Yu. L. Ershov, On profinite groups, *Algebra Logika*, 1980, Volume 19, Number 5, 552–565

Алгебра и логика, 19, № 5(1980), 552-565.

УДК 519.4

О ПРОКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Ю. Л. ЕРШОВ

В статье содержатся доказательства ряда фактов о проконечных группах, которые оказались необходимыми при исследовании регулярно замкнутых полей [1]. Основные определения и необходимые сведения о проконечных группах можно найти в [2]. Все гомоморфизмы между проконечными группами в настоящей статье подразумеваются непрерывными. Если гомоморфизм $\varphi: G \longrightarrow H$ является эпиморфизмом, то обозначать это будем так: $G \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} H$.

Пусть $F_0(X)$ – (абстрактная) свободная группа со свободной системой порождающих X. Пусть $\mathcal{J}$ – семейство всех нормальных подгрупп M группы $F_0(X)$ таких, что группа $F_0(X)/M$ и множество $X \setminus M$ конечны. Семейство $\mathcal{J}$ направленно, и проконечная группа $F(X) \rightleftharpoons \varprojlim_{M \in \mathcal{J}} F_0(X)/M$ называется *свободной проконечной группой со свободной системой порождающих* X.

Пусть G – проконечная группа. Множество $X \subseteq G$ называется *системой порождающих для* G, если $\langle X \rangle_G$ – наименьшая замкнутая подгруппа группы G, содержащая X, совпадает с G и для любого открытого нормального делителя M группы G множество $X \setminus M$ конечно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $G \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} H$, X – система порождающих для G, то $\varphi(X)$ – система порождающих для H.

ЛЕММА 1. *Любая проконечная группа имеет некоторую систему порождающих.*

Докажем сначала эту лемму для про-p-групп. По следствию 1 предложения 24 § 4 главы 1 из [2], всякая про-p-группа является гомоморфным образом свободной про-p-группы, которая, по определению, имеет (свободную) систему порождающих. Тогда, по замечанию перед леммой, всякая про- p -группа имеет систему порождающих.

Пусть G – произвольная проконечная группа, и G_p – некоторая силовская p -подгруппа для каждого простого числа p, а $X_p \subseteq G_p$ – некоторая система порождающих для G_p. Тогда $X \rightleftharpoons \bigcup_p X_p$ – система порождающих для G. Действительно, если M – открытая нормальная подгруппа G, то $F \rightleftharpoons G/M$ – конечная группа, и если $p \nmid |F|$, то $G_p \leq M$. Если $p \mid |F|$, то $M \cap G_p$ – открытая нормальная подгруппа в G_p. Следовательно, $X_p \setminus (M \cap G_p)$ конечно, но тогда и $X \setminus M = \bigcup_{p\mid |F|} X_p \setminus (M \cap G_p)$ конечно. Остается только заметить, что $\langle X \rangle_G = G$.

Свободная проконечная группа $F(X)$ обладает следующим свойством универсальности. Для любой проконечной группы G, любой ее системы порождающих Y и любого отображения $\varphi : X \longrightarrow Y$ существует и при том единственный гомоморфизм $\Phi : F(X) \longrightarrow G$ такой, что $\Phi \restriction X = \varphi$. Если φ – отображение X на Y, то Φ – эпиморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ. От множества Y не обязательно требовать, чтобы оно было системой порождающих для G. Достаточно, чтобы Y было подмножеством некоторой системы порождающих или таково, чтобы $Y \setminus M$ было конечно для любого открытого нормального делителя M группы G.

СЛЕДСТВИЕ. Любая проконечная группа является гомоморфным образом подходящей свободной проконечной группы.

Проконечную группу G назовем **проективной**, если для любой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow \varphi \\ H_1 & \xrightarrow{\psi} & H_0 \end{array} \qquad (*)$$

гомоморфизмов проконечных групп существует гомоморфизм $\lambda : G \longrightarrow H_1$ такой, что $\varphi = \psi\lambda$.

(Это обычное определение проективного объекта в категории проконечных групп.)

Проконечную группу G назовем **финитно-проективной**, если для любой диаграммы $(*)$ гомоморфизмов с конечной группой H_1 существует гомоморфизм $\lambda : G \longrightarrow H_1$ такой, что $\varphi = \psi\lambda$.

ЛЕММА 2. Свободная проконечная группа является проективной.

Пусть задана диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ H_1 & \xrightarrow{\psi} & H_0 \end{array}$$

По предложению 1 § 1 главы 1 из [2] , существует непрерывное сечение $\sigma: H_0 \to H_1$, которое можно выбрать так, что $\sigma(1) = 1$. Тогда $Y \rightleftharpoons \sigma\varphi(X)$ будет таким, что для любого открытого нормального делителя M группы H_1 множество $Y \setminus M$ конечно. Поэтому отображение $X \xrightarrow{\sigma\varphi} Y$ продолжается до гомоморфизма $\lambda: F(X) \to H_1$ такого, что $\lambda \upharpoonright X = \sigma\varphi$. Легко видеть, что $\psi\lambda = \varphi$.

Приведем теперь ряд полезных характеризаций класса проективных групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для проконечной группы G эквивалентны следующие условия:*

1. *G проективна;*

2. *когомологическая размерность $cd(G)$ группы $G \leq 1$;*

3. *G изоморфна замкнутой подгруппе подходящей свободной проконечной группы;*

4. *для всех простых p силовская p-подгруппа G_p группы G является свободной про-p-группой;*

5. *G финитно-проективна.*

Эквивалентность условий 1 и 2 установлена в теореме 4 работы [4] .

2 $\Longleftrightarrow$ 4. По предложению 14 § 3 главы 1 из [2] для всех простых p выполняется $cd_p(G) = cd_p(G_p)$. Следовательно, $cd(G) \leq 1 \Longleftrightarrow cd_p(G_p) \leq 1$ для всех простых p . По следствию 2 предложения 24 § 4 главы 1 из [2] , про-p-группа G_p является свободной про-p-группой тогда и только тогда, когда $cd_p(G_p) \leq 1$.

3 $\Longrightarrow$ 2. Действительно, по лемме 2, свободная проконечная группа $F(X)$ проективна, следовательно, по условию 2, $cd(F(X)) \leq 1$. Если G – замкнутая подгруппа $F(X)$, то, по предложению 14 § 3 главы 1 из [2] , $cd(G) \leq cd(F(X)) (\leq 1)$.

1 $\Longrightarrow$ 3. Пусть G – проективная группа. По следствию леммы 1, существует эпиморфизм $F(X) \xrightarrow{\varphi} G$ подходящее свободной проконечной группы $F(X)$. Используя проективность группы G, находим гомоморфизм $\psi: G \longrightarrow F(X)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "id_G"] \\ F(X) \arrow[r, two heads, "\varphi"] & G \end{tikzcd}$$

коммутативна. Тогда ψ есть изоморфизм G и замкнутой подгруппы $\psi(G)$ свободной проконечной группы $F(X)$.

$1 \Longrightarrow 5$ очевидно

$5 \Longrightarrow 2$ следует из предложения 16 (ii) § 3 главы 1 из [2].

Из доказанных эквивалентностей и импликаций вытекает все остальное.

При исследовании проективных проконечных групп, которое провел К. Грюнберг в [4], важную роль играло понятие подгруппы Фраттини. Подгруппой Фраттини проконечной группы G называется пересечение $\Phi(G)$ всех максимальных открытых подгрупп группы G. Подгруппа Фраттини всякой проконечной группы G является пронильпотентной.

В [4] были установлены следующие полезные факты.

ЛЕММА 3. Пусть $S, T \subseteq G$. Если $G = \langle S \cup T \rangle_G$ и $T \subseteq \Phi(G)$, то $G = \langle S \rangle_G$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если H – замкнутая подгруппа G и $G = H\Phi(G)$, то $G = H$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если гомоморфизм $\psi: G_1 \longrightarrow G_2$ таков, что $\psi(\Phi(G_1)) \leqslant \Phi(G_2)$, то ψ есть эпиморфизм тогда и только тогда, когда индуцированный гомоморфизм $\widetilde{\psi}: G_1/\Phi(G_1) \longrightarrow G_2/\Phi(G_2)$ есть эпиморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G и E – проконечные группы и E проективна. Тогда

(1) каждый эпиморфизм $E/\Phi(E) \twoheadrightarrow G/\Phi(G)$ продолжается (поднимается) до эпиморфизма $E \twoheadrightarrow G$;

(2) если и G проективна, то каждый изоморфизм $E/\Phi(E) \xrightarrow{\sim} G/\Phi(G)$ продол-

жается до изоморфизма $E \xrightarrow{\sim} G$.

Введем новое понятие. Эпиморфизм $G \xrightarrow{\varphi} H$ проконечных групп назовем накрывающим (или просто накрытием), если $\mathrm{Ker}\,\varphi \leq \Phi(G)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\varphi: G \to H$ – эпиморфизм $(G \xrightarrow{\varphi} H)$, то в G существует замкнутая подгруппа F такая, что $F \xrightarrow{\varphi \restriction F} H$ есть накрытие H.

Покажем, что существует минимальная замкнутая подгруппа F группы G такая, что $\varphi \restriction F$ есть эпиморфизм на H $(\varphi(F)=H)$. Пусть $\{F_i \setminus i \in I\}$ – линейно упорядоченная по включению система таких замкнутых подгрупп, что $\varphi(F_i)=H$. Полагаем $\hat{F} \rightleftharpoons \bigcap_{i \in I} F_i$. Условие $\varphi(F_i)=H$ означает, что для любого $x \in H$ выполняется $F_i \cap \varphi^{-1}(x) \neq \emptyset$; семейство $\varphi^{-1}(x), F_i, i \in I$, состоит из замкнутых множеств и является, очевидно, центрированным. Следовательно, $\varphi^{-1}(x) \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \varphi^{-1}(x) \cap \hat{F} \neq \emptyset$ для любого $x \in H$. Стало быть, $\varphi(\hat{F}) = H$. Значит, применяя лемму Цорна, можно утверждать, что существует минимальная замкнутая подгруппа F такая, что $\varphi(F)=H$.

Покажем, что $F \cap \mathrm{Ker}\,\varphi \leq \Phi(F)$. Предположим, напротив, что для некоторой максимальной открытой подгруппы M в F имеет место $F \cap \mathrm{Ker}\,\varphi \not\leq M$. Тогда вложение $M/M \cap \mathrm{Ker}\,\varphi \leq F/\mathrm{Ker}\,\varphi \cap F$ является изоморфизмом, так как в противном случае $\varphi^{-1}(M) \cap F$ строго содержит M и является собственной открытой подгруппой F, что противоречит максимальности M. Но равенство $M/M \cap \mathrm{Ker}\,\varphi = F/F \cap \mathrm{Ker}\,\varphi$ означает, что $\varphi(M) = H$, а это противоречит минимальности F. Итак, $F \cap \mathrm{Ker}\,\varphi \leq \Phi(F)$ и $F \xrightarrow{\varphi \restriction F} H$ есть накрытие.

ЛЕММА 4. Пусть $G \xrightarrow{\psi} F$, $H \xrightarrow{\lambda} F$ и $G \xrightarrow{\varphi} H$ таковы, что $\lambda\varphi = \psi$ и λ – накрытие. Тогда φ – эпиморфизм. Если ψ – накрытие, то и φ – накрытие.

Действительно, имеем $H = \langle \varphi G \cup \mathrm{Ker}\,\lambda \rangle_H$ и $\mathrm{Ker}\,\lambda \leq \Phi(H)$. Следовательно, по лемме 3, $H = \langle \varphi G \rangle_H = \varphi G$, так как φG – замкнутая подгруппа H. Если ψ – накрытие, т. е. $\mathrm{Ker}\,\psi \leq \Phi(G)$, то из $\psi = \lambda\varphi$ следует, что $\mathrm{Ker}\,\varphi \leq \mathrm{Ker}\,\psi \leq \Phi(G)$ и φ – накрытие.

Накрытие $G \xrightarrow{\varphi} H$ назовем проективным, если G – проективная группа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть* $G \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} H$ *– проективное накрытие;* $H \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} H'$ *– эпиморфизм и* $G' \overset{\varphi'}{\twoheadrightarrow} H'$ *– накрытие. Тогда существует эпиморфизм* $\lambda : \widetilde{G} \twoheadrightarrow G'$ *такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr] & H \arrow[d, "\psi"] \\
G' \arrow[r, two heads, "\varphi'"] & H'
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Существование гомоморфизма $\lambda : G \longrightarrow G'$ такого, что $\varphi'\lambda = \psi\varphi$, вытекает из проективности G ; то, что λ – эпиморфизм, следует из леммы 4.

ТЕОРЕМА. *Для любой проконечной группы* H *существует проективное накрытие; любые два проективных накрытия* H *изоморфны над* H .

По следствию леммы 1, существует эпиморфизм $\varphi : F(X) \twoheadrightarrow H$ для подходящей свободной группы $F(X)$. По предложению 3, в $F(X)$ существует замкнутая подгруппа G такая, что $\psi \rightleftharpoons \varphi \restriction G : G \twoheadrightarrow H$ есть накрытие. По предложению 1, G – проективная группа. Следовательно, $G \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} H$ – проективное накрытие.

Пусть $G \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} H$ и $G' \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} H$ – два проективных накрытия. По предложению 4, существует эпиморфизм $\varphi : G \twoheadrightarrow G'$ такой, что $\psi = \psi'\varphi$. Эпиморфизм $\varphi : G \twoheadrightarrow G'$ является накрытием, так как $\operatorname{Ker}\varphi \leqslant \operatorname{Ker}\psi' \leqslant \Phi(G')$. Поскольку G' проективна, то существует гомоморфизм $\varphi' : G' \longrightarrow G$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & G' \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[d, "id_{G'}"] \\
G \arrow[r, two heads, "\varphi"] & G'
\end{tikzcd}$$

коммутативна. По лемме 4, λ – эпиморфизм. Но тогда, очевидно, λ – изоморфизм G' и G , обратный φ , т. е. φ – изоморфизм G и G' над H .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* $G \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} H$ *– проективное накрытие, то любой гомоморфизм* $\psi : G \longrightarrow G$ *такой, что* $\varphi\psi = \varphi$ *, является автоморфизмом.*

По лемме 4, ψ является накрытием. Так как $G \xrightarrow{\psi} G$ и $G \xrightarrow{id_G} G$ – два проективных накрытия G, то они изоморфны над G, т. е. существует изоморфизм $\lambda : G \xrightarrow{\sim} G$ такой, что $\psi\lambda = id_G$. Отсюда ψ – изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 2. Две подгруппы G и H свободной проконечной группы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны группы $G/\Phi(G)$ и $H/\Phi(H)$.

В одну сторону утверждение очевидно. В другую – это следует из теоремы, так как естественные эпиморфизмы $G \twoheadrightarrow G/\Phi(G)$ и $H \twoheadrightarrow H/\Phi(H)$ являются проективными накрытиями.

Если $\Pi(G) \xrightarrow{\varphi} G$ – проективное накрытие проконечной группы, то группу $\mathrm{Ker}\,\varphi$ обозначим через $\pi_1(G)$. Так как φ – накрытие, то $\pi_1(G) \leqslant \Phi(\Pi(G))$. Следовательно, $\pi_1(G)$ – пронильпотентная группа, и тогда $\pi_1(G) = \prod\limits_p \pi_1^p(G)$ – прямое произведение своих силовских p-подгрупп. Кроме того, $\pi_1(G)$, как замкнутая подгруппа проективной группы является проективной, следовательно, ее силовские p-подгруппы $\pi_1^p(G)$ являются свободными про-p-группами. Таким образом, для полного описания группы $\pi_1(G)$ нужно только знать мощности минимальных систем порождающих для $\pi_1^p(G)$, p – простое число. Для конечных сверхразрешимых групп G это будет полностью вычислено в конце статьи.

Класс $\mathfrak{O}$ конечных групп назовем *допустимым*, если выполнены следующие условия:

1. Класс $\mathfrak{O}$ замкнут относительно гомоморфных образов.

2. Всякую диаграмму групп из $\mathfrak{O}$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[dr] & & G \arrow[dl] \\ & F & \end{tikzcd}$$

можно замкнуть до коммутативной

$$\begin{tikzcd} & F_0 \arrow[dl] \arrow[dr, two heads] & \\ H \arrow[dr, two heads] & & G, \arrow[dl] \\ & F & \end{tikzcd}$$

где $F_0 \in \mathfrak{O}$.

3. Если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{O}$, то $G \in \mathfrak{O}$.

Последнее условие равносильно [5] следующему:

Если $H \xrightarrow{\varphi} G$, $G \in \mathfrak{O}$, H – конечная группа, то существует $G_0 \leqslant H$ такая, что $G_0 \in \mathfrak{O}$, $\varphi(G_0) = G$.

Примерами допустимых классов являются:

1) класс $\mathfrak{O}_\omega$ всех конечных групп;

2) класс $\mathfrak{O}_n$ всех конечных групп, имеющих n образующих;

3) класс $\mathfrak{O}_S$ ($\mathfrak{O}_{SS}$) всех (сверх)разрешимых конечных групп;

4) класс $\mathfrak{O}_N$ всех нильпотентных конечных групп;

5) если $f: \Pi \longrightarrow \omega$ – произвольное отображение из множества Π всех простых чисел в $\omega = \{0, 1, \ldots\}$, то класс $\mathfrak{O}_f$, состоящий из всех конечных сверхразрешимых групп G таких, что для любого $p \in \Pi$ силовская p-подгруппа G_p группы G имеет $\leqslant f(p)$ образующих, является допустимым;

6) если f как в п. 5, то класс $\mathfrak{O}_N \cap \mathfrak{O}_f$ является допустимым.

Пусть $\mathfrak{O}$ – фиксированный для дальнейшего допустимый класс конечных групп. Проконечную группу G назовем п р о – $\mathfrak{O}$ – г р у п п о й (короче, $\mathfrak{O}$ –г р у п п о й), если все конечные гомоморфные образы G принадлежат $\mathfrak{O}$. Назовем $\mathfrak{O}$ –у н и в е р с а л ь н о й $\mathfrak{O}$ –группу G такую, что для любых двух эпиморфизмов $G \xrightarrow{\varphi} H_0$, $H_1 \xrightarrow{\psi} H_0$, $H_0, H_1 \in \mathfrak{O}$ существует эпиморфизм $\varphi': G \twoheadrightarrow H_1$ такой, что $\psi\varphi' = \varphi$.

Покажем, что класс $[\mathfrak{O}]$ всех $\mathfrak{O}$–групп удовлетворяет тем же условиям, что и класс $\mathfrak{O}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. К л а с с $[\mathfrak{O}]$ в с е х $\mathfrak{O}$ – г р у п п у д о в л е т в о р я е т с л е д у ю щ и м у с л о в и я м:

1. К л а с с $[\mathfrak{O}]$ з а м к н у т о т н о с и т е л ь н о г о м о м о р ф н ы х о б р а з о в.

2. В с я к у ю д и а г р а м м у г р у п п и з $[\mathfrak{O}]$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[dr] & & G \arrow[dl] \\ & F & \end{tikzcd}$$

м о ж н о з а м к н у т ь д о к о м м у т а т и в н о й

$$\begin{tikzcd} & F_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ H \arrow[dr] & & G \arrow[dl] \\ & F & \end{tikzcd},$$

г д е $F_0 \in [\mathfrak{O}]$.

3. Е с л и $H \xrightarrow{\varphi} G$, $G \in [\mathfrak{O}]$, т о в H с у щ е с т в у е т з а м к н у т а я п о д г р у п п а G_0 т а к а я, ч т о $G_0 \in [\mathfrak{O}]$ и $\varphi(G_0) = G$.

Свойство 1 очевидно.

Установим свойство 2. Пусть $H, G, F \in [\mathfrak{O}]$ и $\varphi: H \twoheadrightarrow F$, $\psi: G \twoheadrightarrow F$ – эпиморфизмы. Полагаем $I \rightleftharpoons \{H' \mid H'$ – открытый нормальный делитель $H\}$, $J \rightleftharpoons \{G' \mid G'$ – открытый нормальный делитель $G\}$, K $\{F' \mid F'$ – открытый нормальный делитель $F\}$. Если $i\in I$ ($j\in J$, $k\in K$), то через H_i (G_j, F_k) будем обозначать конечную фактор-группу H/i (G/j, F/k), а через π_i (π_j, π_k) – соответствующий эпиморфизм. Пусть $S \rightleftharpoons \{\langle i,j,k\rangle \mid i\in I,\ j\in J,\ k\in K,\ \varphi(i)\leqslant k,\ \psi(j)\leqslant k\}$. Для $s=\langle i,j,k\rangle\in S$ через $\varphi_s : H_i \twoheadrightarrow F_k$, $\psi_s : G_j \twoheadrightarrow F_k$ обозначим эпиморфизмы, индуцированные эпиморфизмами φ и ψ. Для $s=\langle i,j,k\rangle$, $s' = \langle i',j',k'\rangle\in S$ полагаем $s\leqslant s' \rightleftharpoons i'\leqslant i,\ j'\leqslant j,\ k'\leqslant k$. Если $s\leqslant s'$, то все естественные эпиморфизмы $H_{i'}\twoheadrightarrow H_i$, $G_{j'}\twoheadrightarrow G_j$, $F_{k'}\twoheadrightarrow F_k$ обозначим $\sigma_{s',s}$. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[drr, "\varphi"] \arrow[dd, "\pi_{i'}"'] \arrow[dddd, bend right, "\pi_i"'] & & & & G \arrow[dll, "\psi"'] \arrow[dd, "\pi_{j'}"] \arrow[dddd, bend left, "\pi_j"] \\
& & F \arrow[dd, "\pi_{k'}"] \arrow[dddd, bend right, "\pi_k"'] & & \\
H_{i'} \arrow[drr, "\varphi_{s'}"] \arrow[dd, "\sigma_{s',s}"'] & & & & G_{j'} \arrow[dll, "\psi_{s'}"'] \arrow[dd, "\sigma_{s',s}"] \\
& & F_{k'} \arrow[dd, "\sigma_{s',s}"] & & \\
H_i \arrow[drr, "\varphi_s"] & & & & G_j \arrow[dll, "\psi_s"'] \\
& & F_k & &
\end{tikzcd}
$$

Для $s=\langle i,j,k\rangle\in S$ обозначим через $H_i \underset{F_k}{\times} G_j$ прямое произведение групп H_i и G_j над F_k, т. е. подгруппу прямого произведения $H_i\times G_j$, состоящую из всех пар $\langle h,g\rangle$ таких, что $\varphi_s(h)=\psi_s(g)$. Если $s\leqslant s'$, то эпиморфизмы $\sigma_{s',s}$ индуцируют эпиморфизм

$H_{i'}\underset{F_{k'}}{\times} G_{j'} \twoheadrightarrow H_i \underset{F_k}{\times} G_j$, который также будем обозначать $\sigma_{s',s}$. В силу свойства 2 класса $\mathfrak{N}$, существует группа $\Phi\in\mathfrak{N}$ и эпиморфизмы ее на H_i и G_j такие, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
& \Phi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
H_i \arrow[dr, "\varphi_s"'] & & G_j \arrow[dl, "\psi_s"] \\
& F_k &
\end{tikzcd}
$$

коммутативна. По свойству прямых произведений существует и при том единственный гомоморфизм $\psi: \Phi \longrightarrow H_i \underset{F_k}{\times} G_j$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] \arrow[drr] & H_i \underset{F_k}{\times} G_j \arrow[d] \arrow[dl] \\ H_i \arrow[dr] & & G_j \arrow[dl] \\ & F_k & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Подгруппа $\psi(\Phi)$ группы $H_i \underset{F_k}{\times} G_j$ будет принадлежать классу $\mathcal{G}$ в силу свойства 1. Следовательно, если через T_s обозначим (конечное) семейство всех подгрупп Φ группы $H_i \underset{F_k}{\times} G_j$ таких, что $\Phi \in \mathcal{G}$ и образы Φ при естественных проектированиях есть H_i и G_j соответственно, то $T_s \neq \phi$ для всех $s \in S$. Заметим теперь, что если $s \leq s'$ и $\Phi \in T_{s'}$, то $\sigma_{s',s}(\Phi) \in T_s$. Так задается отображение из $T_{s'}$ в T_s, которое обозначим $\sigma^*_{s',s}$. Легко проверить, что если $s \leq s' \leq s''$, то $\sigma^*_{s'',s} = \sigma^*_{s',s}\,\sigma^*_{s'',s'}$. Следовательно, семейства T_s и отображения $\sigma^*_{s',s}$ задают обратный спектр непустых конечных множеств. Хорошо известно, что обратный предел $\varprojlim_s T_s$ такого спектра непуст.

Пусть $f \in \varprojlim T_s \subseteq \prod_{s\in S} T_s$. Тогда для любого $s \in S$ $f(s)$ есть подгруппа $H_i \underset{F_k}{\times} G_j$ такая, что $f(s) \in \mathcal{G}$ и $f(s) \twoheadrightarrow H_i$, $f(s) \twoheadrightarrow G_j$. Далее, если $s \leq s'$, то $\sigma_{s',s} f(s') = f(s)$, и, следовательно, система $\{f(s), \sigma_{s',s} \mid s \in S,\ s \leq s'\}$ есть обратный спектр конечных групп и эпиморфизмов. Пусть $F_0 \rightleftharpoons \varprojlim_s f(s)$. Тогда F_0 – проконечная группа, лежащая в $[\mathcal{G}]$; F_0 естественно отождествляется с замкнутой подгруппой группы $H \underset{F}{\times} G \left(\simeq \varprojlim_s H_i \underset{F_k}{\times} G_j\right)$ такой, что проекции отображают F_0 на H и G соответственно. Свойство 2 установлено.

Установим свойство 3. Пусть $F \in [\mathcal{G}]$, H – произвольная проконечная группа и $\varphi: H \twoheadrightarrow F$ – эпиморфизм. Пусть $I \rightleftharpoons \{H' \mid H'$ – открытый нормальный делитель $H\}$. Для $i \in I$ полагаем $H_i \rightleftharpoons H/i$, $F_i \rightleftharpoons F/\varphi(i)$, $\varphi_i: H_i \twoheadrightarrow F_i$ – индуцированный эпиморфизм; если $i, i' \in I$, то $i \leq i'$ означает, что i' – подгруппа i. Для $i \leq i'$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & F \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\ H_{i'} \arrow[r, "\varphi_{i'}"] \arrow[d, "\sigma_{i',i}"] & F_{i'} \arrow[d, "\sigma_{i',i}"'] \\ H_i \arrow[r, "\varphi_i"] & F_i \end{tikzcd}.$$

Для $i\in I$ полагаем $T_i \rightleftharpoons \{G \mid G \leqslant H_i, G\in \mathfrak{Y}, \varphi_i(G)=F_i\}$.
По свойству 3 класса $\mathfrak{Y}$ (см. эквивалентное свойство после определения), семейство T_i (очевидно, конечное) непусто. Если $G'\in T_{i'}$, то для $i\leqslant i'$ выполняется $\sigma_{i'i}(G')\in T_i$. Этим задается отображение $\sigma^*_{i'i}: T_{i'}\to T_i$. Система $\{T_i, \sigma^*_{i'i} \mid i\in I, i\leqslant i'\}$ является обратным спектром конечных непустых множеств. Следовательно, обратный предел $\varprojlim_i T_i$ непуст. Если $f\in \varprojlim_i T_i \subseteq \prod_{i\in I} T_i$, то система $\{f(i), \sigma_{i'i} \mid i\in I, i\leqslant i'\}$ есть обратный спектр конечных групп (из $\mathfrak{Y}$) и эпиморфизмов. Следовательно, $G_0 \rightleftharpoons \varprojlim_i f(i)$ принадлежит $[\mathfrak{Y}]$; G_0 естественно отождествляется с подгруппой группы $H\ (\simeq \varprojlim_i H_i)$ такой, что $\varphi(G_0)=G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Любая $\mathfrak{Y}$-группа является гомоморфным образом подходящей универсальной $\mathfrak{Y}$-группы.

Нам потребуется

ЛЕММА 5. Для любой $\mathfrak{Y}$-группы G существует $\mathfrak{Y}$-группа G' и эпиморфизм $G'\xrightarrow{\varphi} G$ такие, что любая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow \\ F_1 & \twoheadrightarrow & F_0, \end{array}$$

где $F_0, F_1 \in \mathfrak{Y}$, замыкается до коммутативной

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_1 & \twoheadrightarrow & F_0 . \end{array}$$

Пусть $\mathfrak{Y}^*$ – такое множество групп из $\mathfrak{Y}$, что любая группа из $\mathfrak{Y}$ изоморфна одной и только одной группе из $\mathfrak{Y}^*$. Пусть T – множество всех диаграмм вида

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow \\ F_1 & \twoheadrightarrow & F_0 \end{array}}\ ,\qquad F_0, F_1 \in \mathfrak{Y}^*.$$

Множество T вполне упорядочим отношением $\leqslant$ и определим по трансфинитной индукции $\mathfrak{Y}$-группы G^t, G_t, эпиморфизмы $\varphi_t: G_t \twoheadrightarrow G^t$,

$\psi_t : G^t \twoheadrightarrow G$ и для $t_0 \leq t_1$ эпиморфизмы $\lambda_{t_1,t_0} : G_{t_1} \twoheadrightarrow G_{t_0}$ так,что $\{G_t, \lambda_{t',t} \mid t \in T \quad , t \leq t'\}$ – обратный спектр $\mathfrak{G}$ –групп. Полагаем, что для наименьшего элемента t_0 имеет место $G^{t_0} \rightleftharpoons G$; а в качестве G_{t_0} и φ_{t_0} выбираем произвольную $\mathfrak{G}$ –группу и эпиморфизм так, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} G_{t_0} \arrow[r, two heads, "\varphi_{t^0}"] \arrow[d] & G^{t_0} = G \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r, two heads] & F_0 \end{tikzcd}$$

коммутативна для подходящего эпиморфизма $G_{t_0} \twoheadrightarrow F_1$. Здесь

$t_0 = \boxed{\begin{tikzcd} & G \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r, two heads] & F_0 \end{tikzcd}}$. По предложению 5 (свойство 2), такая группа и эпиморфизм существуют.

Пусть для всех $t' < t$ уже определены группы $G^{t'}$, $G_{t'}$, для $t' \leq t'' < t$ эпиморфизмы $\lambda_{t'',t'}$ и т. п. Полагаем $G^t \rightleftharpoons \varprojlim_{t'<t} G_{t'}$, $\psi_t : G^t \twoheadrightarrow G$ – естественный эпиморфизм. Если

t есть диаграмма $\boxed{\begin{tikzcd} & G \arrow[d] \\ F_1' \arrow[r, two heads] & F_0' \end{tikzcd}}$,

то выбираем G_t и $\varphi_t : G_t \twoheadrightarrow G^t$ так, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} G_t \arrow[r, two heads, "\varphi_t"] \arrow[dr] & G^t \arrow[r, two heads, "\psi_t"] \arrow[dr] & G \arrow[d] \\ & F_1' \arrow[r, two heads] & F_0' \end{tikzcd}$$

коммутативна и $G_t \in [\mathfrak{G}]$. Полагаем $\lambda_{t,t'}$ равным композиции φ_t с естественной проекцией G^t на $G_{t'}$ для $t' < t$. Построение закончено. Если $G' \rightleftharpoons \varprojlim_t G_t$ и $G' \twoheadrightarrow G$ – естественная проекция, то, очевидно, заключение леммы выполнено.

Для доказательства предложения рассмотрим последовательность

$$G \twoheadleftarrow G' \twoheadleftarrow (G')' \twoheadleftarrow \ldots \twoheadleftarrow G^{(n)} \twoheadleftarrow G^{(n+1)} (\rightleftharpoons (G^{(n)})') \twoheadleftarrow \ldots$$

эпиморфизмов, где штрих означает то же, что в лемме, тогда $G_0 \rightleftharpoons \varprojlim_n G^{(n)}$, очевидно, – $\mathfrak{G}$ – универсальная группа, и G_0 про–

ектируется на G.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Универсальная $\mathcal{C}$-группа является проективной.

Пользуясь предложением 1, докажем, что универсальная $\mathcal{C}$-группа G является финитно-проективной. Рассмотрим произвольную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ F_1 & \xrightarrow{\psi} & F_0, \end{array}$$

где F_1 – конечная группа. Пусть $G_0 \rightleftharpoons \varphi(G) \leqslant F_0$, $H \rightleftharpoons \psi^{-1}(G_0)$. Так как G_0 – гомоморфный образ G, то $G_0 \in \mathcal{C}$. Так как $\psi(H) = G_0$, то, по свойству 3 класса $\mathcal{C}$, в H найдется подгруппа G_1 такая, что $G_1 \in \mathcal{C}$ и $\psi(G_1) = G_0$. Имеем коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi"] \\ G_1 \arrow[r, "\psi\restriction G_1"] \arrow[d] & G_0 \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r, "\psi"] & F_0 \end{tikzcd}$$

По свойству $\mathcal{C}$-универсальности группы G, существует эпиморфизм λ: $G \twoheadrightarrow G_1 \leqslant F_1$ такой, что $\psi\lambda = \varphi$.

В заключение статьи применим два последних предложения для получения некоторой информации о проективных накрытиях конечных сверхразрешимых групп.

Пусть G – конечная сверхразрешимая группа и $|G| = \prod_p p^{s_p}$. Для $p \in \Pi$ через $f_G(p)$ обозначим минимальное число образующих силовской p-подгруппы группы G (если $p \nmid |G|$, то $f_G(p) = 0$). Тогда $G \in \mathcal{C}_{f_G}$ (см. определение класса $\mathcal{C}_f$ в примерах допустимых классов групп). По предложению 6, существует $\mathcal{C}_{f_G}$-универсальная группа G_0 и эпиморфизм $G_0 \xrightarrow{\varphi} G$. Пусть $\Pi(G) \xrightarrow{\pi} G$ – проективное накрытие. Так как G_0 проективна, по предложению 7, то существует гомоморфизм λ: $G_0 \longrightarrow \Pi(G)$ такой, что $\varphi = \pi\lambda$, который, по лемме 4, будет эпиморфизмом, поскольку π – накрытие. Заметим, что силовские p-подгруппы группы G_0 имеют то же минимальное число образующих, что и в группе G (так как G_0 является $\mathcal{C}_{f_G}$-группой). Значит, и в группе $\Pi(G)$ силовские p-подгруппы будут иметь то же минимальное число $f_G(p)$ образующих, что и в группе G. Но $\Pi(G)$ – проективная группа, следовательно, ее силовская p-подгруппа $\Pi^p(G)$ – свободная про-p-группа (с $f_G(p)$ образующими). Эта подгруппа $\Pi^p(G)$ отображается на силовскую p -подгруппу группы G_p , следовательно, ядро этого отображения - силовская p -подгруппа $\pi_1^p(G)$ группы $\pi_1(G)$ будет замкнутой подгруппой свободной про-p -группы с $f_G(p)$ свободными образующими индекса p^{s_p} . Следовательно, $\pi_1^p(G)$ будет свободной про-p-группой с $1+p^{s_p}(f_G(p)-1)$ свободными образующими (см. [3 , с. 122]). Остается заметить, что $f_G(p)$ - это $\dim_p H^1(G_p, Z_p)$ (см. [2]).

Подытожим полученные результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если G - конечная сверхразрешимая группа порядка $|G| = \prod_p p^{s_p}$, то группа $\pi_1(G)$ есть прямое произведение своих силовских p-подгрупп $\pi_1^p(G)$, которые являются свободными про-p-группами с $1+p^{s_p}(\dim_p H^1(G_p, Z_p)-1)$ свободными образующими.

Литература

1. Ю. Л. ЕРШОВ, Регулярно замкнутые поля, ДАН СССР, 251, №4 (1980), 783-785.

2. Ж.-П. СЕРР, Когомологии Галуа, М., Мир, 1968.

3. М. ХОЛЛ, Теория групп, М., ИЛ, 1962.

4. K.W.GRUENBERG, Projective profinite groups, J.London Math. Soc.,42, N 1 (1967),155-165.

5. B.HUPPERT, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math.Z., 60 (1954),409-434.

Поступило 26 августа 1980 г.