



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, М. В. Шевцова, О распределении простых чисел в арифметической прогрессии, разность которой является степенью фиксированного простого числа, *Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 1, 60–78

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

14 января 2025 г., 14:02:51



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

УДК 511.35

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ, РАЗНОСТЬ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ СТЕПЕНЬЮ ФИКСИРОВАННОГО ПРОСТОГО ЧИСЛА

С.А. Гриценко, М.В. Шевцова (г. Белгород)

e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация

Получена асимптотическая формула для числа простых чисел, не превосходящих X и лежащих в арифметической прогрессии с разностью $D = p_0^m$, где $p_0 \geq 3$ — фиксированное простое число и $D \leq X^{\frac{3}{8}} e^{-(\ln \ln X)^2}$.

*Посвящается светлой памяти
Сергея Михайловича Воронина*

1 Введение

В теории чисел важную роль играет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть при $(l, D) = 1$ $\pi(X, D, l)$ означает число простых чисел, не превосходящих X и сравнимых с l по модулю D . Из расширенной гипотезы Римана следует, что:

$$\pi(X, D, l) = \frac{\text{Li } X}{\varphi(D)} (1 + O(\ln^{-M} X)),$$

где $D \leq X^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $M > 0$ — константа.

Известная к настоящему времени граница изменения D гораздо меньше. Например, при $D \leq \ln^A X$, где $A > 0$ — константа, $c = c(A) > 0$, справедлива формула:

$$\pi(X, D, l) = \frac{\text{Li } X}{\varphi(D)} + O\left(Xe^{-c\sqrt{\ln X}}\right),$$

которая известна в литературе как формула Зигеля-Вальфиша [1].

Но для разности $D = p_0^m$, $p_0 \geq 3$ — фиксированное простое число, можно улучшить этот результат. В 1955 году А. Г. Постников обнаружил [2], что сумма значений неглавного характера по модулю D , равному степени нечетного простого числа, представляет собой сумму Вейля специального вида. Это открытие замечательно тем, что суммы Вейля, даже очень короткие (а вместе с ними и очень короткие суммы значений характера), допускают нетривиальные оценки.

Идея А. Г. Постникова позволила решить некоторые проблемы теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов.

В 1964 году Ю. В. Линник, М. Б. Барбан и Н. Г. Чудаков [3] доказали следующий асимптотический закон, справедливый при $D = p_0^m \leq X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $M > 0$ — произвольно большое число):

$$\pi(X, D, l) = \frac{\text{Li } X}{\varphi(D)} (1 + O(\ln^{-M} X)).$$

Доказательство этой теоремы основано на плотностной технике, и поэтому для него требуется информация о распределении нулей L -функции Дирихле в критической полосе.

В 1979 году М. М. Петечук [4] применил идею А. Г. Постникова к проблеме делителей Дирихле в коротких арифметических прогрессиях и получил асимптотическую формулу:

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \tau_k(n) = \frac{X Q_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X^{1-\varkappa}}{\varphi(D)}\right),$$

где $D = p_0^m \leq X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$, $(l, D) = 1$, $Q_{k-1}(\ln X)$ — многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от k и p_0 , $\varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{16}, \frac{\beta}{k^3}\right\}$, $\beta > 0$ — константа, зависящая от p_0 .

Доказательство этой формулы основано на идее работы А.А.Карацубы [5], позволяющей оценивать ее остаточный член по схеме решения тернарной аддитивной задачи. Доказательство Петечука «элементарно», то есть не использует средств комплексного анализа.

В настоящей статье предлагается новый способ вывода асимптотической формулы для $\pi(X, D, l)$ при $D = p_0^m$. По сравнению с теоремой М. Б. Барбана, Ю. В. Линника и Н. Г. Чудакова получено незначительное уточнение остаточного члена и верхней границы изменения D .

Наше доказательство существенно отличается тем, что не использует информации о распределении нулей L -функции Дирихле в критической полосе, а использует лишь теорему о границе нулей, принадлежащую В. Н. Чубарикову [6], доказательство которой элементарно.

В основном мы придерживаемся схемы доказательства теоремы Петечука, однако в некоторых местах приходится вносить в эту схему изменения, поскольку нам необходимо оценивать не только суммы значений характера, но и суммы значений характера по простым числам.

Сформулируем наш основной результат.

ТЕОРЕМА 1. При $(l, D) = 1$, $D = p_0^m \leq X^{\frac{3}{8}} e^{-(\ln \ln X)^2}$ справедлива формула

$$\pi(X, D, l) = \frac{\text{Li } X}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X}{\varphi(D)} e^{-\varkappa(\ln \ln X)^2}\right), \quad (1)$$

где $\varkappa = \frac{b_6}{6}$, b_6 — константа леммы 9.

Нам потребуется несколько лемм.

2 Леммы

ЛЕММА 1. (тождество Хис-Брауна) Пусть $K \geq 1$, $z \geq 1$. Тогда для любого $n < 2z^K$ имеем

$$\Lambda(n) = - \sum_{1 \leq k \leq K} (-1)^k \binom{K}{k} \sum_{\substack{m_1 \dots m_k n_1 \dots n_k = n \\ m_1, \dots, m_k \leq z}} \dots \sum \mu(m_1) \dots \mu(m_k) \ln n_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. в [7, с. 344].

ЛЕММА 2. (Виноградова-По́я) Пусть χ — примитивный характер по модулю D . Тогда справедлива оценка:

$$\left| \sum_{1 \leq \nu \leq a} \chi(\nu) \right| \ll \sqrt{D} \ln D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. в [8, с. 123].

ЛЕММА 3. Для любого неглавного характера χ по модулю $D = p_0^m$ справедлива оценка:

$$\left| \sum_{1 \leq \nu \leq a} \chi(\nu) \right| \ll a^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{6}} \ln D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. в [9, с. 161].

ЛЕММА 4. Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$. Тогда выполняется оценка

$$\left| \sum_{\nu \leq a} \chi(\nu) \right| \ll a^{1 - \frac{\gamma}{\rho^2}},$$

где $\rho = \frac{\ln D}{\ln a}$, $1 \leq \rho \leq 0,5m$, $0 < \gamma < 1$ — константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. в [8, с. 222].

Следующая лемма представляет собой вариант теоремы В. Н. Чубарикова [6] о границе нулей L -функции Дирихле в критической полосе.

ЛЕММА 5. Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$. Тогда $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$\sigma > 1 - \frac{b_1}{(\ln D)^{2/3} (\ln \ln D)^2}, \quad |t| < e^{b_2 (\ln \ln D)^2},$$

b_1, b_2 — положительные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что в области $\sigma \geq 1 - \frac{\gamma_1}{(\ln D)^{2/3}}$, $\gamma_1 = \gamma/2$, где γ — константа из леммы 4, имеет место оценка

$$L(s, \chi) = O((|t| + 1)(\ln D)^{2/3}).$$

Справедливо тождество

$$L(s, \chi) = s \int_1^\infty S(x)x^{-s-1} dx, \quad S(x) = \sum_{\nu \leq x} \chi(\nu).$$

Разобьем интеграл на части:

$$L(s, \chi) = s \int_1^D S(x)x^{-s-1} dx + s \int_D^\infty S(x)x^{-s-1} dx. \quad (2)$$

Во втором интеграле для оценки суммы $S(x)$ будем пользоваться оценкой Виноградова-Пойа: $S(x) = O(\sqrt{D} \ln D)$. Имеем:

$$\left| s \int_D^\infty S(x)x^{-s-1} dx \right| \leq (|t| + 1) \int_D^\infty |S(x)|x^{-\sigma-1} dx \ll (|t| + 1)\sqrt{D} \ln D D^{-\sigma}.$$

Поскольку $\sigma > \frac{1}{2}$, то

$$L(s, \chi) = s \int_1^D S(x)x^{-s-1} dx + O\left((|t| + 1) \frac{\ln D}{D^\epsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Рассмотрим первый интеграл в (2). Разобьем его на части, полагая $N = \exp(\ln D)^{2/3}$:

$$\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx = \int_1^N S(x)x^{-s-1}dx + \int_N^D S(x)x^{-s-1}dx.$$

В первом интеграле справа сумму $S(x)$ оценим тривиально, а во втором — согласно лемме 4. Получим:

$$\begin{aligned} \left| \int_1^N x^{-s} dx \right| &\leq \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \Big|_1^N = O((\ln D)^{2/3}), \\ \left| \int_N^D S(x)x^{-s-1} dx \right| &\leq \int_N^D |S(x)|x^{-1-\sigma} dx = O\left(\int_N^D x^\sigma \exp\left\{-\frac{\gamma \ln^3 x}{\ln^2 D}\right\} dx \right) = \\ &= [v = \ln x] = \\ &= O\left(\int_{\ln N}^{\ln D} \exp\left\{v(1-\sigma) - \frac{\gamma v^3}{\ln^2 D}\right\} dv \right) = O\left(\int_{\ln N}^{\ln D} \exp\left\{-\frac{\gamma v^3}{2\ln^2 D}\right\} dv \right) = \\ &= O((\ln D)^{2/3}). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что в области $\sigma \geq 1 - \frac{\gamma_1}{(\ln D)^{2/3}}$

$$L(s, \chi) = O((|t| + 1)(\ln D)^{2/3}).$$

Теперь пусть $\rho = \sigma + it$ — нуль функции $L(s, \chi)$, положим

$$\sigma = 1 - \frac{d}{(\ln D)^{2/3}(\ln \ln D)^2}, \quad d \leq 1.$$

Надо показать, что $d \geq c_0 > 0$. Рассмотрим точку

$$s_0 = 1 + \frac{4d}{(\ln D)^{2/3}(\ln \ln D)^2} + it = \sigma_0 + it.$$

Из точки s_0 опишем круг радиуса $r = \frac{c_1}{(\ln D)^{2/3}}$. Точка ρ будет лежать внутри круга радиуса $r/2$, так как

$$\frac{c_1}{2(\ln D)^{2/3}} > \frac{5d}{(\ln D)^{2/3}(\ln \ln D)^2}.$$

В круге $|s - s_0| < r$

$$L(s, \chi) = O((|t| + 1)(\ln D)^{2/3}).$$

Кроме того,

$$\left| \frac{1}{L(s_0, \chi)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma_0}} = 1 + \frac{(\ln D)^{2/3} (\ln \ln D)^2}{4d}.$$

Поэтому

$$\left| \frac{L(s, \chi)}{L(s_0, \chi)} \right| \leq M = (|t| + 1) \frac{\ln^2 D}{d}.$$

Точно такая же оценка имеет место в круге $|s - s_1| \leq r$, $s_1 = \sigma_0 + 2it$. Применим лемму 6 [8, с. 99].

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{L'(s_0)}{L(s_0)} &\geq -\frac{4}{r} \ln M + \operatorname{Re} \frac{1}{s_0 - \rho} = -\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1} \ln M + \frac{(\ln D)^{2/3} (\ln \ln D)^2}{5d}, \\ \operatorname{Re} \frac{L'(s_1)}{L(s_1)} &\geq -\frac{4}{r} \ln M = -\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1} \ln M, \\ -\frac{L'(\sigma_0)}{L(\sigma_0)} &< \frac{1}{\sigma_0 - 1} + c_2. \end{aligned}$$

Справедливо неравенство:

$$3 \left\{ -\frac{L'(\sigma_0, \chi)}{L(\sigma_0, \chi)} \right\} + 4 \left\{ -\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma_0 + it)}{L(\sigma_0 + it)} \right\} + \left\{ -\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma_0 + 2it)}{L(\sigma_0 + 2it)} \right\} \geq 0.$$

Подставляя полученные оценки в это неравенство, получим:

$$\begin{aligned} &3 \left\{ \frac{(\ln D)^{2/3} (\ln \ln D)^2}{4d} + c_2 \right\} + 4 \left\{ \frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1} \ln M - \frac{(\ln D)^{2/3} (\ln \ln D)^2}{5d} \right\} + \\ &\quad + \frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1} \ln M \geq 0, \\ &-\frac{(\ln \ln D)^2}{20d} + \frac{3c_2}{(\ln D)^{2/3}} + \frac{20}{c_1} (\ln \ln D)^2 + \frac{40}{c_1} \ln \ln D - \frac{20}{c_1} \ln d \geq 0, \\ &-\frac{1}{d} \left(\frac{(\ln \ln D)^2}{20} - \frac{20d \ln d}{c_1} \right) + \frac{20}{c_1} \left(\frac{3c_2 c_1}{20(\ln D)^{2/3}} + (\ln \ln D)^2 + 2 \ln \ln D \right) \geq 0. \end{aligned}$$

При $d \rightarrow 0$ имеем: $d \ln d \rightarrow 0$, $\frac{1}{d} \rightarrow \infty$, поэтому

$$-\frac{1}{d} \frac{(\ln \ln D)^2}{20} + \frac{20}{c_1} (\ln \ln D)^2 \geq 0, \quad d \geq \frac{c_1}{40}.$$

Тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$. Тогда в области

$$\sigma > 1 - \frac{b_1}{2(\ln D)^{2/3}(\ln \ln D)^2}, \quad |t| < e^{b_2(\ln \ln D)^2},$$

где b_1, b_2 — положительные константы, справедлива оценка

$$\left| \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right| \ll (\ln D)^{5/3} (\ln \ln D)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу разложения логарифмической производной по нулям и границу нулей для функции $L(s, \chi)$ леммы 5. Пусть $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ — нули $L(s, \chi)$ и

$$\beta_n \leq 1 - \frac{b_1}{(\ln D)^{2/3}(\ln \ln D)^2}, \quad \sigma \geq 1 - \frac{b_1}{2(\ln D)^{2/3}(\ln \ln D)^2}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{L'}{L}(s, \chi) &= \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{s - \rho_n} + O(\ln D |t|), \\ \left| \frac{L'}{L}(s, \chi) \right| &\ll \frac{2}{b_1} (\ln D)^{2/3} (\ln \ln D)^2 \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1} 1 + O(\ln D |t|) = O((\ln D)^{5/3} (\ln \ln D)^2). \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$, $a \gg D^\eta$, $\eta > 0$ — константа, p — простое число. Тогда справедлива оценка:

$$\left| \sum_{a < p \leq 2a} \chi(p) \right| \ll a e^{-b_5 (\ln \ln D)^2},$$

где $0 < b_5 < 1$ — константа.

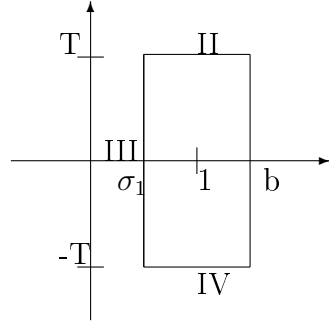
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно оценить сумму

$$\sum_{a < n \leq 2a} \chi(n) \Lambda(n).$$

Применим для этой суммы формулу Перрона [10, с. 427]. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq 2a} \chi(n) \Lambda(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \right) \frac{(2^s - 1)a^s}{s} ds + \\ &+ O\left(\frac{a^b}{T(b-1)} + \frac{a \ln^2 a}{T} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть Γ — контур, являющийся прямоугольником с вершинами $\sigma_1 + iT$, $b + iT$, $b - iT$, $\sigma_1 - iT$, где $b = 1 + \frac{1}{\ln a}$, $\sigma_1 = 1 - \frac{b_3}{(\ln D)^{2/3}(\ln \ln D)^2}$, $T = e^{b_4(\ln \ln D)^2}$.



Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \right) \frac{a^s}{s} ds = 0.$$

Оценим интегралы по сторонам II и IV соответствующего контура:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + iT} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \right) \frac{a^s}{s} ds \right| \leq \int_{\sigma_1}^b (\ln D)^{5/3} (\ln \ln D)^2 \frac{a^\sigma}{T} d\sigma \ll a e^{-b_5(\ln \ln D)^2}.$$

По стороне III интеграл оценим следующим образом:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + iT} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \right) \frac{a^s}{s} ds \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^T \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \right) \frac{a^{\sigma+it}}{t} dt \right| =$$

$$\ll a^{\sigma_1} \ln T (\ln D)^{5/3} (\ln \ln D)^2 \ll a e^{-(\ln D)^{1/4}}.$$

Таким образом интеграл в формуле (3) не превосходит $a e^{-b_5(\ln \ln D)^2}$, откуда и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 8. (А. И. Виноградова) Количество чисел, не превосходящих x , все простые делители которых не превосходят $z_0 \leq \sqrt{x}$, имеет оценку

$$Bx \exp \left(-\frac{1}{\alpha} \left(\ln \frac{1}{\alpha} + \ln \ln \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} + \frac{\theta}{\alpha \ln 1/\alpha} \right),$$

где $\alpha = \ln z_0 / \ln x$, $|\theta| \leq 1$, B — положительная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. в [11].

ЛЕММА 9. Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $D = r_0^m$, $a \gg D^\eta$, $\eta > 0$ — константа. Справедлива оценка:

$$\sum_{n \leq a} \mu(n) \chi(n) \ll a e^{-b_6 (\ln \ln D)^2},$$

где $0 < b_6 < \frac{1}{10}$ — константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\sum_{n \leq a} \mu(n) \chi(n) = 1 + \sum_{r=1}^{R_0} (-1)^r \sum_{\delta_r \leq a} \chi(\delta_r),$$

где δ_r — бесквадратное число, имеющее ровно r простых делителей, $R_0 \leq [\log_2 a]$.

Пусть $1 \leq r \leq R_0$. Обозначим $S_r = \sum_{\delta_r \leq a} \chi(\delta_r)$.

Если $r = 1$, то S_r — сумма по простым числам, ее оценка получена в лемме 7.

Пусть $r > 1$. Разобьем числа δ_r на $r+1$ непересекающихся классов A_0, A_1, \dots, A_r следующим образом: при $0 \leq j \leq r$ $\delta_r \in A_j$, если среди простых делителей δ_r ровно j простых делителей, больших $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, и ровно $r-j$ простых делителей, не превосходящих $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, где $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{100}$.

Рассмотрим сначала числа δ_r из класса A_0 . Все простые делители этих чисел не превосходят $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Поэтому

$$\left| \sum_{\substack{\delta_r \leq a \\ \delta_r \in A_0}} \chi(\delta_r) \right| \leq \sum'_{n \leq a} 1,$$

где штрих означает, что все простые делители n не превосходят $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Оценим эту сумму по лемме А. И. Виноградова (лемма 8), получим:

$$\sum'_{n \leq a} 1 \ll a \exp(-(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}),$$

следовательно,

$$\left| \sum_{\substack{\delta_r \leq a \\ \delta_r \in A_0}} \chi(\delta_r) \right| \ll a \exp(-(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}).$$

Рассмотрим числа δ_r , принадлежащие остальным классам A_j , $1 \leq j \leq r$. Любое такое число можно однозначно представить в виде

$$\delta_r = \delta'_{r-j} \delta''_j,$$

где δ'_{r-j} — бесквадратное число, имеющее $r - j$ простых делителей, каждый из которых не превосходит $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, а δ''_j — бесквадратное число, имеющее j простых делителей, каждый из которых больше $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\delta_r \leq a \\ \delta_r \in A_j}} \chi(\delta_r) &= \sum_{\delta'_{r-j} \delta''_j \leq a} \chi(\delta'_{r-j} \delta''_j) = \\ &= \sum_{\substack{\delta'_{r-j} \delta''_j \leq a \\ \delta'_{r-j} \leq a^{0,1}}} \chi(\delta'_{r-j} \delta''_j) + \sum_{\substack{\delta'_{r-j} \delta''_j \leq a \\ \delta'_{r-j} > a^{0,1}}} \chi(\delta'_{r-j} \delta''_j) = \\ &= S'_r + S''_r. \end{aligned}$$

Оценим сумму S''_r . Так как $\delta'_{r-j} \delta''_j \leq a$, $\delta'_{r-j} > a^{0,1}$, то число δ''_j удовлетворяет неравенству $\delta''_j \leq a^{0,9}$, поэтому

$$|S''_r| \leq \sum_{\delta''_j \leq a^{0,9}} \sum_{\delta'_{r-j} < z_1} 1,$$

где $z_1 = \frac{a}{\delta''_j}$, $z_1 > a^{0,1}$.

В силу леммы А. И. Виноградова,

$$\sum_{\delta'_{r-j} < z_1} 1 \ll \frac{a}{\delta''_j} \exp(-0,1(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}),$$

следовательно,

$$|S''_r| \ll a \exp(-0,05(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}).$$

Оценим теперь сумму S'_r . Имеем:

$$|S'_r| \leq \sum_{\delta'_{r-j} \leq a^{0,1}} \left| \sum_{\delta''_j \leq z_2} \chi(\delta''_j) \right|,$$

где $z_2 = \frac{a}{\delta'_{r-j}}$, $z_2 > a^{0,9}$.

Сравним внутреннюю сумму с суммой

$$\sum_{\substack{\delta''_{j-1} p \leq z_2 \\ p > e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \chi(\delta''_{j-1}) \chi(p),$$

где δ''_{j-1} пробегает множество бесквадратных чисел, имеющих ровно $j - 1$ простых делителей, каждый из которых больше $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$.

Числа $\delta''_{j-1}p$ могут не быть бесквадратными; если число $\delta''_{j-1}p$ не бесквадратное, то оно делится на p^2 . Вклад таких чисел в сумму не превосходит

$$\sum_{p > e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \frac{z_2}{p^2} \ll z_2 e^{-(\ln D)^{2/3-\varepsilon_1}}.$$

Если же числа $\delta''_{j-1}p$ бесквадратные, то каждое заданное число $\delta''_j \leq z_2$ встречается среди чисел $\delta''_{j-1}p$ ровно j раз, поэтому

$$\sum_{\delta''_j \leq z_2} \chi(\delta''_j) = \frac{1}{j} \sum_{\delta''_{j-1}p \leq z_2} \chi(\delta''_{j-1}p) + O\left(z_2 e^{-(\ln D)^{2/3-\varepsilon_1}}\right),$$

где

$$\left| \sum_{\delta''_j \leq z_2} \chi(\delta''_j) \right| \leq \sum_{\delta''_{j-1} \leq z_2 e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \left| \sum_{e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}} < p \leq \frac{z_2}{\delta''_{j-1}}} \chi(p) \right|.$$

Таким образом, для оценки суммы $\sum_{n \leq a} \mu(n)\chi(n)$ требуется оценить сумму по простым числам $\sum_{p \leq z_3} \chi(p)$, где $z_3 > e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Применим лемму 7, получим:

$$\sum_{p \leq z_3} \chi(p) = O\left(z_3 e^{-\frac{1}{2}b_5(\ln \ln D)^2}\right).$$

Объединяя оценки всех рассмотренных случаев, имеем:

$$\sum_{n \leq a} \mu(n)\chi(n) \ll a e^{-b_6(\ln \ln D)^2}.$$

Тем самым лемма доказана.

3 Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сумму

$$\psi(X, D, l) = \sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \Lambda(n).$$

Из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \bar{\chi}(l) \sum_{n \leq X} \Lambda(n)\chi(n).$$

Выделим слагаемое с χ_0 :

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,D)=1}} \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \chi(n).$$

Первая сумма справа даст нам главный член формулы, а вторая — остаток R . Ко второй сумме применим тождество Хис-Брауна (лемма 1):

$$R = - \sum_{1 \leq k \leq K} (-1)^k \binom{K}{k} \frac{1}{\varphi(D)^k} \times \\ \times \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{n_1 \dots n_k n_{k+1} \dots n_{2k} \leq X} \dots \sum c_1(n_1) \dots c_{2k}(n_{2k}) \chi(n_1 \dots n_{2k}),$$

где $c_j(n_j)$ — либо 1, либо $\ln n_j$, либо $\mu(n_j)$, $j = 1, \dots, 2k$. Если $c_j = \mu(n_j)$, то $n_j \leq X^{1/K}$.

Пусть $K = 100$. Зафиксируем k и разобьем соответствующую сумму R_k на $O(\ln^{2k} X)$ слагаемых вида

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{\substack{N_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ n_1 \dots n_{2k} \leq X}} \dots \sum_{N_{2k} < n_{2k} \leq 2N_{2k}} c_1(n_1) \dots c_{2k}(n_{2k}) \chi(n_1 \dots n_{2k}).$$

Без ограничения общности, будем считать, что $N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_{2k}$.

Рассмотрим случай: $D > X^{1-\varepsilon} N_1^{-1}$, ε — произвольно малое число. Тогда $N_2 \dots N_{2k} \leq DX^\varepsilon$. Кроме того, $N_1 > \frac{X}{D} X^{-\varepsilon}$, следовательно, $c_1(n_1)$ равно либо 1, либо $\ln n_1$. Оценим $\sum_{\substack{N_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ n_1 \leq X(n_2 \dots n_{2k})^{-1}}} c_1(n_1) \chi(n_1)$ согласно лемме 2. Тогда:

$$S \ll \sqrt{D} N_2 \dots N_{2k} \ln^2 D \ll D^{3/2} X^{2\varepsilon} \leq \frac{X^{1-\varepsilon}}{D}$$

при $D \leq X^{\frac{2}{5} - \frac{6}{5}\varepsilon}$. Следовательно, для этого случая утверждение теоремы выполняется.

В дальнейшем будем считать, что $D \leq X^{1-\varepsilon} N_1^{-1}$.

Пусть

$$\tau'_{2k-1}(y) = \sum_{N_2 < n_2 \leq 2N_2} \dots \sum_{\substack{N_{2k} < n_{2k} \leq 2N_{2k} \\ n_2 \dots n_{2k} = y}} c_2(n_2) \dots c_{2k}(n_{2k}).$$

Разобьем промежутки суммирования $(N_1, 2N_1]$ на промежутки $(H, H + H']$, где $H' = \frac{N_1}{e^{\delta(\ln \ln X)^2}}$, $0 < \delta < 1$ — действительное число. Получим:

$$S \ll \sum_H^{\exp\{\delta(\ln \ln X)^2\}} \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \sum_{\substack{X(H+H')^{-1} < y \leq XH^{-1} \\ y \leq Xn_1^{-1}}} \chi(y) \tau'_{2k-1}(y) \right|.$$

Заменяем условие $y \leq Xn_1^{-1}$ на условие $y \leq XH^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_1 :

$$R_1 \leq \sum_H^{\exp\{\delta(\ln \ln X)^2\}} \left(\sum_{H < n_1 \leq H+H'} \sum_{\substack{X(H+H')^{-1} < y \leq XH^{-1} \\ y \equiv ln_1^{-1} \pmod{D}}} \tau'_{2k-1}(y) + \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \sum_{X(H+H')^{-1} < y \leq XH^{-1}} \tau'_{2k-1}(y) \right).$$

Для оценки внутренней суммы первого слагаемого в скобках применим лемму 1.1.5 [1, с. 30], а для оценки внутренней суммы второго слагаемого — ту же лемму, положив в ней $D = 1$:

$$R_1 \ll \frac{X}{D} \left(\frac{H'^2}{H^2} \right) \left(\frac{N_1}{H'} \right) \ll \frac{X}{D} e^{-\delta(\ln \ln X)^2}.$$

Получим:

$$S \ll e^{\delta(\ln \ln X)^2} \max_{\chi \neq \chi_0} \{|S_1|\} + O \left(\frac{X}{D} \exp\{-\delta(\ln \ln X)^2\} \right), \quad (4)$$

где

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \times \\ \times \sum_{\substack{N_2 < n_2 \leq 2N_2 \\ n_2 \dots n_{2k} \leq XH^{-1}}} c_2(n_2) \dots \sum_{N_{2k} < n_{2k} \leq 2N_{2k}} c_{2k}(n_{2k}) \chi(n_2 \dots n_{2k}).$$

Введем обозначения:

$$U = N_2 N_4 \dots N_{2k}, \quad V = N_3 N_5 \dots N_{2k-1},$$

$$\tau'_k(u) = \sum_{N_2 < n_2 \leq 2N_2} \sum_{\substack{N_4 < n_4 \leq 2N_4 \\ n_2 n_4 \cdots n_{2k} = u}} \cdots \sum_{N_{2k} < n_{2k} \leq 2N_{2k}} c_2(n_2) c_4(n_4) \cdots c_{2k}(n_{2k}),$$

$$\tau'_{k-1}(v) = \sum_{N_3 < n_3 \leq 2N_3} \sum_{\substack{N_5 < n_5 \leq 2N_5 \\ n_3 n_5 \cdots n_{2k-1} = v}} \cdots \sum_{N_{2k-1} < n_{2k-1} \leq 2N_{2k-1}} c_3(n_3) c_5(n_5) \cdots c_{2k-1}(n_{2k-1}).$$

Заметим, что $V \leq U \leq N_1 V$.

Тогда

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \sum_{\substack{V < v \leq 2^{k-1}V \\ uv \leq XH^{-1}}} \tau'_{k-1}(v) \chi(v) \sum_{U < u \leq 2^k U} \tau'_k(u) \chi(u).$$

Рассмотрим случай $V \leq X^\varepsilon$. Если $N_1 \leq X^{\frac{1}{200}}$, то $U \leq V N_1 \leq X^{\frac{1}{200} + \varepsilon}$, следовательно, $S_1 \ll X^{\frac{1}{100} + 2\varepsilon}$ и, очевидно, утверждение теоремы выполняется.

Если же $N_1 > X^{\frac{1}{200}}$, то $c_1(n_1) = 1$, или $c_1(n_1) = \ln n_1$, поэтому:

$$S_1 \ll \sqrt{D} \ln D \sum_{V < v \leq 2^{k-1}V} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{U < u \leq U_v} \tau'_k(u) \chi(u) \right|,$$

где $U_v = \min \left\{ 2^k U, \frac{X}{Hv} \right\}$.

Применив неравенство Коши, получим:

$$\sigma = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{U < u \leq U_v} \tau'_k(u) \chi(u) \right| \leq (\sigma_1)^{1/2},$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{U < u \leq U_v} \tau'_k(u) \chi(u) \right|^2.$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сравнения

$$n_2 n_4 \cdots n_{2k} \equiv n'_2 n'_4 \cdots n'_{2k} \pmod{D}; \\ N_2 < n_2, n'_2 \leq 2N_2, \dots, N_{2k} < n_{2k}, n'_{2k} \leq 2N_{2k}.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U < u \leq U_v} \tau_k(u) \sum_{\substack{U-u < d \leq U_v-u \\ D}} \tau_k(u+dD) \ll \sum_{U < u \leq U_v} u^{\varepsilon/10} \sum_{\substack{U-u < d \leq U_v-u \\ D}} (u+dD)^{\varepsilon/10} \ll \\ \ll X^{\varepsilon/5} \sum_{U < u \leq U_v} \left(\frac{U}{D} + 1 \right) \ll X^{\varepsilon/5} \left(\frac{U^2}{D} + U \right).$$

Отсюда

$$\sigma \ll X^{\varepsilon/10} \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right).$$

Следовательно,

$$S_1 \ll X^{1,2\varepsilon} \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) \sqrt{D} \ln D.$$

Так как $U^2V \leq UVN_1 \leq X$, $V \leq X^\varepsilon$, то $U \ll \sqrt{X^{1+\varepsilon}}$, $\sqrt{UD} \ll X^{1/4}\sqrt{D}$, то $S_1 < \frac{X^{1-\varepsilon}}{D}$ при $D \leq X^{\frac{1}{2}-2,2\varepsilon}$. Учитывая (4) получаем, что $S < \frac{X^{1-\varepsilon}}{D}$ при $D \leq X^{\frac{1}{2}-4\varepsilon}$, и для этого случая утверждение теоремы выполняется.

Рассмотрим следующий случай: $V > X^\varepsilon$.

Пусть сначала $U \leq DX^\varepsilon$. Разобьем промежутки суммирования $(V, 2^{k-1}V]$ на промежутки $(W, W + W']$, где $W' = \frac{V}{X^{2\varepsilon}}$. Тогда:

$$S_1 \ll \left\langle \sum_W^{X^{2\varepsilon}} \left| \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \chi(v) \sum_{\substack{U < u \leq 2^k U \\ u \leq X(Hv)^{-1}}} \tau'_k(u) \chi(u) \right| \right\rangle.$$

Заменим условие $u \leq X(Hv)^{-1}$ на условие $u \leq X(HW)^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_2 :

$$\begin{aligned} R_2 &\leq \sum_W^{X^{2\varepsilon}} \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \sum_{\substack{X(H(W+W'))^{-1} < u \leq X(HW)^{-1} \\ u \equiv ln_1^{-1}v^{-1} \pmod{D}}} \tau'_k(u) + \\ &+ \sum_W^{X^{2\varepsilon}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \sum_{X(H(W+W'))^{-1} < u \leq X(HW)^{-1}} \tau'_k(u) \ll \\ &\ll \frac{X^{1+3\varepsilon}}{D} \left(\frac{H'}{H} \right) \left(\frac{W'}{W} \right)^2 \ll \frac{X^{1-\varepsilon}}{D} \left(\frac{H'}{H} \right). \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} S_1 &\ll X^{2\varepsilon} \max_{\chi \neq \chi_0} \{|S_2|\} + O \left(\frac{X^{1-\varepsilon}}{D} e^{-\delta(\ln \ln X)^2} \right), \\ S &\ll X^{3\varepsilon} \max_{\chi \neq \chi_0} \{|S_2|\} + O \left(\frac{X^{1-\varepsilon}}{D} \right), \end{aligned}$$

где

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \chi(v) \sum_{\substack{U < u \leq 2^k U \\ u \leq X(HW)^{-1}}} \tau'_k(u) \chi(u).$$

В этом случае $c_1(n_1) = 1$, либо $\ln n_1$, поэтому, применяя неравенство Коши, имеем:

$$S_2 \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \chi(n_1) \right| \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \chi(v) \right|^2 \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{U < u \leq 2^k U} \tau'_k(u) \chi(u) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$S_2 \ll X^{\varepsilon/5} \sqrt{D} \ln D \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) \left(\frac{V}{\sqrt{D}} + \sqrt{V} \right) \ll X^\varepsilon \sqrt{UV D} \ll X^{2\varepsilon} D^{3/2}.$$

Таким образом, $S < \frac{X^{1-\varepsilon}}{D}$ при $D \leq X^{\frac{2}{5}-3\varepsilon}$. Следовательно, утверждение теоремы выполняется.

Рассмотрим случай $U > DX^\varepsilon$.

Разобьем промежутки суммирования $(V, 2^{k-1}V]$ на промежутки $(W, W + W']$, где $W' = \frac{V}{e^{\delta(\ln \ln X)^2}}$. Получим:

$$S_1 \ll \sum_W^{\exp\{\delta(\ln \ln X)^2\}} \frac{1}{\varphi(D)} \times \\ \times \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \chi(v) \sum_{\substack{U < u \leq 2^k U \\ u \leq X(Hv)^{-1}}} \tau'_k(u) \chi(u) \right|.$$

Заменяем условие $u \leq X(Hv)^{-1}$ на условие $u \leq X(HW)^{-1}$ и оценим получившуюся

юся при этом ошибку R_2 :

$$R_2 \leq \sum_W^{\exp\{\delta(\ln \ln X)^2\}} \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \sum_{\substack{X(H(W+W'))^{-1} < u \leq X(HW)^{-1} \\ u \equiv \ln_1^{-1} v^{-1} \pmod{D}}} \tau'_k(u) + \\ + \sum_W^{\exp\{\delta(\ln \ln X)^2\}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \sum_{X(H(W+W'))^{-1} < u \leq X(HW)^{-1}} \tau'_k(u).$$

Применим лемму 1.1.5 [1, с. 30]:

$$R_2 \ll \frac{X}{D} \left(\frac{H'}{H} \right) \left(\frac{W'}{W} \right)^2 \ll \frac{X}{D} e^{-2\delta(\ln \ln X)^2}.$$

Получим:

$$S \ll e^{2\delta(\ln \ln X)^2} \max_{\chi \neq \chi_0} \{ |S_2| \} + O \left(\frac{X}{D} e^{-\delta(\ln \ln X)^2} \right), \quad (5)$$

где

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \times \\ \times \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \chi(v) \sum_{\substack{U < u \leq 2^k U \\ u \leq X(HW)^{-1}}} \tau'_k(u) \chi(u).$$

Применяя неравенство Коши, имеем:

$$S_2 \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \right| \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \chi(v) \right|^2 \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{U < u \leq 2^k U} \tau'_k(u) \chi(u) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Заметим, что $\sigma_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{U < u \leq 2^k U} \tau'_k(u) \chi(u) \right|^2$ равняется числу реше-

ний сравнения

$$n_2 n_4 \dots n_{2k} \equiv n'_2 n'_4 \dots n'_{2k} \pmod{D}; \\ N_2 < n_2, n'_2 \leq 2N_2, \dots, N_{2k} < n_{2k}, n'_{2k} \leq 2N_{2k}.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U < u \leq 2^k U} \tau_k(u) \quad \sum_{\substack{U < u' \leq 2^k U \\ u' \equiv u \pmod{D}}} \tau_k(u').$$

Для оценки внутренней суммы применим лемму 1.1.5 [1, с. 30], а для оценки внешней суммы — ту же лемму, положив в ней $D = 1$. Получим:

$$\sigma_1 \ll \left(\frac{U^2}{D} + U \right) (\ln U)^{2A(k)},$$

$A(k)$ — положительная константа, зависящая от k .

Аналогично оценивается сумма $\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod{D}} \left| \sum_{W < v \leq W+W'} \tau'_{k-1}(v) \chi(v) \right|^2$.

Таким образом:

$$S_2 \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{H < n_1 \leq H+H'} c_1(n_1) \chi(n_1) \right| \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) \left(\frac{V}{\sqrt{D}} + \sqrt{V} \right).$$

Если $c_1(n_1) = 1$ или $c_1(n_1) = \ln n_1$, тогда, оценивая соответствующую сумму согласно леммам 3 или 4, получим:

$$\begin{aligned} \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \chi(n_1) \right| \left(\frac{U\sqrt{V} + \sqrt{UV}}{\sqrt{D}} + \sqrt{UV} \right) &\ll \\ &\ll \sqrt{N_1} D^{1/6} \ln D \left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}} + \sqrt{UV} \right) \ll \\ &\ll \ln X \left(X^{3/4} D^{-1/3} + X^{1/2} D^{1/6} \right) \ll X^{3/4} D^{-1/3} \ln X, \\ \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \chi(n_1) \right| \frac{UV}{D} &\ll \frac{X^{1-\frac{\gamma}{8k^3}}}{D}. \end{aligned}$$

Если же $c_1(n_1) = \mu(n_1)$, то, оценивая соответствующую сумму согласно лемме 9, получим:

$$\begin{aligned} \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{H < n_1 \leq H+H'} \mu(n_1) \chi(n_1) \right| \left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}} + \sqrt{UV} + \frac{UV}{D} \right) &\ll \\ &\ll N_1 e^{-b_6 (\ln \ln D)^2} \left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}} + \sqrt{UV} + \frac{UV}{D} \right). \end{aligned}$$

Выберем $\delta = \frac{2}{5} b_6 < \frac{1}{25}$. Так как, по условию теоремы $D \leq X^{\frac{3}{8}} e^{-(\ln \ln X)^2}$, то,

учитывая (5) и $(\ln X)^{2k}$, получаем: $R \ll \frac{X}{\varphi(D)} e^{-\varkappa (\ln \ln X)^2}$, $\varkappa = \frac{1}{6} b_6$.

Из полученной асимптотической формулы преобразованием Абеля приходим к утверждению теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. — Издательство ЛГУ, 1961. — 208 с.
- [2] Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. — 1955. — 19, № 1. — С. 11-16.
- [3] Линник Ю. В., Барбан М. Б., Чудаков Н. Г. О простых числах в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа // Acta arithm. J. — 1964. — vol.9, № 4. — С. 375-390.
- [4] Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого нечетного числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. — 1979. — 43, № 4. — С. 892-908.
- [5] Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР. — 1970. — 192, № 4. — С. 724-727.
- [6] Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник Московского университета. — 1973. № 2. — С. 46-52.
- [7] Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory. — American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 53, 2004. — 615 с.
- [8] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 239 с.
- [9] Линник Ю. В. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод. — Ленинград: Наука, 1980. — 373 с.
- [10] Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967. — 511 с.
- [11] Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями // Докл. АН СССР, Серия математическая. — 1956. — 19, № 4. — С. 683-686.

Белгородский государственный университет

Поступило 6.07.2011