

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. L. Ershov, On profinite groups, *Algebra Logika*, 1980,
Volume 19, Number 5, 552–565

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have
read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

January 24, 2025, 14:02:09



О ПРОКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Ю. Л. ЕРШОВ

В статье содержатся доказательства ряда фактов о проконечных группах, которые оказались необходимыми при исследовании регулярно замкнутых полей [1]. Основные определения и необходимые сведения о проконечных группах можно найти в [2]. Все гомоморфизмы между проконечными группами в настоящей статье подразумеваются непрерывными. Если гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ является эпиморфизмом, то обозначать это будем так: $G \xrightarrow{\varphi} H$.

Пусть $F_0(X)$ - (абстрактная) свободная группа со свободной системой порождающих X . Пусть \mathcal{J} - семейство всех нормальных подгрупп M группы $F_0(X)$ таких, что группа $F_0(X)/M$ и множество $X \setminus M$ конечны. Семейство \mathcal{J} направленно, и проконечная группа $F(X) \cong \varinjlim_{M \in \mathcal{J}} F_0(X)/M$ называется свободной проконечной группой со свободной системой порождающих X .

Пусть G - проконечная группа. Множество $X \subseteq G$ называется системой порождающих для G , если $\langle X \rangle_G$ - наименьшая замкнутая подгруппа группы G , содержащая X , совпадает с G и для любого открытого нормального делителя M группы G множество $X \setminus M$ конечно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $G \xrightarrow{\varphi} H$, X - система порождающих для G , то $\varphi(X)$ - система порождающих для H .

ЛЕММА 1. Любая проконечная группа имеет некоторую систему порождающих.

Докажем сначала эту лемму для про- p -групп. По следствию 1 предложения 24 § 4 главы 1 из [2], всякая про- p -группа является гомоморфным образом свободной про- p -группы, которая, по определению, имеет (свободную) систему порождающих. Тогда, по замечанию перед лем-

мой, всякая про- p -группа имеет систему порождающих.

Пусть G — произвольная проконечная группа, и G_p — некоторая силовская p -подгруппа для каждого простого числа p , а $X_p \subseteq G_p$ — некоторая система порождающих для G_p . Тогда $X = \bigcup_p X_p$ — система порождающих для G . Действительно, если M — открытая нормальная подгруппа G , то $F \cong G/M$ — конечная группа, и если $p \nmid |F|$, то $G_p \leq M$. Если $p \mid |F|$, то $M \cap G_p$ — открытая нормальная подгруппа в G_p . Следовательно, $X_p \setminus (M \cap G_p)$ конечно, но тогда и $X \setminus M = \bigcup_{p \mid |F|} X_p \setminus (M \cap G_p)$ конечно. Остается только заметить, что $\langle X \rangle_G = G$.

Свободная проконечная группа $F(X)$ обладает следующим свойством универсальности. Для любой проконечной группы G , любой ее системы порождающих Y и любого отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ существует и при том единственный гомоморфизм $\Phi: F(X) \rightarrow G$ такой, что $\Phi \upharpoonright X = \varphi$. Если φ — отображение X на Y , то Φ — эпиморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ. От множества Y не обязательно требовать, чтобы оно было системой порождающих для G . Достаточно, чтобы Y было подмножеством некоторой системы порождающих или таково, чтобы $Y \setminus M$ было конечно для любого открытого нормального делителя M группы G .

СЛЕДСТВИЕ. Любая проконечная группа является гомоморфным образом подходящей свободной проконечной группы.

Проконечную группу G назовем проективной, если для любой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ & \downarrow \varphi & \\ H_1 & \xrightarrow{\psi} & H_0 \end{array} \quad (*)$$

гомоморфизмов проконечных групп существует гомоморфизм $\lambda: G \rightarrow H_1$ такой, что $\varphi = \psi \lambda$.

(Это обычное определение проективного объекта в категории проконечных групп.)

Проконечную группу G назовем финитно-проективной, если для любой диаграммы (*) гомоморфизмов с конечной группой H_1 существует гомоморфизм $\lambda: G \rightarrow H_1$ такой, что $\varphi = \psi \lambda$.

ЛЕММА 2. Свободная проконечная группа является проективной.

Пусть задана диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & & \downarrow \varphi \\ H_1 & \xrightarrow{\psi} & H_0 \end{array}$$

По предложению 1 § 1 главы 1 из [2], существует непрерывное сечение $\sigma: H_0 \rightarrow H_1$, которое можно выбрать так, что $\sigma(1) = 1$. Тогда $Y \cong \sigma\varphi(X)$ будет таким, что для любого открытого нормального делителя M группы H_1 множество $Y \setminus M$ конечно. Поэтому отображение $X \xrightarrow{\sigma\varphi} Y$ продолжается до гомоморфизма $\lambda: F(X) \rightarrow H_1$ такого, что $\lambda \upharpoonright X = \sigma\varphi$. Легко видеть, что $\psi\lambda = \varphi$.

Приведем теперь ряд полезных характеристик класса проективных групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для проконечной группы G эквивалентны следующие условия:

1. G проективна;
2. когомологическая размерность $cd(G)$ группы $G \leq 1$;
3. G изоморфна замкнутой подгруппе подходящей свободной проконечной группы;
4. для всех простых p силовская p -подгруппа G_p группы G является свободной про- p -группой;
5. G финитно-проективна.

Эквивалентность условий 1 и 2 установлена в теореме 4 работы [4].

$2 \iff 4$. По предложению 14 § 3 главы 1 из [2] для всех простых p выполняется $cd_p(G) = cd_p(G_p)$. Следовательно, $cd(G) \leq 1 \iff cd_p(G_p) \leq 1$ для всех простых p . По следствию 2 предложения 24 § 4 главы 1 из [2], про- p -группа G_p является свободной про- p -группой тогда и только тогда, когда $cd_p(G_p) \leq 1$.

$3 \implies 2$. Действительно, по лемме 2, свободная проконечная группа $F(X)$ проективна, следовательно, по условию 2, $cd(F(X)) \leq 1$.

Если G — замкнутая подгруппа $F(X)$, то, по предложению 14 § 3 главы 1 из [2], $cd(G) \leq cd(F(X)) (\leq 1)$.

$1 \implies 3$. Пусть G — проективная группа. По следствию леммы 1,

существует эпиморфизм $F(X) \xrightarrow{\varphi} G$ подходящее свободной проконечной группы $F(X)$. Используя проективность группы G , находим гомоморфизм $\psi: G \rightarrow F(X)$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \psi \swarrow & & \downarrow id_G \\ F(X) & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

коммутативна. Тогда ψ есть изоморфизм G и замкнутой подгруппы $\psi(G)$ свободной проконечной группы $F(X)$.

1 \Rightarrow 5 очевидно

5 \Rightarrow 2 следует из предложения 16 (ii) § 3 главы 1 из [2].

Из доказанных эквивалентностей и импликаций вытекает все остальное.

При исследовании проективных проконечных групп, которое провел К. Грюнберг в [4], важную роль играло понятие подгруппы Фраттини. Подгруппой Фраттини проконечной группы G называется пересечение $\phi(G)$ всех максимальных открытых подгрупп группы G . Подгруппа Фраттини всякой проконечной группы G является про-nilпотентной.

В [4] были установлены следующие полезные факты.

ЛЕММА 3. Пусть $S, T \subseteq G$. Если $G = \langle SUT \rangle_G$ и $T \subseteq \phi(G)$, то $G = \langle S \rangle_G$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если H - замкнутая подгруппа G и $G = H\phi(G)$, то $G = H$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если гомоморфизм $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ таков, что $\psi(\phi(G_1)) \subseteq \phi(G_2)$, то ψ есть эпиморфизм тогда и только тогда, когда индуцированный гомоморфизм $\tilde{\psi}: G_1/\phi(G_1) \rightarrow G_2/\phi(G_2)$ есть эпиморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G и E - проконечные группы и E проективна. Тогда

(1) каждый эпиморфизм $E/\phi(E) \rightarrow G/\phi(G)$ продолжается (поднимается) до эпиморфизма $E \rightarrow G$;

(2) если G проективна, то каждый изоморфизм $E/\phi(E) \simeq G/\phi(G)$ продол-

жается до изоморфизма $E \simeq G$.

Введем новое понятие. Эпиморфизм $G \xrightarrow{\varphi} H$ проконечных групп назовем **накрывающим** (или просто **накрытием**), если $\text{Ker } \varphi \leq \Phi(G)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\varphi: G \rightarrow H$ — эпиморфизм ($G \xrightarrow{\varphi} H$), то в G существует замкнутая подгруппа F такая, что $F \xrightarrow{\varphi|_F} H$ есть накрытие H .

Покажем, что существует минимальная замкнутая подгруппа F группы G такая, что $\varphi|_F$ есть эпиморфизм на H ($\varphi(F) = H$). Пусть $\{F_i, i \in I\}$ — линейно упорядоченная по включению система таких замкнутых подгрупп, что $\varphi(F_i) = H$. Полагаем $\hat{F} = \bigcap_{i \in I} F_i$. Условие $\varphi(F_i) = H$ означает, что для любого $x \in H$ выполняется $F_i \cap \varphi^{-1}(x) \neq \emptyset$; семейство $\varphi^{-1}(x), F_i, i \in I$, состоит из замкнутых множеств и является, очевидно, центрированным. Следовательно, $\varphi^{-1}(x) \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \varphi^{-1}(x) \cap \hat{F} \neq \emptyset$ для любого $x \in H$. Стало быть, $\varphi(\hat{F}) = H$. Значит, применяя лемму Цорна, можно утверждать, что существует минимальная замкнутая подгруппа F такая, что $\varphi(F) = H$.

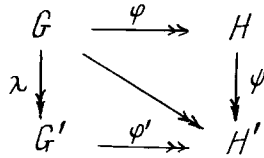
Покажем, что $F \cap \text{Ker } \varphi \leq \Phi(F)$. Предположим, напротив, что для некоторой максимальной открытой подгруппы M в F имеет место $F \cap \text{Ker } \varphi \not\leq M$. Тогда вложение $M/M \cap \text{Ker } \varphi \leq F/\text{Ker } \varphi \cap F$ является изоморфизмом, так как в противном случае $\varphi^{-1}(M) \cap F$ строго содержит M и является собственной открытой подгруппой F , что противоречит максимальнойности M . Но равенство $M/M \cap \text{Ker } \varphi = F/\text{Ker } \varphi \cap F$ означает, что $\varphi(M) = H$, а это противоречит минимальности F . Итак, $F \cap \text{Ker } \varphi \leq \Phi(F)$ и $F \xrightarrow{\varphi|_F} H$ есть накрытие.

ЛЕММА 4. Пусть $G \xrightarrow{\psi} F, H \xrightarrow{\lambda} F$ и $G \xrightarrow{\varphi} H$ таковы, что $\lambda\varphi = \psi$ и λ — накрытие. Тогда φ — эпиморфизм. Если ψ — накрытие, то и φ — накрытие.

Действительно, имеем $H = \langle \varphi G \cup \text{Ker } \lambda \rangle_H$ и $\text{Ker } \lambda \leq \Phi(H)$. Следовательно, по лемме 3, $H = \langle \varphi G \rangle_H = \varphi G$, так как φG — замкнутая подгруппа H . Если ψ — накрытие, т. е. $\text{Ker } \psi \leq \Phi(G)$, то из $\psi = \lambda\varphi$ следует, что $\text{Ker } \varphi \leq \text{Ker } \psi \leq \Phi(G)$ и φ — накрытие.

Накрытие $G \xrightarrow{\varphi} H$ назовем **проективным**, если G — проективная группа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $G \xrightarrow{\varphi} H$ - проективное накрытие; $H \xrightarrow{\psi} H'$ - эпиморфизм и $G' \xrightarrow{\varphi'} H'$ - накрытие. Тогда существует эпиморфизм $\lambda: \tilde{G} \rightarrow G'$ такой, что диаграмма



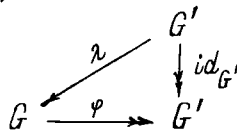
коммутативна.

Существование гомоморфизма $\lambda: G \rightarrow G'$ такого, что $\varphi'\lambda = \psi\varphi$, вытекает из проективности G ; то, что λ - эпиморфизм, следует из леммы 4.

ТЕОРЕМА. Для любой проконечной группы H существует проективное накрытие; любые два проективных накрытия H изоморфны над H .

По следствию леммы 1, существует эпиморфизм $\varphi: F(X) \rightarrow H$ для подходящей свободной группы $F(X)$. По предложению 3, в $F(X)$ существует замкнутая подгруппа G такая, что $\varphi \upharpoonright G: G \rightarrow H$ есть накрытие. По предложению 1, G - проективная группа. Следовательно, $G \xrightarrow{\varphi} H$ - проективное накрытие.

Пусть $G \xrightarrow{\varphi} H$ и $G' \xrightarrow{\varphi'} H$ - два проективных накрытия. По предложению 4, существует эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow G'$ такой, что $\varphi = \varphi'\varphi$. Эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow G'$ является накрытием, так как $\text{Ker } \varphi \leq \text{Ker } \varphi' \leq \varphi(G')$. Поскольку G' проективна, то существует гомоморфизм $\varphi': G' \rightarrow G$ такой, что диаграмма



коммутативна. По лемме 4, λ - эпиморфизм. Но тогда, очевидно, λ - изоморфизм G' и G , обратный φ , т.е. φ - изоморфизм G и G' над H .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $G \xrightarrow{\varphi} H$ - проективное накрытие, то любой гомоморфизм $\psi: G \rightarrow G$ такой, что $\varphi\psi = \varphi$, является автоморфизмом.

По лемме 4, ψ является накрытием. Так как $G \xrightarrow{\psi} G$ и $G \xrightarrow{id_G} G$ - два проективных накрытия G , то они изоморфны над G , т. е. существует изоморфизм $\lambda: G \xrightarrow{\sim} G$ такой, что $\psi\lambda = id_G$. Отсюда ψ - изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 2. Две подгруппы G и H свободной проконечной группы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны группы $G/\phi(G)$ и $H/\phi(H)$.

В одну сторону утверждение очевидно. В другую - это следует из теоремы, так как естественные эпиморфизмы $G \rightarrow G/\phi(G)$ и $H \rightarrow H/\phi(H)$ являются проективными накрытиями.

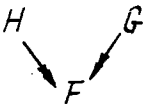
Если $\Pi(G) \xrightarrow{\varphi} G$ - проективное накрытие проконечной группы, то группу $\text{Ker } \varphi$ обозначим через $\pi_1(G)$. Так как φ - накрытие, то $\pi_1(G) \leq \phi(\Pi(G))$. Следовательно, $\pi_1(G)$ - про- нильпотентная группа, и тогда $\pi_1(G) = \prod_p \pi_1^p(G)$ - прямое произ- ведение своих силовских p -подгрупп. Кроме того, $\pi_1(G)$, как замк- нутая подгруппа проективной группы является проективной, следовательно, ее силовские p -подгруппы $\pi_1^p(G)$ являются свободными про- p -группами. Таким образом, для полного описания группы $\pi_1(G)$ нуж- но только знать мощности минимальных систем порождающих для $\pi_1^p(G)$,

p - простое число. Для конечных сверхразрешимых групп G это бу- дет полностью вычислено. в конце статьи.

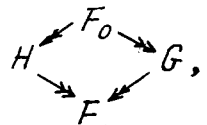
Класс \mathcal{O} конечных групп назовем допустимым, если выполнены следующие условия:

1. Класс \mathcal{O} замкнут относительно го- моморфных образов.

2. Всякую диаграмму групп из \mathcal{O}



можно замкнуть до коммутативной



где $F_0 \in \mathcal{O}$.

3. Если $G/\phi(G) \in \mathcal{O}$, то $G \in \mathcal{O}$.

Последнее условие равносильно [5] следующему:

Если $H \xrightarrow{\varphi} G$, $G \in \mathcal{O}$, H - конечная группа, то существует $G_0 \leq H$ такая, что $G_0 \in \mathcal{O}$, $\varphi(G_0) = G$.

Примерами допустимых классов являются:

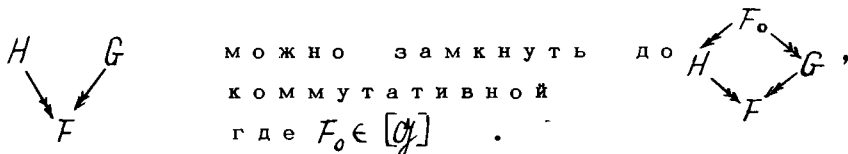
- 1) класс \mathcal{O}_ω всех конечных групп;
- 2) класс \mathcal{O}_n всех конечных групп, имеющих n образующих;
- 3) класс $\mathcal{O}_s(\mathcal{O}_{ss})$ всех (сверх)разрешимых конечных групп;
- 4) класс \mathcal{O}_N всех нильпотентных конечных групп;
- 5) если $f: \Pi \rightarrow \omega$ — произвольное отображение из множества Π всех простых чисел в $\omega = \{0, 1, \dots\}$, то класс \mathcal{O}_f , состоящий из всех конечных сверхразрешимых групп G таких, что для любого $p \in \Pi$ силовская p -подгруппа G_p группы G имеет $\leq f(p)$ образующих, является допустимым;
- 6) если f как в п. 5, то класс $\mathcal{O}_N \cap \mathcal{O}_f$ является допустимым.

Пусть \mathcal{O} — фиксированный для дальнейшего допустимый класс конечных групп. Проконечную группу G назовем про- \mathcal{O} -группой (короче, \mathcal{O} -группой), если все конечные гомоморфные образы G принадлежат \mathcal{O} . Назовем \mathcal{O} -универсальной \mathcal{O} -группу G такую, что для любых двух эпиморфизмов $G \xrightarrow{\varphi} H_0, H_1 \xrightarrow{\psi} H_0, H_0, H_1 \in \mathcal{O}$ существует эпиморфизм $\varphi': G \rightarrow H_1$ такой, что $\psi\varphi' = \varphi$.

Покажем, что класс $[\mathcal{O}]$ всех \mathcal{O} -групп удовлетворяет тем же условиям, что и класс \mathcal{O} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Класс $[\mathcal{O}]$ всех \mathcal{O} -групп удовлетворяет следующим условиям:

1. Класс $[\mathcal{O}]$ замкнут относительно гомоморфных образов.
2. Всякую диаграмму групп из $[\mathcal{O}]$



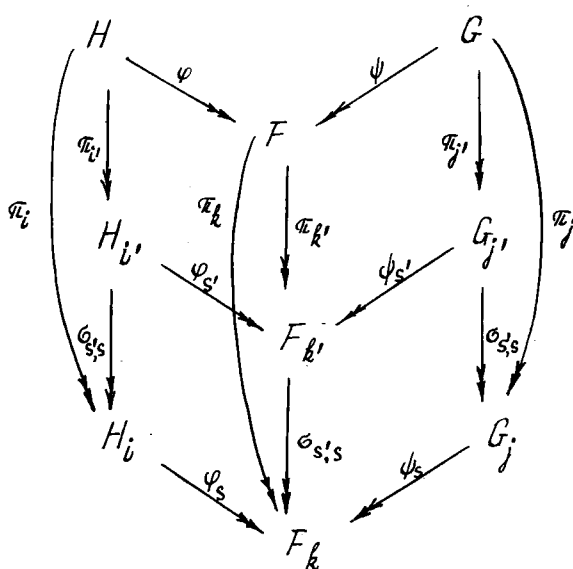
3. Если $H \xrightarrow{\varphi} G, G \in [\mathcal{O}]$, то в H существует замкнутая подгруппа G_0 такая, что $G_0 \in [\mathcal{O}]$ и $\varphi(G_0) = G$.

Свойство 1 очевидно.

Установим свойство 2. Пусть $H, G, F \in [\mathcal{O}]$ и $\varphi: H \rightarrow F, \psi: G \rightarrow F$ — эпиморфизмы. Полагаем $I \cong \{H' \mid H' \text{ — открытый нормальный делитель } H\}, J \cong \{G' \mid G' \text{ — открытый нормаль-}$

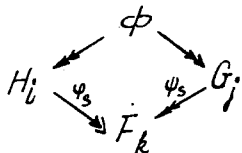
ный делитель G , $K = \{F' \mid F' \text{ - открытый нормальный делитель } F\}$.
 Если $i \in I$ ($j \in J, k \in K$), то через $H_i (G_j, F_k)$ будем обозначать конечную фактор-группу $H/i (G/j, F/k)$, а через $\pi_i (\pi_j, \pi_k)$ - соответствующий эпиморфизм. Пусть $S = \{ \langle i, j, k \rangle \mid i \in I, j \in J, k \in K, \varphi(i) \leq k, \psi(j) \leq k \}$. Для $S = \langle i, j, k \rangle \in S$ че-

рез $\varphi_S: H_i \rightarrow F_k, \psi_S: G_j \rightarrow F_k$ обозначим эпиморфизмы, индуцированные эпиморфизмами φ и ψ . Для $S = \langle i, j, k \rangle, S' = \langle i', j', k' \rangle \in S$ полагаем $S \leq S' \iff i' \leq i, j' \leq j, k' \leq k$. Если $S \leq S'$, то все естественные эпиморфизмы $H_{i'} \rightarrow H_i, G_{j'} \rightarrow G_j, F_{k'} \rightarrow F_k$ обозначим $\theta_{S',S}$. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

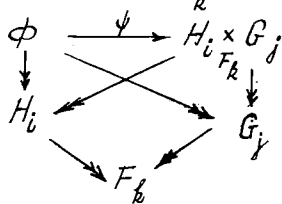


Для $S = \langle i, j, k \rangle \in S$ обозначим через $H_i \times_{F_k} G_j$ прямое произведение групп H_i и G_j над F_k , т. е. подгруппу прямого произведения $H_i \times G_j$, состоящую из всех пар $\langle h, g \rangle$ таких, что $\varphi_S(h) = \psi_S(g)$. Если $S \leq S'$, то эпиморфизмы $\theta_{S',S}$ индуцируют эпиморфизм

$H_{i'} \times_{F_{k'}} G_{j'} \rightarrow H_i \times_{F_k} G_j$, который также будем обозначать $\theta_{S',S}$.
 В силу свойства 2 класса \mathcal{O}_1 , существует группа $\Phi \in \mathcal{O}_1$ и эпиморфизмы ее на H_i и G_j такие, что диаграмма



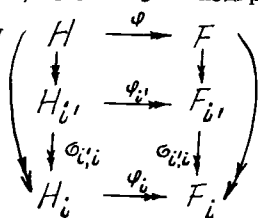
коммутативна. По свойству прямых произведений существует и при том единственный гомоморфизм $\psi: \Phi \rightarrow H_i \times_{F_k} G_j$ такой, что диаграмма



коммутативна. Подгруппа $\psi(\Phi)$ группы $H_i \times_{F_k} G_j$ будет принадлежать классу \mathcal{O} в силу свойства 1. Следовательно, если через T_S обозначим (конечное) семейство всех подгрупп Φ группы $H_i \times_{F_k} G_j$ таких, что $\Phi \in \mathcal{O}$ и образы Φ при естественных проектированиях есть H_i и G_j соответственно, то $T_S \neq \emptyset$ для всех $S \in \mathcal{S}$. Заметим теперь, что если $S \leq S'$ и $\Phi \in T_{S'}$, то $\sigma_{S',S}(\Phi) \in T_S$. Так задается отображение из $T_{S'}$ в T_S , которое обозначим $\sigma_{S',S}^*$. Легко проверить, что если $S \leq S' \leq S''$, то $\sigma_{S'',S}^* = \sigma_{S',S}^* \sigma_{S'',S'}^*$. Следовательно, семейства T_S и отображения $\sigma_{S',S}^*$ задают обратный спектр непустых конечных множеств. Хорошо известно, что обратный предел $\varprojlim_S T_S$ такого спектра непуст.

Пусть $f \in \varprojlim_S T_S \subseteq \prod_{S \in \mathcal{S}} T_S$. Тогда для любого $S \in \mathcal{S}$ $f(S)$ есть подгруппа $H_i \times_{F_k} G_j$ такая, что $f(S) \in \mathcal{O}$ и $f(S) \rightarrow H_i, f(S) \rightarrow G_j$. Далее, если $S \leq S'$, то $\sigma_{S',S} f(S') = f(S)$, и, следовательно, система $\{f(S), \sigma_{S',S} \mid S \in \mathcal{S}, S \leq S'\}$ есть обратный спектр конечных групп и эпиморфизмов. Пусть $F_0 \cong \varprojlim_S f(S)$. Тогда F_0 - проконечная группа, лежащая в $[\mathcal{O}]$; F_0 естественно отождествляется с замкнутой подгруппой группы $H \times_F G (\cong \varprojlim_S H_i \times_{F_k} G_j)$ такой, что проекции отображают F_0 на H и G соответственно. Свойство 2 установлено.

Установим свойство 3. Пусть $F \in [\mathcal{O}]$, H - произвольная проконечная группа и $\varphi: H \rightarrow F$ - эпиморфизм. Пусть $I \cong \{H' \setminus H' - \text{открытый нормальный делитель } H\}$. Для $i \in I$ полагаем $H_i \cong H/i, F_i \cong F/\varphi(i), \varphi_i: H_i \rightarrow F_i$ - индуцированный эпиморфизм; если $i, i' \in I$, то $i \leq i'$ означает, что i' - подгруппа i . Для $i \leq i'$ имеем коммутативную диаграмму



Для $i \in I$ полагаем $T_i \ni \{G \mid G \in \mathcal{O}_i, \varphi_i(G) = F_i\}$.
 По свойству 3 класса \mathcal{O}_i (см. эквивалентное свойство после определения), семейство T_i (очевидно, конечное) непусто. Если $G' \in T_{i'}$, то для $i \leq i'$ выполняется $\sigma_{i',i}(G') \in T_i$. Этим задается отображение $\sigma_{i',i}^* : T_{i'} \rightarrow T_i$. Система $\{T_i, \sigma_{i',i}^* \mid i \in I, i \leq i'\}$ является обратным спектром конечных непустых множеств. Следовательно, обратный предел $\varprojlim_i T_i$ непуст. Если $f \in \varprojlim_i T_i \subseteq \prod_{i \in I} T_i$, то система $\{f(i), \sigma_{i',i} \mid i \in I, i \leq i'\}$ есть обратный спектр конечных групп (из \mathcal{O}_i) и эпиморфизмов. Следовательно, $G_0 \ni \varprojlim_i f(i)$ принадлежит $[\mathcal{O}_i]$; G_0 естественно отождествляется с подгруппой группы $H (\simeq \varprojlim_i H_i)$ такой, что $\varphi(G_0) = G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Любая \mathcal{O}_i -группа является гомоморфным образом подходящей универсальной \mathcal{O}_i -группы.

Нам потребуется

ЛЕММА 5. Для любой \mathcal{O}_i -группы G существует \mathcal{O}_i -группа G' и эпиморфизм $G' \xrightarrow{\varphi} G$ такие, что любая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow \\ F_1 & \longrightarrow & F_0 \end{array}$$

где $F_0, F_1 \in \mathcal{O}_i$, замыкается до коммутативной

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_1 & \longrightarrow & F_0 \end{array}$$

Пусть \mathcal{O}_i^* - такое множество групп из \mathcal{O}_i , что любая группа из \mathcal{O}_i изоморфна одной и только одной группе из \mathcal{O}_i^* . Пусть T - множество всех диаграмм вида

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow \\ F_1 & \longrightarrow & F_0 \end{array}}, \quad F_0, F_1 \in \mathcal{O}_i^*.$$

Множество T вполне упорядочим отношением \leq и определим по трансфинитной индукции \mathcal{O}_i -группы G^t, G_t , эпиморфизмы $\varphi_t : G_t \rightarrow G^t$,

$\psi_t: G^t \rightarrow G$ и для $t_0 \leq t$, эпиморфизмы $\lambda_{t,t_0}: G_t \rightarrow G_{t_0}$ так, что $\{G_t, \lambda_{t,t'} \mid t \in T, t \leq t'\}$ - обратный спектр \mathcal{O} -групп. Полагаем, что для наименьшего элемента t_0 имеет место $G^{t_0} \cong G$; а в качестве G_{t_0} и φ_{t_0} выбираем произвольную \mathcal{O} -группу и эпиморфизм так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_{t_0} & \xrightarrow{\varphi_{t_0}} & G^{t_0} = G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_1 & \longrightarrow & F_0 \end{array}$$

коммулативна для подходящего эпиморфизма $G_{t_0} \rightarrow F_1$. Здесь

$t_0 = \begin{array}{c} G \\ \downarrow \\ F_1 \rightarrow F_0 \end{array}$. По предложению 5 (свойство 2), такая группа и эпиморфизм существуют.

Пусть для всех $t' < t$ уже определены группы $G^{t'}$, $G_{t'}$ для $t' \leq t'' < t$ эпиморфизмы $\lambda_{t'',t'}$ и т.п. Полагаем $G^t \cong \varinjlim_{t' < t} G_{t'}$, $\psi_t: G^t \rightarrow G$ - естественный эпиморфизм. Если

t есть диаграмма $\begin{array}{ccc} & G & \\ & \downarrow & \\ F_1 & \longrightarrow & F_0 \end{array}$,

то выбираем G_t и $\varphi_t: G_t \rightarrow G^t$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G_t & \xrightarrow{\varphi_t} & G^t & \xrightarrow{\psi_t} & G \\ & \searrow & \searrow & \downarrow & \\ & & & F_1 & \longrightarrow & F_0 \end{array}$$

коммулативна и $G_t \in [\mathcal{O}]$. Полагаем $\lambda_{t,t'}$ равным композиции φ_t с естественной проекцией G^t на $G_{t'}$ для $t' < t$. Построение закончено. Если $G' = \varinjlim_t G_t$ и $G' \rightarrow G$ - естественная проекция, то, очевидно, заключение леммы выполнено.

Для доказательства предложения рассмотрим последовательность

$$G \leftarrow G' \leftarrow (G')' \leftarrow \dots \leftarrow G^{(n)} \leftarrow G^{(n+1)} (\cong (G^{(n)})') \leftarrow \dots$$

эпиморфизмов, где штрих означает то же, что в лемме, тогда $G_0 \cong \varinjlim_n G^{(n)}$, очевидно, - \mathcal{O} -универсальная группа, и G_0 про-

ектируется на G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Универсальная \mathcal{O}_f -группа является проективной.

Пользуясь предложением 1, докажем, что универсальная \mathcal{O}_f -группа G является финитно-проективной. Рассмотрим произвольную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ & \downarrow \varphi & \\ F_1 & \xrightarrow{\psi} & F_0, \end{array}$$

где F_1 - конечная группа. Пусть $G_0 \cong \varphi(G) \cong F_0$, $H \cong \psi^{-1}(G_0)$. Так как G_0 - гомоморфный образ G , то $G_0 \in \mathcal{O}_f$. Так как $\psi(H) = G_0$, то, по свойству 3 класса \mathcal{O}_f , в H найдется подгруппа G_1 такая, что $G_1 \in \mathcal{O}_f$ и $\psi(G_1) = G_0$. Имеем коммутативную диаграмму.

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ & \downarrow \varphi & \\ G_1 & \xrightarrow{\psi \uparrow G_1} & G_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_1 & \xrightarrow{\psi} & F_0 \end{array} \quad \varphi$$

По свойству \mathcal{O}_f -универсальности группы G , существует эпиморфизм $\lambda: G \twoheadrightarrow G_1 \leq F_1$ такой, что $\psi\lambda = \varphi$.

В заключение статьи применим два последних предложения для получения некоторой информации о проективных накрытиях конечных сверхразрешимых групп.

Пусть G - конечная сверхразрешимая группа и $|G| = \prod p^{s_p}$. Для $p \in \Pi$ через $f_G^p(p)$ обозначим минимальное число образующих силовой p -подгруппы группы G (если $p \nmid |G|$, то $f_G^p(p) = 0$). Тогда $G \in \mathcal{O}_{f_G^p}$ (см. определение класса \mathcal{O}_f в примерах допустимых классов групп). По предложению 6, существует $\mathcal{O}_{f_G^p}$ -универсальная группа G_0 и эпиморфизм $G_0 \twoheadrightarrow G$. Пусть $\Pi(G) \xrightarrow{\pi} G$ - проективное на-крытие. Так как G_0 проективна, по предложению 7, то существует гомоморфизм $\lambda: G_0 \rightarrow \Pi(G)$ такой, что $\varphi = \pi\lambda$, который, по лемме 4, будет эпиморфизмом, поскольку π - накрытие. Заметим, что силовые p -подгруппы группы G_0 имеют то же минимальное число образующих, что и в группе G (так как G_0 является $\mathcal{O}_{f_G^p}$ -группой). Значит, и в группе $\Pi(G)$ силовые p -подгруппы будут иметь то же минимальное число $f_G^p(p)$ образующих, что и в группе G . Но $\Pi(G)$ - проективная группа, следовательно, ее силовая p -подгруппа $\Pi^p(G)$ - свободная про- p -группа (с $f_G^p(p)$ образующими). Эта подгруппа $\Pi^p(G)$ ото-

бражается на силовскую p -подгруппу группы G , следовательно, ядро этого отображения - силовская p -подгруппа $\mathcal{U}_1^p(G)$ группы $\mathcal{U}_1(G)$ будет замкнутой подгруппой свободной про- p -группы с $f_G(p)$ свободными образующими индекса p^{Sp} . Следовательно, $\mathcal{U}_1^p(G)$ будет свободной про- p -группой с $1 + p^{Sp}(f_G(p) - 1)$ свободными образующими (см. [3, с. 122]). Остается заметить, что $f_G(p)$ - это $\dim_p H^1(G_p, \mathbb{Z}_p)$ (см. [2]).

Подытожим полученные результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если G - конечная сверхразрешимая группа порядка $|G| = \prod_p p^{Sp}$, то группа $\mathcal{U}_1(G)$ есть прямое произведение своих силовских p -подгрупп $\mathcal{U}_1^p(G)$, которые являются свободными про- p -группами с $1 + p^{Sp}(\dim_p H^1(G_p, \mathbb{Z}_p) - 1)$ свободными образующими.

Л и т е р а т у р а

1. Ю. Л. ЕРШОВ, Регулярно замкнутые поля, ДАН СССР, 251, №4 (1980), 783-785.
2. Ж. -П. СЕРР, Когомологии Галуа, М., Мир, 1968.
3. М. ХОЛЛ, Теория групп, М., ИЛ, 1962.
4. K.W.GRUENBERG, Projective profinite groups, J.London Math. Soc., 42, N 1 (1967), 155-165.
5. В. HUPPERT, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math.Z., 60 (1954), 409-434.

Поступило 26 августа 1980 г.