режим: $B_1, B_2 > 0$. Формируются кинетические распределения, структура которых устойчива к вариациям ϵ и τ_{\max} . Выделим следующие кинетические сценарии в зависимости от вклада различных процессов.

A1. Влияние вихревой силы незначительно, охлаждение и диффузия по азимутальному и радиальному направлениям имеют одинаковый порядок ($B_2/C_2 \sim B_1/C_1$). Формируются распределения с центрами локализации $\mathbf{R} = 0$ и $\mathbf{P} = 0$, ширина которых зависит от величины C/B , выступающей в роли эффективной температуры.

A2. Влияние вихревой силы незначительно, но имеется существенная анизотропия диффузионных и диссипативных процессов. На рис. 1б представлено P_φ -распределение при $B_1 = 0.2$, $C_1 = 0.1$ и $B_2 = 0.005$, $C_2 = 1.0$ (азимутальная “температура” C_2/B_2 существенно выше радиальной C_1/B_1), а на рис. 1в – при $B_1 = 0.05$, $C_1 = 1.0$ и $B_2 = 0.2$, $C_2 = 0.1$ ($C_1/B_1 \gg C_2/B_2$). В первом случае наблюдается формирование двух “хвостов” аналогично случаю квазистационарного режима, однако с ростом τ_{\max} траектория частицы остается локализованной.

Б. Заметен вклад вихревой силы ($A_2 = 0.1$). Очевидно, эта сила удаляет частицу от минимума потенциала, тогда как азимутальное охлаждение компенсирует этот эффект. P_φ -распределения демонстрируют различное их соотношение: рис. 1г – влияние азимутального охлаждения значительно ($B_1 = B_2 = 0.05$, $C_1 = C_2 = 0.2$), рис. 1д – азимутальное охлаждение невелико ($B_1 = 0.1$, $B_2 = 0.01$, $C_1 = C_2 = 0.2$). В обоих случаях вихревая сила приводит к смещению максимумов распределений в область $R \approx A_2/B_2$ в соответствии с простой оценкой, вытекающей из условия динамического равновесия $\mathbf{F}_0^v + \mathcal{X}^s \cdot \mathbf{v} = 0$ для азимутального направления. Смещение максимумов соответствует направленным вихревым потокам по \mathbf{n}_φ с учетом того, что $A_2 > 0$. Показательны также \mathbf{P} - и \mathbf{R} -распределения: на рис. 2 приведены $\mathcal{F}(\mathbf{R})$, соответствующие ϵ и δ рис. 1 и демонстрирующие различную степень сноса частиц от центра локализации за счет вихревой силы.

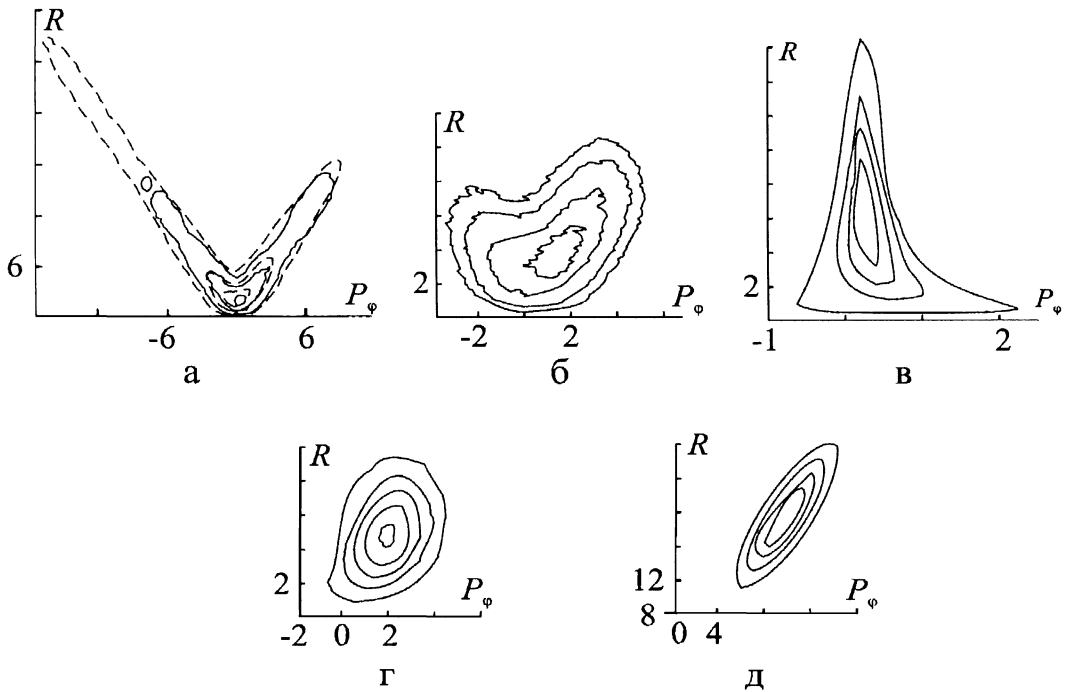


Рис. 1. Линии уровней распределения азимутальной компоненты импульса $P_\varphi(R)$: а – квазистационарный режим; б-д – стационарный режим, где б – азимутальная “температура” существенно выше радиальной, в – радиальная “температура” существенно выше азимутальной при слабом влиянии вихревой силы, г – влияние азимутального охлаждения значительно, д – азимутальное охлаждение невелико при заметном влиянии вихревой силы. По вертикальной оси отложено расстояние R от центра притяжения, по горизонтальной оси – азимутальная компонента импульса P_φ .

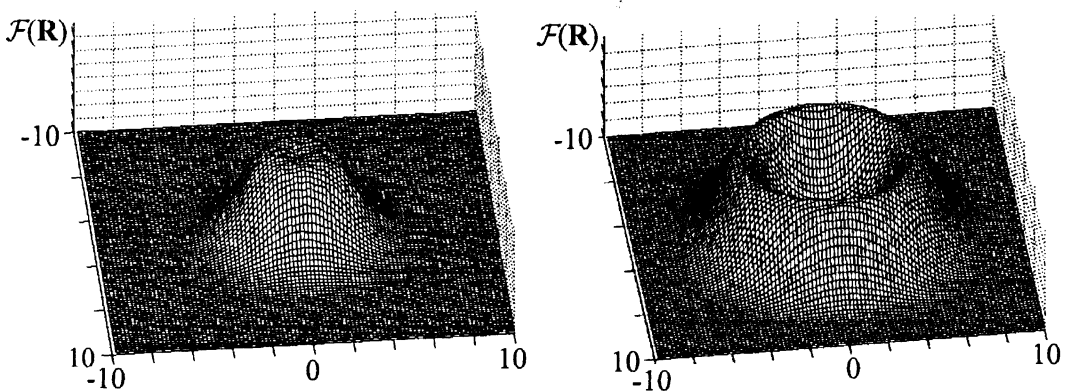


Рис. 2. Распределения атомарной плотности: слева – влияние азимутального охлаждения значительно, справа – азимутальное охлаждение невелико. По горизонтальным осям отложены координаты $\mathbf{R} = (x, y)$, по вертикали отложена атомарная плотность $\mathcal{F}(\mathbf{R})$.

5. 2D диссипативные атомарные решетки

Особенности стохастической динамики, представленные в эталонной модели, проявляются в полной мере в моделях со сложной пространственной структурой величин \mathbf{f}_0 , $\hat{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{D}}$, свойственной диссипативным атомарным решеткам. Покажем это на примере конфигурации светового поля, образованной тремя бегущими волнами с амплитудой \hat{E} каждая,

направленными под углом 120° друг к другу, где $\vartheta/2$ – угол между большой осью эллипса поляризации каждой волны и нормалью к плоскости, в которой лежат волновые векторы \mathbf{k}_i . При эллиптичности $\tilde{\varepsilon}$ каждой волны такой, что $\text{tg}^2 \tilde{\varepsilon} = (3 \cos \vartheta + 1)/(3 \cos \vartheta - 1)$, амплитуда суммарного поля $\sqrt{3} \tilde{E}$ постоянна, а поле (1) имеет изолированные точки с циркулярной поляризацией \mathbf{R}_c .

Рассмотрим пространственную структуру \mathbf{f}_0 , $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ для двух типов переходов при выборе параметров $\text{tg} \vartheta/2 = 8.7$ и $\tilde{\delta} = -10$ (переход $1/2 \rightarrow 3/2$, тип II), $\tilde{\delta} = 10$ (переход $1/2 \rightarrow 1/2$, тип I). В этих случаях минимумы потенциала и центры вихревой силы совпадают, как и в эталонной модели, и находятся в точках \mathbf{R}_c . Качественно тензор диссипации $\hat{\mathbf{X}}^s$ и тензор диффузии $\hat{\mathbf{D}}$ в окрестностях \mathbf{R}_c имеют сходство с (15).

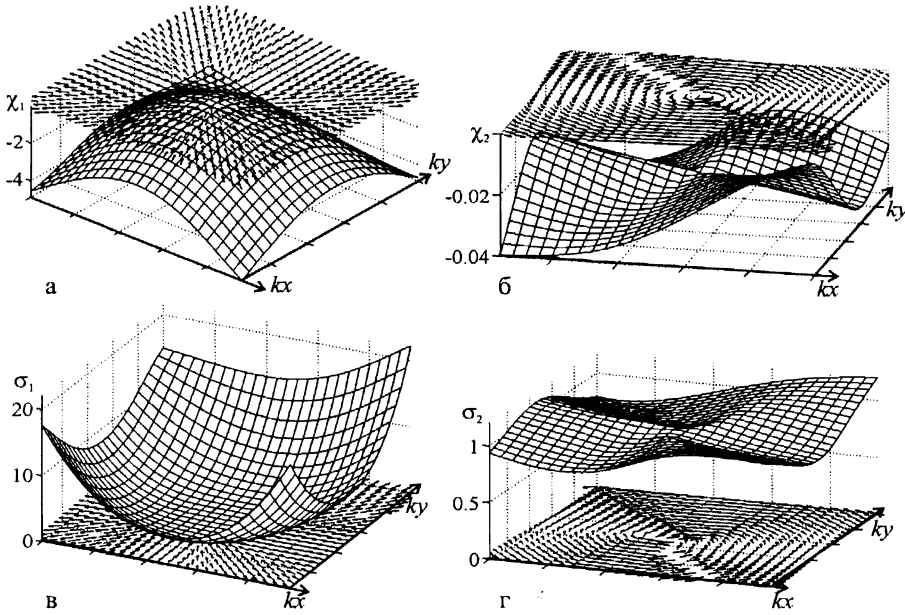


Рис. 3. Поля собственных значений χ_1 (а), χ_2 (б), σ_1 (в) и σ_2 (г) и собственных векторов (стрелки) в окрестности \mathbf{R}_c для перехода типа II. Окрестность соответствует выбору граничных значений по безразмерным координатным осям $-0.38 \leq kx \leq 0.65$ и $-2.87 \leq ky \leq -1.87$, где $k = |\mathbf{k}|$ – волновое число светового поля.

На рис. 3 показаны собственные значения (поверхности) и собственные векторы (стрелки) для $\hat{\mathbf{X}}^s$ (а, б) и $\hat{\mathbf{D}}$ (в, г) в окрестности одной из точек \mathbf{R}_c для типа II. Величины χ_1 (а) и σ_1 (в) соответствуют радиальному вкладу и имеют ранг изменения χ_1 от 0 до -7.3 , σ_1 от 0.3 до 62. Остальные вклады аналогичны азимутальным компонентам. Ранг изменения σ_2 от 0.3 до 10.7. Отметим ранг изменения χ_2 от -1.19 до 0.02, где последнее значение соответствует разогреву, имеющему место в очень малых по площади областях конфигурации.

Для типа I пространственная структура $\hat{\mathbf{X}}^s$ и $\hat{\mathbf{D}}$ аналогична типу II, за исключением распределения χ_2 (рис. 4). Здесь также ранг изменения χ_2 от -1.7 до 0.02. Однако принципиально то, что секторы разогрева имеют большую площадь и заходят в окрестности \mathbf{R}_c . Их распределение в ячейке симметрии приведено в правой части рис. 4 в виде заштрихованных областей. Кружками обозначены точки \mathbf{R}_c .

Расчет \mathbf{R} - и \mathbf{P} -распределений на примере данной конфигурации поля показал значительный разброс результатов моделирования в зависимости от метода интегрирования УЛ. На рис. 5 представлены образцы нормированных $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ (левый график) и $\mathcal{F}(\mathbf{P})$ (правый график), рассчитанных по схемам LF (а) и ЭА (б) при выборе параметров моделирования

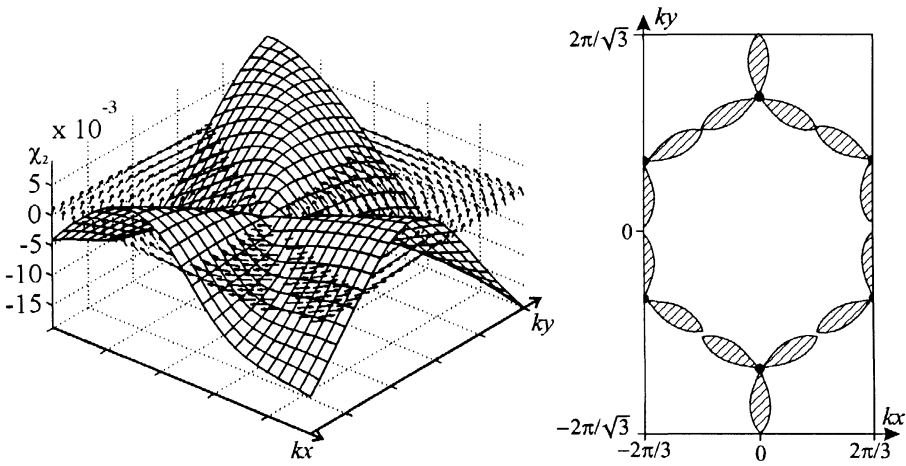


Рис. 4. Поле χ_2 (слева) в окрестности \mathbf{R}_c и области разогрева (справа) в ячейке симметрии (заштрихованы) для перехода типа I. Окрестность \mathbf{R}_c соответствует выбору граничных значений по безразмерным координатным осям $-0.38 \leq kx \leq 0.65$ и $-2.87 \leq ky \leq -1.87$.

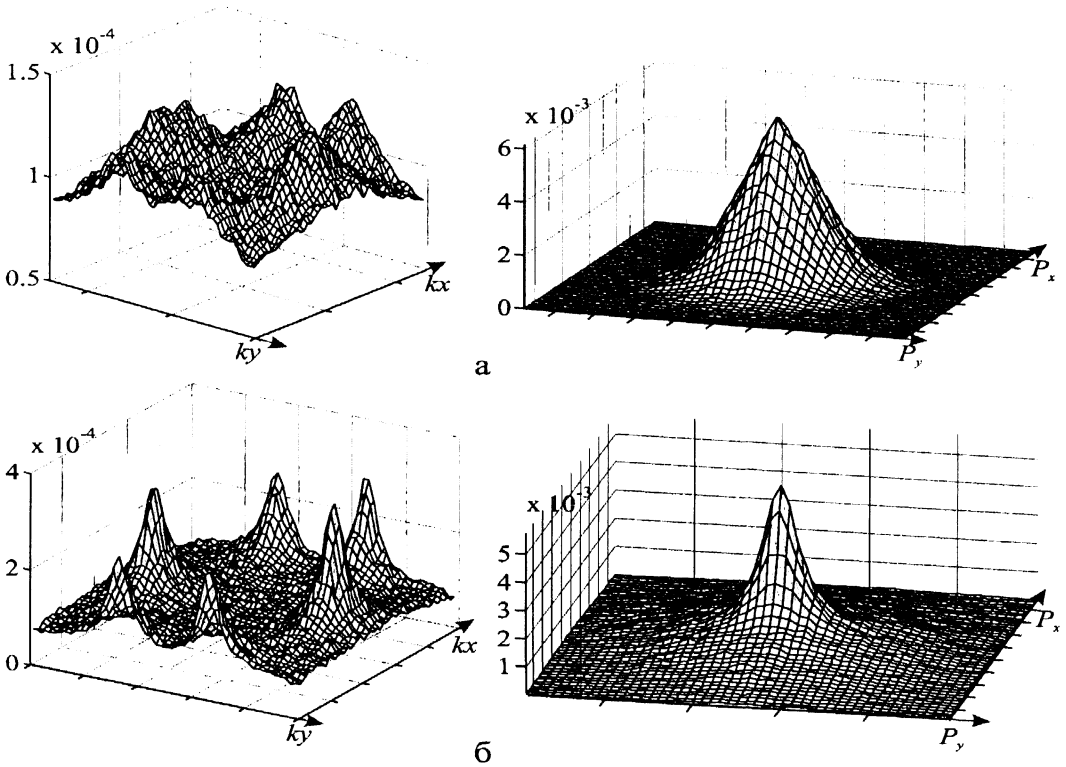


Рис. 5. Нормированные \mathbf{R} - (левый график) и \mathbf{P} -распределения (правый график), рассчитанные по схемам LF (а) и ЭА (б). \mathbf{R} -распределения приведены для пространственной ячейки симметрии: $-2\pi/3 \leq kx \leq 2\pi/3$ и $-2\pi/\sqrt{3} \leq ky \leq 2\pi/\sqrt{3}$. \mathbf{P} -распределения приведены для прямоугольной области по проекциям безразмерного импульса \mathbf{P} в границах $-10 \leq P_x \leq 10$ и $-10 \leq P_y \leq 10$.

$\epsilon = 0.01$, $\mu = 0.05$, $\tau_{\max} = 10^5$ (число шагов $N = \tau_{\max}/\epsilon = 10^7$) для перехода $1/2 \rightarrow 1/2$. Границы $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ соответствуют ячейке симметрии светового поля. Граничные значения импульса выбраны $|P_{x,\max}| = |P_{y,\max}| = 10$, где всплески на краях $\mathcal{F}(\mathbf{P})$ определяют доли атомов, вышедших за P_{\max} . Отметим, что размытая структура \mathbf{R} -распределения, аналогичная рис. 5а, также наблюдается при использовании схем RK1, RK2. Для алгоритмов RK1, RK2, LF результаты моделирования существенно зависели от выбора величины шага ϵ , который варьировался нами в пределах $0.005 \div 0.08$. В свою очередь, использование ЭА с расчетом детерминированного вклада согласно алгоритму Гира для жестких ОДУ приводит к структуре $\mathcal{F}(\mathbf{R})$, отражающей явление преимущественной локализации атомов в областях \mathbf{R}_c (рис. 5б). Аналогичные результаты получаются при использовании модифицированного алгоритма Эйлера с использованием пуассоновской статистики для случайной силы вместо гауссовской в соответствии с рецептами [7] и с расчетом детерминированного вклада по алгоритму Гира. В этих случаях распределения также зависели от величины ϵ , но в меньшей степени: с увеличением шага ϵ возрастала доля атомов, выходящих за P_{\max} .

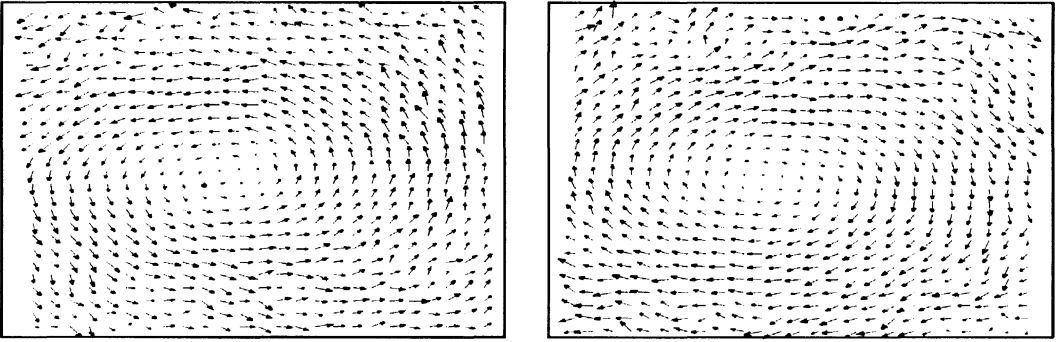


Рис. 6. Структура поля $\langle \mathbf{P} \rangle$ в окрестности \mathbf{R}_c для переходов типа I (слева) и типа II, где длина стрелок соответствует относительной величине модуля $|\langle \mathbf{P} \rangle|$. Окрестность \mathbf{R}_c выбрана соответственно граничным значениям по безразмерным координатным осям $-0.38 \leq kx \leq 0.65$ и $-3.19 \leq ky \leq -1.45$.

Моделировались также поля среднего импульса

$$\langle \mathbf{P} \rangle(\mathbf{R}) = \int d^2\mathbf{P} \mathbf{P} \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) / \mathcal{F}(\mathbf{R}), \quad (16)$$

и результаты показали наличие направленных вихревых потоков атомов с центрами в \mathbf{R}_c . На рис. 6 представлены данные для (16) в окрестности \mathbf{R}_c для типов I (левая часть) и II, где длины стрелок пропорциональны величинам $|\langle \mathbf{P} \rangle|$.

6. Заключение

Представленные результаты моделирования позволяют сделать вывод об эффективности ЭА и модифицированного алгоритма Эйлера применительно к расчету стационарных кинетических распределений атомарных ансамблей в световых полях. Остальные методы (RK1, RK2, LF) не дают удовлетворительных результатов. Пространственная структура детерминированных сил, действующих на атом в диссипативных решетках, весьма сложна, а сами силы не являются всюду гладкими и непрерывными функциями. Здесь алгоритм Рунге-Кутты, применяемый при пошаговом расчете вклада от этих сил в методах RK1, RK2, LF, приводил к критическим погрешностям. С учетом мультипликативности шума приобретаемые атомами скорости получались существенно выше действительных, что проявлялось в значительном уширении импульсных распределений, а также в хаотичной структуре получающихся с помощью RK1, RK2, LF координатных распределений. Уменьшение величины

шага ϵ не позволило преодолеть этот недостаток из-за влияния систематических погрешностей при вычислениях с малыми величинами³.

Приведенные алгоритмы были также использованы при анализе других 2D полевых конфигураций [10]. Следует отметить, что в принципе предложенный способ моделирования кинетических распределений атомарного ансамбля позволяет определить саму функцию распределения $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{P})$, поскольку алгоритмы пошагового интегрирования УЛ задают динамику атома именно в фазовом пространстве $\{\mathbf{R}, \mathbf{P}\}$. Однако здесь формирование качественной картины стационарного распределения $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ требует существенно большего числа точек и, соответственно, числа шагов моделирования. Аналогичная проблема имеет место при моделировании кинетических распределений в 3D полевых конфигурациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Opt. Soc. Am. B, 1989, v.6, № 11.
2. G. Grynberg, C. Robilliard. Cold atoms in dissipative optical lattices // Phys. Reports, 2001, v.355, p.335-451.
3. Y. Castin, K. Berg-Sørensen, J. Dalibard, K. Mølmer. Two-dimensional Sisyphus cooling // Phys. Rev., A, 1994, v.50, № 6, p.5092-5115.
4. J. Dalibard, Y. Castin, K. Mølmer. Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics // Phys. Rev. Lett., 1992, v.68, № 5, p.580-583.
5. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models // J. Opt. Soc. Am. B, 1989, v.6, № 11, p.2023-2045.
6. J. Javanainen. Density-matrix equations and photon recoil for multistate atoms // Phys. Rev. A, 1991, v.44, № 9, p.5857-5880.
7. J. Javanainen. Numerical experiments in semiclassical laser-cooling theory of multistate atoms // Phys. Rev. A, 1992, v.46, № 9, p.5819-5835.
8. K.I. Petsas, G. Grynberg and J.-Y. Courtois. Semiclassical Monte Carlo approaches for realistic atoms in optical lattices // Eur. Phys. J. D, 1999, v.6, p.29-47.
9. А.В. Безвербный, О.Н. Прудников, А.В. Тайченачев и др. Сила светового давления, коэффициенты трения и диффузии для атомов в резонансном неоднородно поляризованном поле // Журн. эксп. и теор. физ., 2003, т.123, № 3, с.437-456.
10. А.В. Безвербный. Влияние структуры полевых инвариантов на кинетику формирования двумерных диссипативных атомарных решеток // Изв. вузов. Физика, 2003, № 5, с.7-14.
11. А.В. Безвербный. Пространственная структура инвариантов в конфигурациях монохроматического поля размерности $D>1$ // Журн. эксп. и теор. физ., 2003, т.124, № 11, с.981-995.
12. C. Savage. Introduction to light forces, atom cooling, and atom trapping // atom-ph/9510004, 1995, p.1-15.
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. – М.: Наука, 1988, 512с.
14. И.А. Квасников, Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1987, 559с.
15. J. Qiang and S. Habib. A second-order stochastic leap-frog algorithm for Langevin simulation // physics/0008196v1, 2000, p.1-3.
16. H.A. Forbert and S.A. Chin. Fourth order algorithms for solving the multivariable Langevin equation and the Kramers equation // niucl-th/0006087v1, 2000, p.1-19.
17. H.Nakajima and S.Furu. A new algorithm for numerical simulation of Langevin equations // hep-lat/9610017v1, 1996, p.1-4.
18. Г.Н. Мильштейн. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. – Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988, 224с.
19. R.F. Fox, I.R. Gatland, R. Roy, and G. Vemuri. Fast, accurate algorithm for numerical simulation of exponentially correlated colored noise // Phys. Rev. A, 1988, v.38, p.5938-5940.
20. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. – М.: Наука, 1966, 576с.

Поступила в редакцию 24.06.2003.

³критичность значений $\epsilon \sim 0.01$ проявлялась и при использовании ЭА и модифицированного метода Эйлера, когда при значениях $\epsilon \sim 0.001$ и меньше структура распределений становилась также хаотичной.