Е. И. Моисеев, М. Могими, О полноте собственных функций задачи Неймана–Трикоми для вырождающегося уравнения смешанного типа, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 12, 1709–1711

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 12, с. 1709–1711

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.6

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА–ТРИКОМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© 2005 г. **Е. И. Моисеев, М. Могими**

В работе доказана полнота в эллиптической части области системы собственных функций задачи Неймана–Трикоми для вырождающегося уравнения смешанного типа. Одновременно доказана полнота системы функций, составленной из суммы функций Лежандра.

1. Постановка задачи. Требуется найти собственные функции задачи Неймана–Трикоми для уравнения

$$|y|^{m+1}u_{xx} + yu_{yy} + qu_y + \mu^2|y|^{m+1}u = 0 \quad \text{в} \quad D = D_- \cup D_+ \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_\gamma = 0, \quad u|_{\gamma_1} = 0, \quad u_x(0,y) = 0, \quad y \in \left[0, \left(\frac{m+2}{2}\right)^{2/(m+2)}\right], \tag{2}$$

условием склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^q u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^q u_y, \tag{3}$$

где $q < 1$, $m > -2$ – действительные числа, области

$$D_+ = \left\{(x,y)|\ x = r\cos\theta,\ \frac{2y^{(m+2)/2}}{m+2} = r\sin\theta\right\}$$

при $0 < r < 1$, $\theta \in (0, \pi/2)$ и

$$D_- = \left\{(x,y)|\ \frac{2(-y)^{(m+2)/2}}{m+2} \le x \le 1 - \frac{2(-y)^{(m+2)/2}}{m+2},\ -\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2/(m+2)} \le y \le 0\right\},$$

а также “нормальная кривая” γ и характеристики γ_1, γ_2, определяемые формулами

$$\gamma = \{(x,y)|\ x^2 + (2y^{(m+2)/2}/(m+2))^2 = 1,\ 0 < x < 1\},$$

$$\gamma_1 = \{(x,y)|\ x = 2(-y)^{(m+2)/2}/(m+2),\ 0 < x < 1/2\},$$

$$\gamma_2 = \{(x,y)|\ 1 - x = 2(-y)^{(m+2)/2}/(m+2),\ 1/2 < x < 1\},$$

такие же, как в работе [1]. Решение u ищется в классе регулярных функций

$$u \in C^0(\overline{D_+ \cup D_-}) \cap C^2(D_+) \cap C^2(D_-)$$

с условием склеивания (3).

2. Полнота собственных функций. С учетом результатов работ [2, 3] находим собственные функции задачи (1)–(3)

$$u_{kj} = \begin{cases} r^{2\beta-1/2} J_{2k+1/2}(\mu_{kj} r) \dfrac{\pi\Gamma(2\beta+2k+1)\exp(2i\pi\beta)}{2\Gamma(-2\beta+2k+1)\sin\pi(-2\beta+2k)} \times \\ \qquad \times \sin^{2\beta}\theta[-\mathrm{P}_{2k}^{-2\beta}(\cos\theta) - \mathrm{P}_{2k}^{-2\beta}(-\cos\theta)], & y > 0, \\ \rho^{2\beta-1/2} J_{2k+1/2}(\mu_{kj}\rho)\,\mathrm{sh}^{2\beta}\,\psi Q_{2k}^{2\beta}(\mathrm{ch}\,\psi), & y < 0, \end{cases} \tag{4}$$

которые отвечают собственным значениям $J_{2k+1/2}(\mu_{kj}) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$

Собственные функции (4) в другой форме при $q = 0$ найдены в работе [4].

Справедлива следующая теорема о полноте системы собственных функций (4) задачи Неймана–Трикоми (1)–(3).

Теорема 1. *Если* $q < 1$, $m + 2q > 0$, *выполняются условия*

$$\int\limits_{D_+} \frac{|f(x,y)|(\sin\theta)^{(m+q)/(m+2)}}{r^{1/(m+2)}(\cos\theta)^{(m+2q)/(2(m+2))}}\,dx\,dy < \infty, \tag{5}$$

$$\int\limits_{D_+} y^{(m+q)/2} f(x,y) r^{2\beta-1/2} J_{2k+1/2}(r\mu_{kj}) w_k(\theta)\,dx\,dy = 0 \quad \forall k = 0,1,\ldots, \quad \forall j = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

где

$$w_k(\theta) = \sin^{2\beta}\theta[\mathrm{P}_{2k}^{-2\beta}(\cos\theta) + \mathrm{P}_{2k}^{-2\beta}(-\cos\theta)], \tag{7}$$

то $f(x,y) = 0$ *п.в. в* D_+.

Замечание 1. Если $f \in L_2(D_+)$, то условие (5) выполняется.

3. Полнота функций Лежандра. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

Теорема 2. *Если* $\beta \in (0, 1/4)$, $f(\theta)/(\cos\theta)^\alpha \in L_1(0,\pi/2)$, $\alpha = 1/2 - 2\beta$ *и*

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\theta) w_k(\theta)\,d\theta = 0, \quad k = 0,1,\ldots,$$

где функция $w_k(\theta)$ *определена формулой (7), то* $f(\theta) = 0$ *для п.в.* $\theta \in (0,\pi/2)$.

Замечание 2. Если $f \in L_2(0,\pi/2)$ и $0 < \alpha < 1$, то $f(\theta)/(\cos\theta)^\alpha \in L_1(0,\pi/2)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняется равенство (6). Тогда

$$0 = \int\limits_0^1 r^{1/(m+2)}\sqrt{r} J_{2k+1/2}(r\mu_{kj}) \int\limits_0^{\pi/2} \frac{f(r,\theta)(\sin\theta)^{(m+q)/(m+2)}}{(\sin\theta)^{m/(m+2)}} w_k(\theta)\,d\theta\,dr.$$

По теореме Юнга для ортонормированной системы из функций Бесселя [5, с. 576] достаточно доказать, что конечен интеграл

$$J \equiv \int\limits_0^1 r^{1/(m+2)} \left| \int\limits_0^{\pi/2} \frac{f(r,\theta)(\sin\theta)^{(m+q)/(m+2)}}{(\sin\theta)^{m/(m+2)}} w_k(\theta)\,d\theta \right| dr.$$

Используя ограниченность функции $w_k(\theta)$ и равенство для якобиана

$$|D(x,y)/D(r,\theta)| = r^{2/(m+2)}/(2^{-1}(m+2)\sin\theta)^{m/(m+2)}$$

имеем

$$J \le C \int\limits_{D_+} \frac{|f(r,\theta)|(\sin\theta)^{(m+q)/(m+2)}}{r^{1/(m+2)}}\,dx\,dy \le C \int\limits_{D_+} \frac{|f(r,\theta)|(\sin\theta)^{(m+q)/(m+2)}}{r^{1/(m+2)}(\cos\theta)^{(m+2q)/(2(m+2))}}\,dx\,dy < \infty.$$

Поэтому по теореме Юнга

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(r,\theta)(\sin\theta)^{q/(m+2)} w_k(\theta)\,d\theta = 0$$

для п.в. $r \in (0,1)$ и $\forall k = 0,1,\ldots$

Теперь для доказательства равенства $f(r,\theta) = 0$, согласно теореме 2, достаточно доказать, что $f(r,\theta)(\sin\theta)^{q/(m+2)}/(\cos\theta)^{(m+2q)/(2(m+2))} \in L_1(0,\pi/2)$. По предположению теоремы выполняется неравенство (5), поэтому имеем

$$\int\limits_0^1 r^{1/(m+2)} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{|f(r,\theta)|(\sin\theta)^{q/(m+2)}}{(\cos\theta)^{(m+2q)/(2(m+2))}}\,d\theta\,dr < \infty.$$

Тогда по теореме Фубини для п.в. $r \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{|f(r,\theta)|(\sin\theta)^{q/(m+2)}}{(\cos\theta)^{(m+2q)/(2(m+2))}}\,d\theta < \infty,$$

значит, имеет место включение

$$\frac{f(r,\theta)(\sin\theta)^{q/(m+2)}}{(\cos\theta)^{(m+2q)/(2(m+2))}} \in L_1(0,\pi/2) \quad \text{для п.в.} \quad r \in (0,1).$$

Поэтому, согласно теореме 2, равенство $f(r,\theta) = 0$ выполняется для п.в. $r \in (0,1)$ и $\theta \in (0,\pi/2)$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 из работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е.И., Могими М.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1387–1391.
2. *Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 94–103.
3. *Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1229–1237.
4. *Кучкарова А.Н.* Экстремальные и спектральные свойства решений задач Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2002.
5. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1948.
6. *Моисеев Е.И.* // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 795–798.
7. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1965.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
08.06.2005 г.