А. Б. Жеглов, О кольцах коммутирующих дифференциальных операторов, *Алгебра и анализ*, 2013, том 25, выпуск 5, 86–145

Алгебра и анализ
Том 25 (2013), №5

О КОЛЬЦАХ КОММУТИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© А. Б. ЖЕГЛОВ

Мы предлагаем естественное обобщение классификации коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов, данной в работах Кричевера, Мамфорда, Муласе, и классифицируем коммутативные кольца операторов в пополненном кольце дифференциальных операторов в частных производных от двух переменных (удовлетворяющие некоторым слабым условиям) в терминах обобщенных геометрических данных Паршина. Классификация использует обобщение теории М. Сато и является конструктивной в обе стороны.

§1. Введение

Проблема классификации коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов возникла еще в работах Валленберга [41] и Шура [39] и затем изучалась многими авторами и в различных контекстах, например, в работах Берчнала–Чаунди [16], Гельфанда–Дикого [3], Кричевера [7], Дринфельда [4], Мамфорда [30], Сигала–Вильсона [38], Вердье [40] и Муласе [27].

Напомним, что коммутативные алгебры обыкновенных дифференциальных операторов соответствуют так называемым спектральным данным. Так, если имеется кольцо коммутирующих дифференциальных операторов, порожденное над полем k двумя обыкновенными дифференциальными операторами

$$P_1 = \partial_x^n + u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \ldots + u_0(x), \quad P_2 = \partial_x^m + v_{m-1}(x)\partial_x^{m-1} + \ldots + v_0(x),$$

Ключевые слова: коммутирующие дифференциальные операторы, двумерные локальные поля, изоспектральные деформации, теория КП.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-01-00145-а), программы поддержки ведущих научных школ (НШ №1410.2012.1), гранта ФЦП ,,Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ №14.740.11.0794 и гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО ,,Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова“ по договору №11.G34.31.0054.

то, как это было замечено еще Берчналлом и Чаунди в [16], существует ненулевой полином $Q(\lambda, \mu)$ такой, что $Q(P_1, P_2) = 0$. Пополнение C кривой $Q(\lambda, \mu) = 0$ называется *спектральной кривой*. В общей точке (λ, μ) пространство собственных функций ψ (функции Бейкера–Ахиезера):

$$P_1\psi = \lambda\psi, \quad P_2\psi = \mu\psi$$

имеет размерность r, и эти функции являются сечениями пучка без кручения $\mathcal{F}$ ранга r на спектральной кривой (для более точных утверждений и дальнейших деталей см. работы процитированные выше). Пополнение кривой $Q(\lambda, \mu) = 0$, полученное добавлением неособой точки P (не обязательно проективное замыкание в $\mathbb{P}^2$!), и тройка $(C, P, \mathcal{F})$ являются частью так называемых *спектральных данных*.

Обобщая этот результат Берчналла и Чаунди, Кричевер [7, 8] дал геометрическую классификацию алгебр „общего положения“ ранга r в терминах спектральных данных. Дринфельд [4] предложил алгебро-геометрическую переформулировку результатов Кричевера, которая была впоследствии усовершенствована Мамфордом [30]. Позднее Вердье и Муласе дали классификацию всех алгебр ранга r. Классификация Муласе была естественным усовершенствованием теорем Кричевера и Мамфорда, Вердье использовал другие идеи и предложил классификацию в терминах параболических структур и связностей векторных расслоений на кривых. Важно отметить, что конструкции Кричевера, Мамфорда и Муласе являются конструктивными в обе стороны, т.е. по данному кольцу коммутирующих операторов строится набор геометрических данных, и наоборот. Это дает возможность использовать их метод для построения примеров коммутирующих операторов.

После этих работ было много попыток классифицировать алгебры коммутирующих дифференциальных операторов от нескольких переменных. Существует несколько подходов к этой проблеме (см., например, обзор [34] и ссылки в нем). Один из методов основан на подходе Накаяшики (см. [32, 9, 35] и ссылки в этих работах), другой метод использует идеи из дифференциальной алгебры (см. [34]). Тем не менее эти методы не привели пока к возможности классификации коммутирующих алгебр, а подход Накаяшики приводит к конструкции колец коммутирующих дифференциальных операторов с матричными (размерности больше 1) коэффициентами.

Классификацию обыкновенных дифференциальных операторов можно рассматривать как часть теории уравнения КП, которая связывает между собой несколько математических объектов: решения уравнения КП (или иерархии КП), геометрические (спектральные) данные, кольца обыкновенных дифференциальных операторов, точки грассманиана Сато. В работах [33, 11, 10, 21, 22, 43] были развиты некоторые части теории, естественно обобщающей и аналогичной теории КП, в размерности два: так, были предложены многомерные аналоги иерархии КП, геометрических спектральных данных, якобианов кривых.

Решение проблемы классификации колец коммутирующих операторов, которое мы предлагаем в настоящей статье, использует наш оригинальный подход, основанный на некоторых идеях Паршина (см. [33, 11]) и работах, процитированных выше, и является естественным обобщением теорем Кричевера, Мамфорда и Муласе, и также конструктивно в обе стороны. С другой стороны, оно обобщает подход М.Сато в размерности один. Методы, используемые в этой работе, могут быть перенесены и в высшие размерности, и мы планируем описать общий случай в другой работе. Причина, по которой мы сначала решили изложить случай размерности два, заключается в том, что в этом случае имеются уже развитые части обобщенной теории КП, такие как теория пунктированных лент (см. [21, 22]) и теория модифицированных иерархий КП Паршина (см. [11, 43]), и которые существуют пока только в размерности два.

В результате мы получаем классификацию коммутативных подалгебр (удовлетворяющих некоторым слабым условиям, см. теоремы 3.2 и 3.4) в пополненном кольце дифференциальных операторов $\hat{D}$ (см. п. 2.1.5), которое содержит кольцо дифференциальных операторов в частных производных $k[[x_1, x_2]][\partial_{x_1}, \partial_{x_2}]$, где k — поле характеристики нуль, в качестве плотного подкольца. Среди операторов кольца $\hat{D}$ есть и все обычные дифференциальные операторы в частных производных, и также разностные операторы. Все эти операторы также линейны и действуют на кольце ростков аналитических функций.

В качестве частного случая такие коммутативные подкольца описывают все коммутативные подкольца обычных дифференциальных операторов в частных производных (удовлетворяющих тем же слабым условиям, см. теорему 3.4) в силу следующего факта о „чистоте“ (см. предложение 3.1): любое коммутативное подкольцо в $\hat{D}$, содержащее такое кольцо дифференциальных операторов в частных производных, само является подкольцом обычных дифференциальных операторов в частных производных. Таким образом, мы получаем в некотором смысле также классификацию коммутативных подколец дифференциальных операторов в частных производных, хотя в этом случае пока неясно, как описать дополнительные условия на геометрические данные, соответствующие кольцам обычных, а не пополненных дифференциальных операторов (см. замечание 3.11).

При этом хочется отметить, что кольцо $\hat{D}$ естественно возникает в рамках нашего подхода к обобщению классической теории КП в высшие размерности (ср. замечание 4.1). В размерности один нет необходимости рассматривать пополнение кольца дифференциальных операторов. Еще отметим, что, как и в одномерном случае, можно ввести понятие формальной функции Бейкера–Ахиезера (ср. [5, введение]), которое в случае колец обычных дифференциальных операторов в частных производных, удовлетворяющих некоторым условиям, является аналогом функции Бейкера–Ахиезера из работы [7] (см. замечание 3.12). Явная формула для этой формальной функции использует локальные параметры в точке P геометрических данных (см. определение 3.10). Отметим, что эти данные не фигурировали в более ранних подходах.

Описание классификации, предложенной в этой статье, разбито на три шага. Сначала мы сводим проблему к описанию колец, удовлетворяющих некоторым специальным свойствам (1-квази-эллиптические кольца, см. определение 2.18). Затем мы классифицируем больший класс α-квазиэллиптических колец: а именно, все такие кольца в пополненном кольце дифференциальных операторов от двух переменных (см. п. 2.1.5, определение 2.18). Мы классифицируем их в терминах пар подпространств (обобщенные пары Шура, см. определения 3.2, 3.12). Эта классификация использует обобщение теории М. Сато (см. [36, 37]) и конструктивна в обе стороны. После этого мы классифицируем обобщенные пары Шура в терминах обобщенных геометрических данных (см. определение 3.10). С одной стороны, эти данные являются естественным обобщением геометрических данных в одномерном случае, с другой стороны, они являются небольшой модификацией геометрических данных Паршина [33] и Осипова [10]. Изложение двух последних шагов нашей классификации похоже на изложение соответствующих результатов в размерности один в работе Муласе [27]. В частности, в качестве последнего шага классификации мы вводим две категории: категорию пар Шура (определение 3.14) и категорию геометрических данных (определение 3.11) и доказываем их антиэквивалентность. Эти категории являются естественными обобщениями соответствующих категорий из [27].

Содержание работы таково. В гл. 2 мы напоминаем некоторые известные факты о кольцах дифференциальных операторов в частных производных, вводим новые обозначения и развиваем обобщение теории М. Сато. В гл. 3 мы описываем три шага классификации, упомянутые выше. В гл. 4 мы анонсируем несколько примеров (опуская все вычисления, которые мы планируем включить в [24]) и объясняем как уже известные примеры коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных (такие как операторы, соответствующие квантовым системам Калоджеро–Мозера или кольцам квази-инвариантов, см. [17, 18, 15, 13, 19]) укладываются в предложенную классификацию. В конце этой главы мы доказываем теорему об алгебро-геометрических свойствах максимальных коммутативных подколец дифференциальных операторов от двух переменных; в частности, мы показываем, что все такие кольца должны быть Коэно–Маколеевыми.

Некоторые приложения конструкций, описанных в этой статье, к теории пунктированных лент (см. [21, 22]) и к модифицированным иерархиям Паршина-КП (см. [11, 43]), а также некоторые примеры коммутирующих операторов должны появиться в отдельной работе (см. [24]), частью которой является недавний препринт [23] (см. также работу [5] для сравнения с подходом через модули Бейкера–Ахиезера).

Благодарности. Я благодарен Херберту Курке за его важные и полезные замечания, участие и предложения по улучшению изложения этой работы. Я также признателен Денису Осипову за многочисленные стимулирующие обсуждения и полезные замечания. Я хотел бы также поблагодарить Обервольфахский математический институт, где были сделаны некоторые усовершенствования в этой работе, за отличную рабочую обстановку.

§2. Аналоги теории Сато в размерности два

2.1. Предварительные замечания общего характера.

2.1.1. Общие замечания и обозначения. Пусть R — коммутативная k-алгебра, где k — поле характеристики нуль.

В этих обозначениях обычным образом определяется фильтрованное кольцо $D(R)$ k-линейных дифференциальных операторов и R-модуль $\mathrm{Der}(R)$ дифференцирований:

$$D_0(R) \subset D_1(R) \subset D_2(R) \subset \dots, \quad D_i(R)D_j(R) \subset D_{i+j}(R), \quad \mathrm{Der}(R) \subset D_1(R).$$

$D_i(R)$ определяются по индукции как под-R-бимодули кольца $\mathrm{End}_k(R)$; по определению $D_0(R) = \mathrm{End}_R(R) = R$,

$$D_{i+1}(R) = \{P \in \mathrm{End}_k(R) | \text{ т. что для всех } f \in R [P, f] \in \mathrm{Der}(R)\}.$$

Также обычным образом определяется градуированное кольцо

$$gr(D(R)) = \oplus_{i=0}^{\infty} D_i(R)/D_{i-1}(R) \quad (D_{-1}(R) = 0),$$

и для $P \in D_i(R)$ определен *главный символ* $\sigma_i(P) = P \mod D_{i-1}(R)$. Для $P \in D_i$, $Q \in D_j$ имеем $\sigma_i(P)\sigma_j(Q) = \sigma_{i+j}(PQ)$, $[P, Q] \in D_{i+j-1}$; поэтому

$gr(D(R))$ — коммутативная градуированная R-алгебра со скобкой Пуассона

$$\{\sigma_i(P), \sigma_j(Q)\} = \sigma_{i+j-1}([P,Q])$$

с обычными свойствами.

2.1.2. Координаты.

Определение 2.1. Будем говорить, что в R определена система координат $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ если

(1) отображение

$$\mathrm{Der}_k(R) \to R^n, \quad D \mapsto (D(x_1), \dots, D(x_n))$$

биективно.

(2) $\cap_{D \in \mathrm{Der}_k(R)} \mathrm{Ker}(D) = k$.

В этом случае существуют $\partial_1, \dots, \partial_n \in \mathrm{Der}_k(R)$ такие, что

$$\partial_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \mathrm{Ker}(\partial_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(\partial_n) = k.$$

Тогда $\mathrm{Der}(R)$ — свободный R-модуль с порождающими $\partial_1, \dots, \partial_n$, и $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Легко проверить (по индукции по степени), что

$$gr(D(R)) \simeq R[\xi_1, \dots, \xi_n], \text{ где } \xi_i \mapsto \partial_i \mod D_0(R) \in gr_1(D(R))$$

и что для $P \in D_i(R)$, $Q \in D_j(R)$ выполняется равенство

$$\{\sigma_i(P), \sigma_j(Q)\} = \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \sigma_i(P)}{\partial \xi_v} \partial_v(\sigma_j(Q)) - \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \sigma_j(Q)}{\partial \xi_v} \partial_v(\sigma_i(P))$$

(где ∂_v продолжается на кольцо $R[\xi_1, \dots, \xi_n]$ по правилу $\partial_v(\xi_l) = 0$).

Система $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ называется *канонической системой координат.* Типичный пример кольца с системой координат — кольцо $k[x_1, \dots, x_n]$ или $k[[x_1, \dots, x_n]]$, где в последнем случае мы рассматриваем кольцо *непрерывных* дифференциальных операторов и пространство *непрерывных* дифференцирований относительно обычной топологии на $k[[x_1, \dots, x_n]]$, заданной максимальным идеалом. Кольцо $k[[x_1, \dots, x_n]]$ будет основным примером для большей части этой статьи.

2.1.3. Замена координат. Если $(y_1, \dots, y_n)$ — другая система координат, то определен новый базис $(\partial_1', \dots, \partial_n')$ алгебры $\mathrm{Der}_k(R)$, и замена координат задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \partial_1(y_1) & \dots & \partial_n(y_1) \\ \partial_1(y_2) & \dots & \partial_n(y_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(y_n) & \dots & \partial_n(y_n) \end{pmatrix} = M,$$

где $(\partial'_1, \dots, \partial'_n)M = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $(\xi'_1, \dots, \xi'_n)M = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Определение 2.2. Если фиксирована система координат $(x_1, \dots x_n)$, то помимо обычной функции порядка

$$\mathbf{ord}(P) = \inf\{n | P \in D_n(R)\}$$

и обычной фильтрации определена более тонкая Γ-фильтрация, где $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ — упорядоченная группа, снабженная анти-лексикографическим порядком.

Каждый элемент $P \in D(R)$ может быть записан как конечная сумма

$$P = \sum_{finite} p_{i_1 \dots i_n} \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n},$$

и мономы $p_{i_1 \dots i_n} \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n}$ с $p_{i_1 \dots i_n} \neq 0$ называются *членами* P.

Старший член — это член $p_{m_1 \dots m_n} \partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n} \neq 0$, где $(m_1, \dots, m_n) > (i_1, \dots, i_n)$ для всякого другого члена.

Определение 2.3. Элемент $(m_1, \dots, m_n) \in \Gamma$ называется Γ-порядком $\mathrm{ord}_\Gamma(P)$ и член $p_{m_1 \dots m_n} \partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n}$ называется *старшим членом* $\mathrm{HT}(P)$.

Очевидно, что $\mathrm{ord}_\Gamma(PQ) = \mathrm{ord}_\Gamma(P) + \mathrm{ord}_\Gamma(Q)$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(P + Q) \leqslant \max\{\mathrm{ord}_\Gamma(P), \mathrm{ord}_\Gamma(Q)\}$, причем равенство выполнено, если $\mathrm{ord}_\Gamma(P) \neq \mathrm{ord}_\Gamma(Q)$. Также $\mathrm{HT}(PQ) = \mathrm{HT}(P)\,\mathrm{HT}(Q)$ и $\mathrm{HT}(P+Q) = \mathrm{HT}(P)$, если $\mathrm{ord}_\Gamma(P) > \mathrm{ord}_\Gamma(Q)$.

2.1.4. Расширения кольца $D(R)$. Существует несколько стандартных способов расширить кольцо $D = D(R)$ до кольца $E \supset D$ (см. ниже), при этом в одном случае фильтрация $(D_n)_{n \geqslant 0}$ продолжается до фильтрации $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, и $gr(E)$ — коммутативное кольцо, причем $P \in E$ обратим в E, если и только если $\sigma_{\mathbf{ord}(P)}(P)$ обратим в $gr(E)$ (формальные микро-дифференциальные операторы), в другом случае продолжается Γ-фильтрация и отображение старшего члена (определенное после выбора системы координат), и выполняется следующее свойство: P обратим E, если и только если коэффициент у $\mathrm{HT}(P)$ обратим в R (*формальные псевдо-дифференциальные операторы*).

Мы будем работать с формальными псевдо-дифференциальными операторами: $E = R((\partial_1^{-1})) \dots ((\partial_n^{-1}))$ (ср. [11]).

Это кольцо определяется последовательно, начиная с определения кольца $A((\partial^{-1}))$, где A — ассоциативное, не обязательно коммутативное кольцо с дифференцированием d. Кольцо $A((\partial^{-1}))$ определяется как левый

A-модуль всех формальных выражений вида

$$L = \sum_{i > -\infty}^{n} a_i \partial^i, \quad a_i \in A.$$

Умножение определяется по правилу Лейбница:

$$\left(\sum_i a_i \partial^i\right)\left(\sum_j b_j \partial^j\right) = \sum_{i,j,k \geqslant 0} C_i^k a_i d^k(b_j) \partial^{i+j-k}.$$

Здесь мы полагаем

$$C_i^k = \frac{i(i-1)\dots(i-k+1)}{k(k-1)\dots 1}, \text{ если } k > 0,\ C_i^0 = 1.$$

Легко проверить, что $A((\partial^{-1}))$ будет опять ассоциативным кольцом.

Всякий элемент $P \in E$ можно формально записать как сумму $P = \sum_{\text{ß} \in \Gamma} r_{\text{ß}} \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n}$ (здесь некоторые коэффициенты $r_{\text{ß}}$ могут быть равны нулю).

По определению существует старший член $\mathrm{HT}(P) = r_{m_1 \dots m_n} \partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n}$, где $r_{m_1 \dots m_n} \neq 0$, и $(m_1, \dots, m_n) \geqslant (i_1, \dots, i_n)$, если $r_{i_1, \dots, i_n} \neq 0$. У него те же свойства, что и у старшего члена, определенного в $D(R)$. Определим функцию порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (m_1, \dots, m_n)$.

Замечание 2.1. Если $P \in E$ и если $\mathrm{HT}(P) = r_{m_1 \dots m_n} \partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n}$, то $r_{m_1 \dots m_n}$ обратим в R, если и только если P обратим в E.

Определение 2.4. Пусть R — кольцо с системой координат $(x_1, \dots, x_n)$, пусть $M = (x_1 R + \ldots + x_n R)$ — идеал и $R/M = k$. Тогда определен правый идеал $x_1 E + \ldots + x_n E \subset E$ и правый E-модуль $E/(x_1 E + \ldots + x_n E) \simeq k((z_1)) \dots ((z_n))$ (изоморфизм k-векторных пространств), что определяет структуру правого E-модуля на $V = k((z_1)) \dots ((z_n))$. Кроме того, имеется изоморфизм $gr(R) \simeq k[x_1, \dots, x_n]$ (здесь фильтрация в R определена, как обычно, степенями идеала M), и мы будем обозначать через $\bar{a}$ образ элемента $a \in R$ в $gr(R)$.

Обозначим через M_i идеал $x_i R$ и для $a \in R$ положим

$$\mathrm{ord}_{M_i}(a) = \sup\{n | a \in M_i^n\}, \quad \mathrm{ord}_M(a) = \sup\{n | a \in M^n\}.$$

По аналогии с определениями 2.2, 2.3 в кольце $gr(R)$ можно определить более тонкую Γ-фильтрацию, где $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ упорядочена, как и прежде, анти-лексикографически, и функцию Γ-порядка ord_Γ: если

$$\bar{r} = \sum \bar{r}_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \in gr(R),$$

то

$$\mathrm{ord}_\Gamma(\bar{r}) = \min\{(i_1, \dots, i_n) \in \Gamma | \bar{r}_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}.$$

Теперь для $r \in R$ положим

$$\mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}(r) = \mathrm{ord}_\Gamma(\bar{r}),$$

и для $P \in E$ положим

$$\mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}(P) = \min_{ß\in\Gamma}\{(\mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}(r_ß) \in \Gamma\}.$$

В дальнейшем мы будем писать $z^ß$ $(\partial^ß)$ вместо $z_1^{i_1}\dots z_n^{i_n}$ $(\partial_1^{i_1}\dots\partial_n^{i_n})$ для мульти-индекса $ß = (i_1,\dots,i_n)$. Для $P \in E$ обозначим через $P(0)$ образ P по модулю M в V.

Заметим, что $\mathrm{ord}_M, \mathrm{ord}_{M_i}, \mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}$ — (псевдо)-нормирования.

Предложение 2.1. *Пусть $W_0 = k[z_1^{-1},\dots,z_n^{-1}] \subset V$ — линейное пространство. Тогда $D \subset E$ можно описать следующим образом*:

$$D = \{A \in E \mid W_0 A \subseteq W_0\}.$$

Доказательство. Очевидно, что $D \subset \{A \in E | W_0 A \subset W_0\}$. Для элемента $A \in E$ обозначим через A_+ сумму всех мономов в A, принадлежащих D, и положим $A_- = A - A_+$. Если $A \in E$ и $A \notin D$, то $A_- \neq 0$. В этом случае имеем

$$0 \neq z^{-\mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}(A_-)}A_- = \partial^{\mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}(A_-)}(A_-)(0) \notin W_0,$$

где равенство имеет место, так как $\partial^ß(A_-)(0) = 0$ при $ß < \mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}(A_-)$. Поскольку $z^{-\mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}(A_-)}A_+ \in W_0$, имеем $z^{-\mathrm{ord}_{M_1,\dots,M_n}(A_-)}A \notin W_0$. Таким образом, если A сохраняет W_0, A должно быть в D. □

2.1.5. Пополнение. Рассмотрим полное кольцо R с M-адической топологией (M — идеал в R): $R = \varprojlim_{n\geqslant 0}(R/M^n)$.

Пусть $N \subset D$ — подалгебра; определим для всякой последовательности $(P_n \in N)_{n\in\mathbb{N}}$ такой, что $P_n(R)$ равномерно сходится в R (т.е. для любого $k > 0$ существует $N > 0$ такое, что $P_n(R) \subseteq M^k$ для $n \geqslant N$), k-линейный оператор $P : R \to R$

$$P(f) = \varinjlim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{n} P_v(f), \quad P := \sum_n P_n$$

(он может не быть дифференциальным оператором).

Обозначим через $\hat{N}$ алгебру таких операторов. Легко проверить, что она ассоциативна.

Определим также

$$\hat{D}_N = \text{ алгебра, порожденная } \hat{N} \text{ и } D.$$

Если $(x_1, \dots, x_n)$ — система координат и $M = x_1 R + \dots + x_n R$, определим алгебру $\hat{D}_m := \hat{D}_N$, где $N = R[\partial_1, \dots, \partial_m]$.

Оператор P в $\hat{D}_m$ однозначно определяется по последовательности $p_{i_1 \dots i_m} = P(x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} / i_1! \dots i_m!)$. Элементы из $\hat{D}_m$ соответствуют в точности тем последовательностям $(p_{ß} = p_{i_1 \dots i_m})_{ß \in \mathbb{N}^m}$, которые сходятся к нулю в M-адической топологии при $|ß| = i_1 + \dots + i_m \to \infty$. А именно,

$$(p_{ß}) \longleftrightarrow P = \sum_{ß} p_{ß} \partial_1^{i_1} \dots \partial_m^{i_m} = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{|ß| \leqslant n} p_{ß} \partial_1^{i_1} \dots \partial_m^{i_m} \right).$$

Теперь определим

$$\hat{D}_{m,n-m} = \text{ алгебра, порожденная } \hat{D}_m, \text{ и } D = \hat{D}_m[\partial_{m+1}, \dots, \partial_n]$$

и

$$\begin{aligned} \hat{E}_{m,n-m} &= \hat{D}_m((\partial_{m+1}^{-1})) \dots ((\partial_n^{-1})) \supset R[\partial_1, \dots, \partial_m]((\partial_{m+1}^{-1})) \dots ((\partial_n^{-1})) \\ &= E_{m,n-m}. \end{aligned}$$

Пример 2.1. В этом примере дадим другое описание колец $\hat{D}_m, \hat{D}_{m,n-m}$ в случае, который будет нас интересовать в этой статье. А именно, пусть $R = k[[x_1, x_2]]$, система координат в R — (x_1, x_2), и $M = (x_1, x_2)$ — максимальный идеал. Определим множество

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 = \Big\{ a = \sum_{q \geqslant 0} a_q \partial_1^q \mid a_q \in k[[x_1, x_2]] \\ \text{и для любого } N \in \mathbb{N} \text{ существует } n \in \mathbb{N} \text{ такое, что} \\ \operatorname{ord}_M(a_m) > N \text{ для всех } m \geqslant n \Big\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Определим

$$\hat{D}_{1,1} = \hat{D}_1[\partial_2], \quad \hat{E}_{1,1} = \hat{D}_1((\partial_2^{-1})).$$

Лемма 2.1. *Множества $\hat{D}_1 \subset \hat{D}_{1,1} \subset \hat{E}_{1,1}$ — ассоциативные кольца с единицей.*

Доказательство. Очевидно, что $\hat{D}_1$ — абелева группа. Умножение двух элементов определено согласно следующей формуле: для двух рядов $A = \sum_{q \geqslant 0} a_q \partial_1^q$, $B = \sum_{q \geqslant 0} b_q \partial_1^q$

$$AB = \sum_{q \geqslant 0} g_q \partial_1^q, \text{ где } g_q = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{l \geqslant 0} C_k^l a_k \partial_1^l (b_{q+l-k}),$$

где мы полагаем $b_i = 0$ при $i < 0$. Каждый коэффициент g_q корректно определен, поскольку для каждого N существует лишь конечное число коэффициентов a_k с $\mathrm{ord}_M(a_k) < N$ и для каждого k существует лишь конечное число коэффициентов $C_k^l \neq 0$.

Для любого N существует n такое, что $\mathrm{ord}_M(a_m) > N$ для любого $m \geqslant n$, и существует n_1 такое, что $\mathrm{ord}_M(b_m) > N + n$ для любого $m \geqslant n_1$. Тогда для всякого $q \geqslant n_1 + n$ и всякого $k < n$, $0 \leqslant l \leqslant k$ имеем $\mathrm{ord}_M(\partial_1^l(b_{q+l-k})) \geqslant \mathrm{ord}_M(b_{q+l-k}) - l > N$. Следовательно, $\mathrm{ord}_M(g_q) > N$ для любого $q \geqslant n_1 + n$. Таким образом, умножение в $\hat{D}_1$ корректно определено. Дистрибутивность очевидна, а ассоциативность проверяется с помощью тех же аргументов, что и в [31, гл. III, §11].

Доказательство для $\hat{D}_{1,1}, \hat{E}_{1,1}$ такое же. $\square$

Действие $E_{m,n-m}$ на $V = k((z_1))\dots((z_n))$ не продолжается до действия $\hat{E}_{m,n-m}$ на V, но частично его все же можно продолжить. Чтобы объяснить это, введем еще одно понятие.

Определение 2.5. Члены ряда $v = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} v_{i_1\dots i_n} z_1^{i_1}\dots z_n^{i_n}$ — это элементы $v_{i_1\dots i_n} z_1^{i_1}\dots z_n^{i_n}$ с $v_{i_1\dots i_n} \neq 0$, мы упорядочиваем их с помощью антилексикографического порядка на Γ, $\mathrm{ord}_\Gamma(z_1^{i_1}\dots z_n^{i_n}) = (i_1,\dots,i_n)$. У каждого ряда v есть *младший член* $\mathrm{LT}(v)$ (член наименьшего порядка), чей порядок называется Γ-порядком v, $\mathrm{ord}_\Gamma(v)$.

Заметим, что ord_Γ — дискретное нормирование ранга n на V. Для действия E на V имеем неравенство

$$\mathrm{ord}_\Gamma(vP) \geqslant \mathrm{ord}_\Gamma(v) - \mathrm{ord}_\Gamma(P),$$

где равенство выполняется, если и только если $\mathrm{HT}(P)$ — обратимый элемент в R.

Напомним еще одно определение из теории многомерных локальных полей.

Определение 2.6. Начиная с дискретной топологии на поле k, определим топологию на пространстве V по индукции следующим образом.

Если топология на $F = k((z_1))\dots((z_{k-1}))$ определена, рассмотрим следующую топологию на $K = F((z_k))$. Для последовательности окрестностей нуля $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ в F, $U_i = F$ при $i \gg 0$, положим $U_{\{U_i\}} = \{\sum a_i z_k^i : a_i \in U_i\}$. Тогда все множества $U_{\{U_i\}}$ образуют базу открытых окрестностей нуля в $F((z_k))$. В частности, последовательность $u^{(n)} = \sum a_i^{(n)} z_k^i$ стремится к нулю, если и только если существует целое m такое, что $u^{(n)} \in z_k^m F[[z_k]]$ для всех n и последовательности $a_i^{(n)}$ стремятся к нулю для каждого i.

Теперь рассмотрим следующие замкнутые подпространства в V:

$$W_{m,n-m} = k[z_1^{-1}, \dots, z_m^{-1}]((z_{m+1}))\dots((z_n)).$$

Легко проверить, что действие $E_{m,n-m}$ на $W_{m,n-m}$ продолжается до действия $\hat{E}_{m,n-m}$ аналогичным образом с помощью изоморфизма $\hat{E}_{m,n-m}/M\hat{E}_{m,n-m} \simeq k[z_1^{-1}, \dots, z_m^{-1}]((z_{m+1}))\dots((z_n))$. В то же время действие $\hat{E}_{m,n-m}$ на, скажем, ∂_1^{-1} (если $m \geqslant 1$) не определено корректно.

Замечание 2.2. Заметим, что элементы кольца $\hat{D}_{m,n-m}$ можно рассматривать как „обобщенные“ дифференциальные операторы, поскольку они тоже действуют на элементах R, как и обычные дифференциальные операторы.

Отметим также, что в кольце $\hat{D}_{m,n-m}$ есть делители нуля (см. примеры в [24] и в последнем параграфе).

Предложение 2.2. *Имеем* $\hat{D}_{m,n-m} = \{A \in \hat{E}_{m,n-m} | W_0 A \subset W_0\}$ *(здесь* $W_0 = k[z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}] \subset W_{m,n-m}$*).*

Доказательство такое же, как и доказательство предложения 2.1.

2.1.6. Дальнейшие замечания. В этом пункте сделаем несколько замечаний о наших определениях колец и пространств, приведенных выше.

В случае размерности один, т.е. для кольца обыкновенных дифференциальных операторов D и кольца псевдо-дифференциальных операторов E, классическая теория КП имеет дело с разложением $E = E_+ \oplus E_-$, где $E_+ = D$. Это разложение используется, в частности, для определения иерархии КП.

В работе [11] Паршин ввел аналог классической системы КП в высших размерностях, используя обобщение этого разложения. Полученная система и ее модификации изучались затем в [43].

Покажем, как наши кольца связаны с некоторым разложением в кольце E в двумерном случае. Рассмотрим кольцо $E = k[[x_1, x_2]]((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$.

Определение 2.7. Определим векторное пространство W_l как замкнутое подпространство в пространстве $k((z_1))((z_2))$, порожденное мономами $z_1^n z_2^m$, $n \leqslant 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Мы хотим определить разложение

$$E = E_+^l \oplus E_-^l.$$

Определение 2.8. Определим „+“-часть E_+ (*l-дифференциальные операторы*) следующим образом:

$$E_+^l = \{A \in E | W_l A \subset W_l\},$$

и „−“-часть следующим образом:

$$E^l_- = k[[x_1,x_2]]\partial_1^{-1}[[\partial_1^{-1}]]((\partial_2^{-1})).$$

Лемма 2.2. *Множество* E^l_+ *— ассоциативное кольцо с единицей;* $E^l_+ = k[[x_1,x_2]][\partial_1]((\partial_2^{-1}))$.

Доказательство. Первое утверждение следует из второго.

Множество E^l_+ является, очевидно, абелевой группой. Это моноид относительно умножения в кольце E, поскольку $A,B \in E^l_+$ и для всякого $w \in W_l$ имеем $w(AB) = (wA)B \in W_l$.

Ассоциативность и дистрибутивность умножения следуют из соответствующих свойств кольца E. Ясно, что $k[[x_1,x_2]][\partial_1]((\partial_2^{-1})) \in E^l_+$. □

Теперь доказательство вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 2.3. *Множество* E^l_- *— ассоциативное кольцо. Ненулевой элемент из этого множества не принадлежит* E^l_+.

Доказательство. Доказательство первого утверждения очевидно. Доказательство второго утверждения аналогично доказательству предложения 2.1.

Лемма 2.4. *Существует единственное разложение*

$$E = E^l_+ \oplus E^l_-.$$

Доказательство очевидно. □

В частности, мы получаем, что $E^l_+ = E_{1,1}$. **В дальнейшем мы будем также часто употреблять обозначение E_+ вместо E^l_+ и $E_{1,1}$, и $\hat{E}_+$ вместо $\hat{E}_{1,1}$. Также мы будем писать $\hat{D}$ вместо $\hat{D}_{1,1}$.**

2.2. Аналог теоремы Сато в размерности 2. В этом пункте мы будем работать с кольцом $E = k[[x_1,x_2]]((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$.

Напомним определение носителя k-подпространства в пространстве $k((z_1))((z_2))$.

Определение 2.9 (см. [6])**.** Носитель k-подпространства W в пространстве $k((z_1))((z_2))$ — замкнутое k-подпространство $\mathrm{Supp}(W)$ в пространстве $k((z_1))((z_2))$, порожденное $\mathrm{LT}(a)$ для всех $a \in W$.

В размерности 1 известна теорема Сато (см., например, [27, приложение]), которая описывает соответствие между точками большой клетки грассманиана Сато и операторами из группы Вольтерра. Мы можем доказать следующий аналог этой теоремы в размерности два.

Теорема 2.1. *Для всякого замкнутого k-подпространства $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ с носителем* $\mathrm{Supp}(W) = W_0 = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$ *существует единственный оператор $S = 1 + S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, такой, что $W_0 S = W$.*

Доказательство. Заметим, что любой оператор $S = 1 + S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, обратим, $S^{-1} = 1 - S^- + (S^-)^2 - \ldots$ Если имеется два оператора S_1, S_2 такого типа, то $S_1 S_2 - 1 \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$.

Единственность: если есть два таких оператора S, S', то $W_0 = W_0 S' S^{-1}$, отсюда по предложению 2.2 $S'S^{-1} \in \hat{D}$. Таким образом, $S'S^{-1} = 1$.

Существование: для любых $(k,l) \in \mathbb{Z}_+ \oplus \mathbb{Z}_+$ должно выполняться $z_1^{-k} z_2^{-l} S \in W$. Из определения действия имеем

$$z_1^{-k} z_2^{-l} S = \partial_1^k \partial_2^l (S)(0) + \sum, \tag{2}$$

где $\sum$ — конечная сумма элементов следующего типа:

$$\mathrm{const} \cdot z_1^{-m} z_2^{-n} \partial_1^p \partial_2^q (S)(0),$$

где $m \leqslant k$, $n \leqslant l$, $p \leqslant k$, $q \leqslant l$ и $m + p = k$, $n + q = l$.

Будем называть ряды $\partial_1^k \partial_2^l (S)(0)$ (k,l)-слоями оператора S. Заметим, что S однозначно определен своими (k,l)-слоями, где $k, l \geqslant 0$: (k,l)-слой — это ряд из коэффициентов при $x_1^k x_2^l$,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} x_1^k x_2^l \partial_1^k \partial_2^l (S)(0).$$

Из формулы (2) следует, что (k,l)-слой S однозначно определен элементом $z_1^{-k} z_2^{-l} S \in W$ и такими (p,q)-слоями, что $(p,q) < (k,l)$.

Мы знаем, что $\mathrm{ord}_\Gamma (z_1^{-k} z_2^{-l} S) = (k,l)$. Рассмотрим базис $\{w_{i,j}, i,j \geqslant 0\}$ в W со свойством $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, где $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$ (заметим, что такой базис однозначно определен). Тогда, с одной стороны,

$$z_1^{-k} z_2^{-l} S = \sum_{0 \leqslant (i,j) \leqslant (k,l)} b_{i,j} w_{i,j}, \quad b_{i,j} \in k.$$

С другой стороны,

$$\sum = \sum_{0 \leqslant (i,j) \leqslant (k,l)} a_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} + \sum_{-}, \quad \text{где} \quad \sum_{-} \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2,$$

и $\partial_1^k \partial_2^l (S)(0) \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$. Таким образом, должно быть $b_{i,j} = a_{i,j}$ и, следовательно, элемент $z_1^{-k} z_2^{-l} S$ однозначно определяется по $\sum$.

Итак, начиная с $(k,l) = (0,0)$, мы находим сначала $(0,0)$-слой, затем, по индукции, мы находим $(k,0)$-слой для каждого $k > 0$, и затем, опять по индукции, мы находим (k,l)-слой для каждой пары (k,l). □

2.3. Несколько фактов о дифференциальных операторах в частных производных. В дальнейшем нам понадобятся несколько технических утверждений о кольцах дифференциальных операторов. Для удобства читателя мы напомним несколько известных фактов в следующем пункте.

2.3.1. Характеристическая схема. Пусть $J \subset D$ — левый идеал. Тогда определен однородный идеал $\langle \sigma_i(P), P \in J \rangle$ в кольце $gr(D)$, и подсхема, определенная этим идеалом, либо в $\mathrm{Spec}(gr(D))$, либо в $\mathrm{Proj}(gr(D))$. Обе подсхемы называются характеристическими подсхемами $\mathrm{Ch}(J)$. Мы будем рассматривать характеристическую подсхему в $\mathrm{Proj}(gr(D))$.

Если определена система координат, мы получаем $\mathrm{Proj}(gr(D)) = \mathrm{Proj}(R[\xi_1, \dots, \xi_n]) = \mathrm{Spec}(R) \times_k \mathbb{P}_k^{n-1}$. Рассмотрим идеал $J = PD$, где P — оператор с условием $\mathbf{ord}(P) = m$. Если $\sigma_m(P) \in k[\xi_1, \dots, \xi_n]$, то мы будем говорить, что *главный символ постоянен.* В этом случае характеристическая схема является дивизором нулей многочлена $\sigma_m(P)$ в $\mathbb{P}^{n-1}$, назовем ее $\mathrm{Ch}_0(P)$. Она не меняется при k-линейных заменах координат.

Лемма 2.5. *Если $P_1, \dots, P_n$ — операторы с постоянными главными символами (относительно системы координат $(x_1, \dots, x_n)$) и если $\det(\partial\sigma(P_i)/\partial\xi_j) \neq 0$, то любой оператор Q такой, что $[P_i, Q] = 0$, $i = 1, \dots, n$, также имеет постоянный главный символ.*

Доказательство. Имеется равенство

$$0 = \{\sigma(P_i), \sigma(Q)\} = \sum_j \frac{\partial(\sigma(P_i))}{\partial\xi_j} \partial_j(\sigma(Q))$$

для $i = 1, \dots, n$. Поскольку $\det(\partial\sigma(P_i)/\partial\xi_j) \in k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ не равен нулю, получаем, что $\partial_j(\sigma(Q)) = 0$ при $j = 1, \dots, n$. Следовательно, Q имеет постоянный главный символ относительно $(x_1, \dots, x_n)$. □

Предложение 2.3. *Если $P_1, \dots, P_n \in D$ — коммутирующие операторы положительного порядка с постоянными главными символами относительно системы координат $(x_1, \dots, x_n)$ и если характеристические дивизоры операторов $P_1, \dots, P_n$ не имеют общих точек (в $\mathbb{P}^{n-1}$), то имеет место*

(1) *Если B — коммутативное подкольцо в D, содержащее $P_1, \dots, P_n$, то $\mathrm{gr}(B) \subset k[\xi_1, \dots, \xi_n]$.*

(2) *Любое такое подкольцо конечно порождено, размерности Крулля n, и также кольцо* $\operatorname{gr} B$ *конечно порождено, размерности Крулля n.*

Замечание 2.3. П. 1 предложения и частично п. 2 следуют из [2, гл. III, §2.9, предложение 10]. П. 2 был доказан в [7] Кричевером в связи с теорией интегрируемых систем. Мы дадим здесь другое доказательство в духе чистой коммутативной алгебры.

В п. 3.1 мы покажем, что в предположениях леммы существует единственное максимальное коммутативное подкольцо в D.

Доказательство. Если $m_i = \deg(P_i)$ и $Q \in B \cap D_m$, то

$$0 = \{\sigma_{m_i}(P_i), \sigma_m(Q)\} = \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{m_i}(P_i)}{\partial \xi_v} \partial_v(\sigma_m(Q)).$$

Но $(\sigma_{m_1}(P_1), \ldots, \sigma_{m_n}(P_n)) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ — конечное накрытие, поэтому $\det(\partial \sigma_{m_i}(P_i)/\partial \xi_j) \neq 0$. Следовательно, $\sigma_m(Q)$ должен иметь постоянные коэффициенты.

Далее, имеются вложения

$$k[\sigma_{m_1}(P_1), \ldots, \sigma_{m_n}(P_n)] \subset \operatorname{gr}(B) \subset k[\xi_1, \ldots, \xi_n].$$

Но $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ конечно порождено как $k[\sigma_{m_1}(P_1), \ldots, \sigma_{m_n}(P_n)]$-модуль, поэтому $\operatorname{gr} B$ конечно порождено размерности Крулля n.

В этом месте будет полезно ввести аналог кольца Риса $\tilde{B}$, которое строится по фильтрации в кольце B: $\tilde{B} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$. Кольцо $\tilde{B}$ является подкольцом в кольце полиномов $B[s]$. Для полей частных имеется равенство $\operatorname{Quot} \tilde{B} = \operatorname{Quot} B[s]$. Кроме того, $\operatorname{gr} B = \tilde{B}/(1_1)$, где 1_1 обозначает элемент $1 \in B_1$. В силу [2, гл. III, §2.9, предложение 10] мы получаем, что B конечно порождено как k-алгебра и порождающие B вместе с элементом 1_1 порождают алгебру $\tilde{B}$. Более того, мы можем вычислить размерность Крулля кольца B:

$$\begin{aligned} \dim B &= \operatorname{trdeg} \operatorname{Quot} B = \operatorname{trdeg} \operatorname{Quot} \tilde{B} - 1 \\ &= \operatorname{trdeg} \operatorname{Quot}(\tilde{B}/(1_1)) = \operatorname{trdeg} \operatorname{Quot}(\operatorname{gr} B) = n, \end{aligned}$$

так как (1_1) — простой идеал высоты 1 в кольце $\tilde{B}$ по теореме Крулля о высоте. □

2.3.2. Случай размерности 2. С этого момента мы будем рассматривать полную k-алгебру $R = k[[x_1, x_2]]$ с системой координат (x_1, x_2).

Лемма 2.6. *Пусть P, P_1, Q — элементы кольца D порядков m, k, n соответственно, все с постоянными главными символами. Пусть k — алгебраически замкнутое поле.*

(1) *Если существует точка*

$$p \in \operatorname{Supp} \underset{0}{\mathrm{Ch}}(Q) \backslash (\operatorname{Supp} \underset{0}{\mathrm{Ch}}(P) \cup \operatorname{Supp} \underset{0}{\mathrm{Ch}}(P_1)),$$

простая в $\mathrm{Ch}_0(Q)$, то существует линейная замена координат $(x_1, x_2) = (x_1', x_2')(a_{ij})$ такая, что в новых координатах

$$\sigma_m(P) = {\xi_2'}^m + \sum_{q=1}^{m} h_q {\xi_1'}^q {\xi_2'}^{m-q}, \tag{3}$$

$$\sigma_k(P_1) = a_0 {\xi_2'}^k + \sum_{q=1}^{k} a_q {\xi_1'}^q {\xi_2'}^{k-q}, \tag{4}$$

$$\sigma_n(Q) = \xi_1' {\xi_2'}^{n-1} + \sum_{q=2}^{n} l_q {\xi_1'}^q {\xi_2'}^{n-q}, \tag{5}$$

где $h_q, a_q, l_q \in k$, $a_0 \neq 0$.

(2) *Если функция $\sigma_n(P)^m/\sigma_m(Q)^n$ не константа, то для почти всех $\alpha \in k$ тройка $P, P_1, Q_\alpha = Q^n + \alpha P^m$ удовлетворяет предположениям п. 1.*

Доказательство. 1. Пусть F, F_1, G — главные символы P, P_1, G, записанные в координатах ξ_1, ξ_2. Тогда если координаты точки p $(a_{21} : a_{22})$, то $F(a_{21}, a_{22}) F_1(a_{21}, a_{22}) \neq 0$. Мы можем выбрать (a_{21}, a_{22}) таким образом, что $F(a_{21}, a_{22}) = 1$.

Мы можем выбрать (a_{11}, a_{12}) таким образом, что $\det(a_{ij}) \neq 0$ и

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi_1}(a_{21}, a_{22}) a_{11} + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_2}(a_{21}, a_{22}) a_{12} = 1$$

(поскольку $(\frac{\partial \sigma}{\partial \xi_1}(a_{21}, a_{22}), \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_2}(a_{21}, a_{22})) \neq (0, 0)$, так как $(a_{21} = a_{22})$ — простой корень G).

После замены координат

$$(x_1, x_2) = (x_1', x_2') \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (\xi_1, \xi_2) = (\xi_1', \xi_2') \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

мы получаем

$$\sigma_m(P) = \tilde{F}(\xi_1', \xi_2') = F(a_{11}\xi_1' + a_{21}\xi_2', a_{12}\xi_1' + a_{22}\xi_2')$$

(и похожие выражения для $\sigma_k(P_1)$, $\sigma_n(Q)$) и $\tilde{F}(0,1) = F(a_{21}, a_{22}) = 1$, $\tilde{F}_1(0,1) = F_1(a_{21}, a_{22}) \neq 0$, $\tilde{G}(0,1) = 0$,

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \xi_1}(0,1) = \frac{\partial G}{\partial \xi_1}(a_{21}, a_{22})a_{11} + \frac{\partial G}{\partial \xi_2}(a_{21}, a_{22})a_{12} = 1.$$

Таким образом, $\sigma_m(P)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1 относительно ξ_2', $\sigma_k(P_1)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1 относительно ξ_2' с точностью до ненулевого множителя, и $\sigma_n(Q) = \xi_1' \tilde{H}(\xi_1', \xi_2')$, где $\tilde{H}$ — многочлен со старшим коэффициентом 1 относительно ξ_2'.

2. По предположению F^n/G^m не константа, поэтому если $H = GCD(F^n, G^m)$ и $F^n = F_1 H$, $G^m = G_1 H$, то $\deg F_1 = \deg G_1 = N > 0$. Так как F_1, G_1 взаимно просты, многочлен $G_1 + tF_1 \in k[\xi_1, \xi_2, t]$ неприводим и определяет неприводимую кривую $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$, и проекция на $\mathbb{A}^1$ определяет конечное $N:1$ накрытие $C \to \mathbb{A}^1$.

Слои C_α над $\alpha \in k$ — дивизоры на $\mathbb{P}^1$, причем они приведены для всех $\alpha \in \mathbb{A}^1 \backslash S$, где S — конечный дивизор ветвления накрытия $C \to \mathbb{A}^1$ (ср. [12, следствие 10.7, гл. III]). Кроме того, при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$, так как у F_1, G_1 нет общих множителей.

Следовательно, существует конечное множество $T \subset \mathbb{A}^1$ такое, что ни для какой точки $\alpha \in \mathbb{A}^1 \backslash T$ C_α не пересекается с конечным множеством $\operatorname{Supp} \operatorname{Ch}_0(P) \cup \operatorname{Supp} \operatorname{Ch}_0(P_1)$. Поэтому для $\alpha \in \mathbb{A}^1 \backslash (S \cup T)$ все точки C_α имеют кратность один и C_α не пересекается с $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ch}_0(P)) \cup \operatorname{Supp}(\operatorname{Ch}_0(P_1))$. Так как $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ch}_0(H)) \subset \operatorname{Supp} \operatorname{Ch}_0(P)$, C_α также не пересекается с $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ch}_0(H))$.

Так как $G^m + \alpha F^n = \sigma_{mn}(Q^m + \alpha P^n) = (G_1 + \alpha F_1)H$, всякая точка из $C_\alpha \subset \operatorname{Ch}_0(Q^m + \alpha P^n)$ удовлетворяет условию п. 1. □

Определение 2.10. Для коммутативного кольца $B \subset \hat{D}$ определим числа $\tilde{N}_B$, N_B следующим образом:

$$\tilde{N}_B = GCD\{\mathbf{ord}(a), \quad a \in B\},$$

$$N_B = GCD\{q(a), \quad a \in B \text{ такие, что } \operatorname{ord}_\Gamma(a) = (0, q(a)) \text{ и } \mathbf{ord}(a) = q(a)\}.$$

Определение 2.11. Скажем, что коммутативное кольцо $B \subset D$ строго допустимо, если $\tilde{N}_B = N_B$ (ср. с определениями 3.6, 3.8).

Предложение 2.4. *Пусть B — коммутативное кольцо дифференциальных операторов, $B \subset D$, k — алгебраически замкнутое поле, и пусть B содержит два оператора P, Q порядков m, n с постоянными главными символами, причем $\sigma_m(P)^n/\sigma_n(Q)^m$ — непостоянная функция на $\mathbb{P}^1$.*

Тогда существует k-линейная замена координат, как в лемме 2.6, *такая, что $N_B = \tilde{N}_B$.*

Доказательство. В силу леммы 2.6 мы без ограничения общности можем предположить, что операторы P, Q удовлетворяют (3), (5) из утверждения леммы 2.6. Пусть X — такой оператор, что $GCD(\mathbf{ord}(X), \mathbf{ord}(P)) = \tilde{N}_B$.

По лемме 2.5 символ s_X оператора X является однородным многочленом с постоянными коэффициентами. Теперь по лемме 2.6 мы получаем, что существует α и такая замена координат, что символы s_{Q_α}, s_P, s_X, где $Q_\alpha = \alpha Q^n + P^m$, удовлетворяют равенствам

$$s_P = \partial_2'^{\mathbf{ord}(P)} + \dots, \quad s_X = \partial_2'^{\mathbf{ord}(X)} + \dots, \quad s_{Q_\alpha} = \partial_1' \partial_2'^{\mathbf{ord}(Q_\alpha)-1} + \dots$$

Очевидно, что это и есть искомая k-линейная замена координат. □

2.3.3. Условия роста. В этом пункте мы даем несколько новых определений и доказываем ряд технических утверждений.

Определение 2.12. Скажем, что оператор $P \in \hat{E}_+$ имеет порядок $\mathrm{ord}_\Gamma(P)=(k,l)$, если $P=\sum_{s=-\infty}^{l} p_s \partial_2^s$, где $p_s \in \hat{D}_1$, $p_l \in k[[x_1,x_2]][\partial_1] = D_1$, и $\mathbf{ord}(p_l) = k$.

Скажем, что оператор $P \in \hat{E}_+$, $P = \sum p_{ij} \partial_1^i \partial_2^j$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k,l)$ *удовлетворяет условию* A_α, $\alpha \geqslant 0$, если

$$(A_\alpha) \qquad \mathrm{ord}_M(p_{ij}) \geqslant \begin{cases} 0, & \text{если } i \leqslant \alpha(l-j)+k, \\ i - \alpha(l-j) - k & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом случае, и если $\alpha \neq 0$, определим *полный порядок* оператора как $f\,\mathrm{ord}(P) := k/\alpha + l$.

Скажем, что оператор $Q \in \hat{E}_+$, $Q = \sum q_{ij} \partial_1^i \partial_2^j$ *удовлетворяет условию* A_α *для порядка* (k,l), если A_α выполняется для всех q_{ij}.

Определение 2.13. Скажем, что оператор $P \in E_+$, $P = \sum p_{ij} \partial_1^i \partial_2^j$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k,l)$ *удовлетворяет сильному условию* A_α, $\alpha \geqslant 0$, если

$$(B_\alpha) \quad p_{ij} = 0 \ \text{ при } \ i > \alpha(l-j)+k.$$

Скажем, что оператор $Q \in \hat{E}_+$, $Q = \sum q_{ij} \partial_1^i \partial_2^j$ *удовлетворяет сильному условию* A_α *для порядка* (k,l), если B_α выполняется для всех q_{ij}.

Определение 2.14. Скажем, что оператор $P \in E_+$, $P = \sum p_{ij} \partial_1^i \partial_2^j$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k,l)$ *удовлетворяет очень сильному условию* A_α, $\alpha \geqslant 0$, если

$$(C_\alpha) \quad p_{ij} = 0 \ \text{ при } \ i > \alpha(l-j)+k$$

и старший коэффициент дифференциального оператора p_{ij} — константа.

Скажем, что оператор $Q \in \hat{E}_+$, $Q = \sum q_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ *удовлетворяет очень сильному условию* A_α *для порядка* (k,l), если C_α выполняется для всех q_{ij}.

Замечание 2.4. Очевидно, что имеются следующие импликации: $C_\alpha \Rightarrow B_\alpha \Rightarrow A_\alpha$.

Замечание 2.5. Легко видеть, что если $P \in \hat{E}_+$ удовлетворяет условию A_α или сильному условию A_α, то он удовлетворяет условию A_κ или сильному условию A_κ для любого $\kappa > \alpha$.

Определение 2.15. Пусть $P \in \hat{D}_1$, $P = \sum p_s\partial_1^s$ — оператор, удовлетворяющий следующему условию: существует число $f(P)$ такое, что $\mathrm{ord}_M(p_s) \geqslant s - f(P)$, если $s \geqslant f(P)$. В этом случае скажем, что P *удовлетворяет условию* $AA_{f(P)}$.

Определение 2.16. Пусть $P \in D_1$, $P = \sum_{s\geqslant 0} p_s\partial_1^s$ — оператор, удовлетворяющий следующему условию: существует число $f(P)$ такое, что $p_s = 0$ при $s > f(P)$. В этом случае скажем, что P *удовлетворяет сильному условию* $AA_{f(P)}$ (или $BB_{f(P)}$).

Определение 2.17. Пусть $P \in D_1$, $P = \sum_{s\geqslant 0} p_s\partial_1^s$ — оператор, удовлетворяющий следующему условию: существует число $f(P)$ такое, что $p_s = 0$ при $s > f(P)$ и $p_{f(P)} \in k$. В этом случае скажем, что P *удовлетворяет очень сильному условию* $AA_{f(P)}$ (или $CC_{f(P)}$).

Замечание 2.6. Легко видеть, что если $P \in \hat{D}_1$ удовлетворяет условию AA_κ или (очень) сильному условию AA_κ, то он удовлетворяет условию $AA_{\kappa'}$ или (очень) сильному условию $AA_{\kappa'}$ для всех $\kappa' > \kappa$.

Замечание 2.7. Заметим, что $P \in \hat{E}_+$, $P = \sum p_s\partial_2^s$ удовлетворяет условию A_α или (очень) сильному условию A_α, если и только если его коэффициенты p_s удовлетворяют условиям $AA_{\alpha(f\,\mathrm{ord}(P)-s)}$ или (очень) сильным условиям $AA_{\alpha(f\,\mathrm{ord}(P)-s)}$ соответственно.

Аналогично P удовлетворяет A_α для порядка (k,l) или (очень) сильному условию A_α для порядка (k,l), если и только если его коэффициенты p_s удовлетворяют условиям $AA_{\alpha(l-s)+k}$ или (очень) сильным условиям $AA_{\alpha(l-s)+k}$.

Заметим также, что если P удовлетворяет A_α для порядка (k,l), то он удовлетворяет A_α для любой пары (k_1,l_1) такой, что $l_1 + k_1/\alpha = l + k/\alpha$. То же верно для (очень) сильных условий.

Лемма 2.7. *Пусть* $P_1, P_2 \in \hat{D}_1$ *удовлетворяют условиям* $AA_{f(P_1)}, AA_{f(P_1)}$ *соответственно. Тогда* P_1P_2 *— оператор, удовлетворяющий условию* $AA_{f(P_1)+f(P_2)}$.

То же утверждение верно для $P_1, P_2 \in D_1$, удовлетворяющих сильным или очень сильным условиям.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для $P_1 = p_i\partial_1^i$. Пусть $P_2 = \sum p_{2,j}\partial_1^j$ и $P_1P_2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\partial_1^k$. Имеем

$$P_1P_2 = \sum_{j=0}^{i} p_i C_i^j \partial_1^j(P_2)\partial_1^{i-j},$$

откуда

$$\mathrm{ord}_M(x_{f(P_1)+f(P_2)+l}) \geqslant \min_j\{\mathrm{ord}_M(p_i) + \mathrm{ord}_M(p_{2,f(P_1)+f(P_2)+l+j-i})\}.$$

Если $i \leqslant f(P_1)$, то $f(P_1)+f(P_2)+l+j-i \geqslant f(P_2)+l$, откуда

$$\mathrm{ord}_M(p_i) + \mathrm{ord}_M(p_{2,f(P_1)+f(P_2)+l+j-i}) \geqslant l$$

для любого j.

Если $i > f(P_1)$, то

$$\mathrm{ord}_M(p_i) + \mathrm{ord}_M(p_{2,f(P_1)+f(P_2)+l+j-i}) \geqslant i - f(P_1) + f(P_1) + l + j - i \geqslant l$$

для любого j. Таким образом, $\mathrm{ord}_M(x_{f(P_1)+f(P_2)+l}) \geqslant l$.

Утверждение для (очень) сильных условий очевидно. □

Лемма 2.8. *Пусть $P_1, P_2 \in \hat{E}_+$ удовлетворяют условию A_α с $\alpha \geqslant 1$ для порядков (k_1, l_1) и (k_2, l_2) соответственно. Тогда P_1P_2 удовлетворяет условию A_α для порядка (k_1+k_2, l_1+l_2).*

В частности, если P_1, P_2 удовлетворяют условию A_α с $\alpha \geqslant 1$, то P_1P_2 удовлетворяет условию A_α и $\mathrm{ord}_\Gamma(P_1P_2) = \mathrm{ord}_\Gamma(P_1) + \mathrm{ord}_\Gamma(P_2)$.

Те же утверждения справедливы для $P_1, P_2 \in E_+$, удовлетворяющих (очень) сильным условиям.

Доказательство. Мы будем доказывать утверждения одновременно в (очень) сильном и не сильном случаях.

Достаточно доказать лемму для произведения двух слагаемых рядов P_1, P_2, скажем, $p_k\partial_2^k$, $p_l\partial_2^l$, поскольку любое слагаемое в P_i удовлетворяет условию A_α для порядка (k_i, l_i), $i = 1, 2$. Имеем

$$(p_k\partial_2^k)(p_l\partial_2^l) = \sum_{j=0}^{\infty} C_k^j p_k \partial_2^j(p_l)\partial_2^{k+l-j}. \tag{6}$$

Заметим, что p_k удовлетворяет условию $AA_{f(p_k)}$, где $f(p_k) = \alpha(l_1-k)+k_1$, p_l удовлетворяет условию $AA_{f(p_l)}$, где $f(p_l) = \alpha(l_2-l)+k_2$. Заметим также, что $\partial_2^j(p_l)$ удовлетворяет условию $AA_{f(p_l)}$ в (очень) сильном случае и условию $AA_{f(p_l)+j}$ в не сильном случае. Таким образом, по лемме 2.7

получаем $f(p_k\partial_2^j(p_l)) = f(p_k) + f(\partial_2^j(p_l)) \leqslant \alpha(l_1 + l_2 - (k + l - j)) + k_1 + k_2$, откуда следует, что каждое слагаемое в (6) удовлетворяет условию A_α в определении 2.12 для порядка $(k_1 + k_2, l_1 + l_2)$. Следовательно, то же верно для P_1P_2.

Ясно, что $\mathrm{ord}_\Gamma(P_1P_2) = \mathrm{ord}_\Gamma(P_1) + \mathrm{ord}_\Gamma(P_2)$. Если P_i удовлетворяют A_α, то они удовлетворяют A_α для порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P_i)$. Следовательно, P_1P_2 удовлетворяет A_α для порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P_1P_2)$, т.е. P_1P_2 удовлетворяет условию A_α. $\square$

Следствие 2.1. *Если оператор $S = 1 - S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, удовлетворяет условию A_α или (очень) сильному условию A_α с $\alpha \geqslant 1$, то оператор S^{-1} также удовлетворяет ему.*

Доказательство. Доказательство следует из доказательства леммы 2.8, так как $\mathrm{ord}_\Gamma(S) = (0,0)$ и $S^{-1} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty}(S^-)^q$. $\square$

Следствие 2.2. *Рассмотрим множество*

$$\begin{aligned}\Pi_\alpha = \{P \in \hat{E}_+ |\quad &\text{существует пара } (k,l) \in \mathbb{Z}_+ \oplus \mathbb{Z} \text{ такая,}\\ &\text{что } P \text{ удовлетворяет } A_\alpha \text{ для порядка } (k,l)\} \subset \hat{E}_+.\end{aligned} \tag{7}$$

Оно является ассоциативной подалгеброй (в $\hat{E}_+$) с единицей.

Доказательство. Пусть $P_1, P_2 \in \Pi_\alpha$. По лемме 2.8 $P_1P_2 \in \Pi_\alpha$. Более того, $P_1 + P_2 \in \Pi_\alpha$, поскольку $P_1 + P_2$ удовлетворяет условию A_α для такого порядка (k_i, l_i), $i = 1, 2$, для которого значение выражения $l_i + k_i/\alpha$ больше (см. также замечание 2.7). Следовательно, Π_α — ассоциативная подалгебра в $\hat{E}_+$ с единицей 1. $\square$

Лемма 2.9. *Пусть $P, Q \in \hat{D} \subset \hat{E}_+$ — коммутирующие операторы со старшими коэффициентами 1 и пусть $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0,k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1,l)$. Тогда*

1. *Существуют единственные операторы $L_1 \in \hat{E}_+$, $L_2 \in \hat{E}_+$ такие, что $L_2^k = P$, $L_1L_2^l = Q$, $[L_1, L_2] = 0$.*
2. *Если P, Q удовлетворяют условию A_α с $\alpha \geqslant 1$, то L_1, L_2 удовлетворяют условию A_α.*
3. *Если $P, Q \in D$, то $L_1, L_2 \in \hat{E}_+ \cap E$.*
4. *Если $P, Q \in D$ удовлетворяют (очень) сильному условию A_α с $\alpha \geqslant 1$, то L_1, L_2 удовлетворяют (очень) сильному условию A_α.*

Доказательство. 1. Коэффициенты оператора $L_2 = \partial_2 + u_0 + u_{-1}\partial_2^{-1} + \dots$ можно найти последовательно, решая систему уравнений, которая получается сравнением коэффициентов операторов P и L_2^k:

$$ku_0 = p_{k-1}, \quad ku_{-i} + F(u_0, \dots, u_{-i+1}) = p_{k-1-i}, \tag{8}$$

где F — многочлен от переменных $u_0, \dots, u_{-i+1}$ и их производных. Ясно, что эта система однозначно разрешима. Таким образом, оператор L_2 однозначно определен. Заметим, что L_2 — обратимый элемент, $L_2^{-1} \in \hat{E}_+$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(L_2^{-1}) = (0, -1)$. Следовательно, $L_1 = QL_2^{-l}$ также однозначно определен.

Те же аргументы показывают, что справедлив п. 3.

2 и 4. Мы будем доказывать утверждения одновременно в (очень) сильном и не сильном случаях.

Из формул (8) следует, что u_0 удовлетворяет A_α для порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(L_2)$ или, эквивалентно, в силу замечания 2.7 u_0 удовлетворяет AA_α. Предположим, что $F(u_0, \dots, u_{-i+1})$ в (8) удовлетворяет $AA_{\alpha(1+i)}$. Тогда u_{-i} будет также удовлетворять условию $AA_{\alpha(1+i)}$. Покажем, что $F(u_0, \dots, u_{-i})$ удовлетворяет $AA_{\alpha(2+i)}$.

Имеем

$$L_2^k = (\partial_2 + u_0 + \ldots + u_{-i}\partial_2^{-i})^k + u_{-i-1}\partial_2^{-i-2+k} + \text{члены высшего порядка.}$$

По лемме 2.8 и замечанию 2.7 оператор $(\partial_2 + u_0 + \ldots + u_{-i}\partial_2^{-i})^k$ удовлетворяет A_α. Но $F(u_0, \dots, u_{-i})$ — коэффициент при ∂_2^{-i-2+k} у этого оператора. Таким образом, он удовлетворяет условию $AA_{\alpha(2+i)}$, см. замечание 2.7.

Теперь для оператора L_2 п. 2 и 4 получаются по индукции. Оператор L_1 удовлетворяет условию A_α в силу леммы 2.8 и следствия 2.1. □

2.3.4. Квази-эллиптические кольца коммутирующих операторов. Последняя лемма, а также лемма 2.6 служат мотивировкой для следующих определений.

Определение 2.18. Кольцо $B \subset \hat{E}_+$ коммутирующих операторов называется квази-эллиптическим, если оно содержит два таких оператора P, Q с постоянными старшими коэффициентами, что $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$ (см. определение 2.12) и $\mathrm{ord}_\Gamma(L) = (1, l)$ для некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$.

Кольцо B называется α-квази-эллиптическим, если P, Q удовлетворяют условию A_α.

Определение 2.19. Скажем, что коммутирующие операторы с постоянными равными 1 старшими коэффициентами $P, Q \in \hat{E}_+$, где $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$, почти нормализованы, если

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=-\infty}^{k-1} p_s \partial_2^s, \quad Q = \partial_1\partial_2^l + \sum_{s=-\infty}^{l-1} q_s \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \hat{D}_1$.

Скажем, что P, Q нормализованы, если

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=-\infty}^{k-2} p_s \partial_2^s, \quad Q = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=-\infty}^{l-1} q_s \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \hat{D}_1$.

Лемма 2.10. *Для любых двух операторов с постоянными равными* 1 *старшими коэффициентами* $P, Q \in \hat{D}$ *порядков* $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$ *имеет место*

(1) (a) *Существует обратимая функция* $f \in k[[x_1, x_2]]$ *такая, что операторы* $f^{-1}Pf, f^{-1}Qf$ *почти нормализованы.*

(b) *Существует оператор* $S = f + S^-$, *где* $S^- \in \hat{D}_1\partial_1 \subset \hat{E}_+$ *и* $f \in k[[x_1, x_2]]$ *обратима, такой, что операторы* $S^{-1}PS, S^{-1}QS$ *нормализованы.*

(c) *Если* S_1 *— другой оператор с таким свойством, то* $S^{-1}S_1 \in k$.

(2) (a) *Если* P, Q *удовлетворяют условию* A_α, *то почти нормализованные операторы из* 1a *также удовлетворяют* A_α.

(b) *Если* P, Q *удовлетворяют условию* A_α *с* $\alpha = 1$, *то* S *в* 1b *удовлетворяет условию* A_α. *В этом случае нормализованные операторы из* 1b *также удовлетворяют* A_α.

Доказательство. Сначала покажем, что существует функция $f \in k[[x_1, x_2]]^*$ такая, что

$$f^{-1}Pf = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-1} p_s' \partial_2^s, \quad f^{-1}Qf = \partial_1\partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q_s' \partial_2^s. \tag{9}$$

Пусть $Q = \sum_{s=0}^{l} q_s \partial_2^s$ и $q_l = \partial_1 \partial_2^l + g$. Простые прямые вычисления показывают, что для любой функции $f \in k[[x_1, x_2]]^*$ имеют место равенства

$$f^{-1}Pf = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-1} p_s' \partial_2^s, \quad f^{-1}Qf = \partial_2^l(\partial_1 + f^{-1}\partial_1(f) + g) + \sum_{s=0}^{l-1} q_s' \partial_2^s$$

для некоторых коэффициентов $p_s', q_s' \in \hat{D}_1$. Следовательно, можно найти необходимую функцию в виде $f = \exp(-\int g dx_1)$.

Таким образом, мы сводим проблему к операторам P, Q, которые имеют вид правых частей равенств (9). Аналогично рассуждая, можно найти такую функцию $f \in k[[x_2]]^*$, что, начиная с таких операторов, мы получим равенства

$$f^{-1}Pf = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-1} p'_s \partial_2^s, \quad f^{-1}Qf = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s, \tag{10}$$

где ряд p'_{k-1} не имеет свободного члена. И опять прямые вычисления показывают, что для любой функции $f \in k[[x_2]]^*$ имеют место формулы

$$f^{-1}Pf = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-1} p'_s \partial_2^s, \quad f^{-1}Qf = \partial_2^l(\partial_1 + f^{-1}\partial_1(f) + g) + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s,$$

где $p'_{k-1} = p_{k-1} + kf^{-1}\partial_2(f)$ (заметим, что f коммутирует с p_s). Так как $[P, Q] = 0$, должно выполняться $\partial_1(p_{k-1}) = 0$. Следовательно, можно найти искомую функцию $f \in k[[x_2]]^*$.

Заметим, что любая функция $f \in k[[x_1, x_2]]^*$, сохраняющая два оператора вида (10), должна быть константой. Это немедленно следует из формул выше.

Таким образом, мы свели проблему к операторам P, Q, которые выглядят как правые части равенств в (10). Покажем, что существует оператор $S = 1 + S^-$, $S^- \in \hat{D}_1\partial_1$, такой, что

$$S^{-1}PS = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-2} p'_s \partial_2^s, \quad S^{-1}QS = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s. \tag{11}$$

Так как $\partial_1(p_{k-1}) = 0$, то можно искать такой оператор S, что $\partial_1(S) = 0$. Прямые вычисления (заметим, что S коммутирует с p_{k-1}) показывают, что для такого оператора

$$S^{-1}PS = \partial_2^k + (p_{k-1} + kS^{-1}\partial_2(S))\partial_2^{k-1} + \sum_{s=0}^{k-2} p'_s \partial_2^s, \quad S^{-1}QS = \partial_1\partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s.$$

Следовательно, мы можем найти оператор в форме $S = \exp(-\int p_{k-1}/k dx_2)$. Так как p_{k-1} без свободного члена, $\partial_1(p_{k-1}) = 0$, и существует интеграл $(-\int p_{k-1}/k dx_2)$ с нормированием по x_2 $\mathrm{ord}_{M_2}(-\int p_{k-1}/k dx_2) > 0$, то эта экспонента корректно определена, и $S \in \hat{D}_1$.

Заметим, что оператор S, сохраняющий нормализованные операторы P, Q, должен быть оператором с постоянными коэффициентами. Это легко следует из вышеприведенных вычислений. Так как он обратим, он должен быть константой. Объединяя все аргументы вместе, мы получаем доказательство п. 1, 1c.

Доказательство п. 2а немедленно следует из леммы 2.8.

Чтобы доказать п. 2b, заметим, что согласно замечанию 2.7 коэффициент p_{k-1} удовлетворяет условию AA_α. Следовательно, интеграл $(-\int p_{k-1}/k dx_2)$ (см. выше) удовлетворяет условию $AA_{\alpha-1}$. Так как в нашем случае $\alpha = 1$, мы получаем, что S удовлетворяет условию AA_0, как сумма операторов, удовлетворяющих AA_0, поскольку $(-\int p_{k-1}/k dx_2)^s$ удовлетворяет AA_0 в силу леммы 2.7. Отсюда тогда следует, что S удовлетворяет A_α. Остаток доказательства следует из леммы 2.8 и следствия 2.1. □

Лемма 2.11. *Пусть $L_1, L_2 \in \hat{E}_+$ — коммутирующие почти нормализованные операторы со старшими коэффициентами* 1 *порядков* $\mathrm{ord}_\Gamma(L_2) = (0,1)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(L_1) = (1,0)$:

$$L_1 = \partial_1 + \sum_{q=1}^{\infty} v_q \partial_2^{-q}, \quad L_2 = \partial_2 + \sum_{q=0}^{\infty} u_q \partial_2^{-q}.$$

Тогда

(1) (a) *Существует оператор $S = 1 + S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, такой, что $S^{-1}\partial_1 S = L_1$, $S^{-1}L_{20}S = L_2$, где $L_{20} = \partial_2 + u_0$.*
(b) *Если S_1 — другой оператор с таким свойством, то $S^{-1}S_1 \in k[\partial_1]((L_{20}^{-1}))$.*

(2) *Если $L_1, L_2 \in \hat{E}_+ \cap E$, то $S \in \hat{E}_+ \cap E$.*

(3) (a) *Если L_1, L_2 удовлетворяют условию A_α, где $\alpha \geqslant 1$, то существует S, удовлетворяющий условию $A_{2\alpha-1}$; в частности, если $\alpha = 1$, то S удовлетворяет A_α.*
(b) *Если S_1 — другой оператор с таким свойством, то $S^{-1}S_1 \in k[\partial_1]((L_{20}^{-1}))$ и удовлетворяет $A_{2\alpha-1}$.*

Доказательство. 1a. Достаточно доказать следующий факт: если

$$L_1 = \partial_1 + \sum_{q=k}^{\infty} v_q \partial_2^{-q}, \quad L_2 = \partial_2 + u_0 + \sum_{q=k}^{\infty} u_q \partial_2^{-q}, \quad [L_1, L_2] = 0,$$

то существует оператор $S_k = 1 + s_k \partial_2^{-k}$ такой, что

$$S_k^{-1} L_1 S_k = \partial_1 + \sum_{q=k+1}^{\infty} v'_q \partial_2^{-q}, \quad S_k^{-1} L_2 S_k = \partial_2 + u_0 + \sum_{q=k+1}^{\infty} u'_q \partial_2^{-q}.$$

Действительно, если этот факт доказан, то $S^{-1} = \prod_{q=1}^{\infty} S_k$, где S_1 берется для исходных операторов L_1, L_2, S_2 берется для операторов $S_1^{-1}L_1S_1$, $S_1^{-1}L_2S_1$ и так далее.

Чтобы доказать этот факт, заметим сначала, что, поскольку $[L_1, L_2] = 0$, должно выполняться $\partial_2(v_k) - \partial_1(u_k) + [u_0, v_k] = 0$ и $\partial_1(u_0) = 0$. Далее,

$$S_k^{-1}\partial_1 S_k = \partial_1 + S_k^{-1}\partial_1(S_k) = \partial_1 + \partial_1(s_k)\partial_2^{-k} + \dots,$$
$$S_k^{-1}L_{20}S_k = \partial_2 + S_k^{-1}\partial_2(S_k) + S_k^{-1}u_0 S_k = \partial_2 + (\partial_2(s_k) + [u_0, s_k])\partial_2^{-k} + \dots,$$

откуда s_k может быть найден из следующей системы:

$$\partial_1(s_k) = -v_k, \quad \partial_2(s_k) + [u_0, s_k] = -u_k. \tag{12}$$

Эта система разрешима, поскольку $\partial_2(v_k) - \partial_1(u_k) + [u_0, v_k] = 0$ и $\partial_1(u_0) = 0$, и все коэффициенты у u_k, v_k лежат в $k[[x_1, x_2]]$.

1b. Если S_1 — другой оператор с таким свойством, то должны выполняться равенства $[S^{-1}S_1, \partial_1] = 0$, $[S^{-1}S_1, L_{20}] = 0$. Заметим, что любой элемент в $\hat{E}_+$ может быть записан как ряд из кольца $\hat{D}_1((L_{20}^{-1}))$. Предположим, что $S^{-1}S_1$ записан в виде такого ряда. Так как $[\partial_1, L_{20}] = 0$, первое условие дает равенство $\partial_1(S^{-1}S_1) = 0$, т.е. коэффициенты $S^{-1}S_1$ не зависят от x_1.

Теперь пусть $S^{-1}S_1 = \sum_{q=0}^{\infty} s_q L_{20}^{-q}$, и предположим, что s_k — первый коэффициент такой, что $[s_k, L_{20}] \neq 0$. Тогда

$$0 = [S^{-1}S_1, L_{20}] = [s_k, L_{20}]L_{20}^{-k} + \text{члены высшего порядка},$$

откуда $[s_k, L_{20}] = 0$, противоречие. Но $[s_k, L_{20}] = -\partial_2(s_k)$, поскольку $\partial_1(s_k) = 0$ и, следовательно, $[s_k, u_0] = 0$. Таким образом, мы получаем, что коэффициенты ряда $S^{-1}S_1$ не зависят от x_2.

Это означает, что коэффициенты у $S^{-1}S_1$ должны лежать в k. Тогда из определения кольца $\hat{E}_+$ следует, что $S^{-1}S_1 \in k[\partial_1]((L_{20}^{-1}))$.

2. Доказательство такое же, как в 1a.

3. В силу следствия 2.1 доказательство п. 3 будет следовать из доказательства п. 1a, если мы покажем, что операторы S_k удовлетворяют условию $A_{2\alpha-1}$. Чтобы доказать это, нужно показать, что существует решение s_k в (12), удовлетворяющее условию $AA_{(2\alpha-1)k}$. Но каждое решение в (12) можно записать в виде

$$s_k = -\int v_k dx_1 + \int\left(\int \partial_2(v_k)dx_1 - u_k + \left[u_0, \int v_k dx_1\right]\right)dx_2. \tag{13}$$

Мы знаем, что u_k удовлетворяет условию $AA_{\alpha(1+k)}$ и v_k удовлетворяет условию $AA_{\alpha k+1}$. Значит, существует интеграл $\int v_k dx_1$, удовлетворяющий $AA_{\alpha k}$. Тогда по лемме 2.7 $[u_0, \int v_k dx_1]$ удовлетворяет $AA_{\alpha(k+1)}$. Член $\int \partial_2(v_k)dx_1$ будет снова удовлетворять условию $AA_{\alpha k+1}$. Так как $\alpha(k+1) \geqslant$

$\alpha k+1$, мы получаем, что член $(\int \partial_2(v_k)dx_1 - u_k + [u_0, \int v_k dx_1])$ будет удовлетворять условию $AA_{\alpha(k+1)}$. Тогда существует интеграл $\int(\int \partial_2(v_k)dx_1 - u_k + [u_0, \int v_k dx_1])dx_2$, удовлетворяющий $AA_{\alpha(1+k)-1}$. Так как $\alpha(1+k)-1 \geqslant \alpha k$, мы получаем, что s_k будет удовлетворять $AA_{\alpha(1+k)-1}$. Но $(2\alpha-1)k \geqslant \alpha(1+k)-1$, поэтому существует s_k, удовлетворяющий $AA_{(2\alpha-1)k}$. □

§3. Классификация подколец коммутирующих операторов

3.1. Классификация в терминах пар Шура. Теперь мы готовы описать классификацию удовлетворяющих некоторым условиям колец коммутирующих операторов. А именно, мы можем сделать это для всех 1-квази-эллиптических колец (см. ниже). Сначала покажем, что большое количество примеров колец коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных являются 1-квази-эллиптическими после замены координат.

А именно, рассмотрим кольцо B коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных, которое содержит два оператора P, Q с постоянными главными символами, и удовлетворяющее условиям предложения 2.4. Операторы P, Q удовлетворяют условию A_1 для порядка (k,l) и порядка (n,m) соответственно, где $k+l = \mathbf{ord}(P)$, $n+m = \mathbf{ord}(Q)$. В силу леммы 2.6 в B существуют (после подходящей замены переменных) два оператора P, Q специального вида, описанного в этой лемме (мы используем здесь то же обозначение для P, Q, чтобы подчеркнуть, что эти операторы удовлетворяют условиям 3 и 5 леммы 2.6; мы надеемся, что это не приведет к недоразумению читателя). В частности, они удовлетворяют условию A_1, и кольцо B (после подходящей замены переменных) становится 1-квази-эллиптическим. Более того, применяя предложение 2.4, мы видим, что B (после подходящей замены переменных) становится строго допустимым.

Рассмотрим теперь 1-квази-эллиптическое кольцо коммутирующих операторов $B \subset \hat{D}$ (см. определение 2.18), и пусть P, Q — операторы с единичным старшим коэффициентом из B порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0,k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1,l)$. По лемме 2.9 существуют однозначно определенные операторы L_1, L_2 такие, что $L_2^k = P$, $L_1L_2^{l-1} = Q$, и эти операторы удовлетворяют условию A_1.

В силу леммы 2.10, 2b мы можем предполагать, что они нормализованы. Тогда по лемме 2.11 существует оператор S, удовлетворяющий условию A_1, и $SL_1S^{-1} = \partial_1$, $SL_2S^{-1} = \partial_2$.

Лемма 3.1. *Пусть X — оператор, коммутирующий с P, Q. Тогда он коммутирует также с L_1, L_2.*

Доказательство. Имеем
$$0 = [P, X] = \sum_{q=0}^{k-1} L_2^q [L_2, X] L_2^{k-1-q},$$
и $\mathrm{HT}(L_2^q) = \partial_2^q$. Если $[L_2, X] \neq 0$, то $\mathrm{HT}([L_2, X]) \neq 0$ (чтобы это увидеть, здесь достаточно рассмотреть старший член оператора в $\hat{D}_1((\partial_2^{-1})) = \hat{E}_+$ относительно ∂_2), откуда $\mathrm{HT}([P, X]) = k\,\mathrm{HT}([L_2, X])\partial_2^{k-1} \neq 0$, противоречие. Таким образом, $[L_2, X] = 0$. Тогда также $[L_1, X] = 0$, поскольку $0 = [Q, X] = [L_1, X]L_2^{l-1}$. □

Следствие 3.1 (ср. предложение 2.3). *Множество коммутирующих с P, Q операторов — коммутативное кольцо. Более того, все эти операторы принадлежат кольцу Π_1 (см. следствие 2.2).*

Доказательство. Действительно, если X коммутирует с P, Q, то он коммутирует с L_1, L_2, и, следовательно, SXS^{-1} коммутирует с ∂_1, ∂_2, откуда следует, что SXS^{-1} — оператор с постоянными коэффициентами. Следовательно, любые два оператора, коммутирующие с P, Q, должны коммутировать друг с другом.

Чтобы доказать второе утверждение, рассмотрим пространство W_0S^{-1}, где $W_0 = \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \mid i, j \geqslant 0\rangle$. Так как S удовлетворяет условию A_1, то в силу следствия 2.1 S^{-1} удовлетворяет A_1, и по определению действия элемент $z_1^{-k} z_2^{-l} S^{-1}$ также удовлетворяет A_1 для всех $k, l \geqslant 0$. Заметим также, что $(W_0S^{-1})(SXS^{-1}) \subset (W_0S^{-1})$. Так как $\mathrm{Supp}(W_0S^{-1}) = \mathrm{Supp}(W_0)$, то существует базис $\{w_{i,j}, i, j \geqslant 0\}$ в W_0S^{-1}, однозначно определенный условиями $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, где $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$, и все элементы $w_{i,j}$ удовлетворяют условию A_1. Следовательно, оператор $w_{0,0}(SXS^{-1})$ является конечной суммой элементов $w_{i,j}$. А значит, он принадлежит Π_1 (ср. доказательство следствия 2.2), и, следовательно, $SXS^{-1} \in \Pi_1$ по лемме 2.8. □

Итак, стартовав с 1-квази-эллиптического кольца B, мы получили кольцо операторов с постоянными коэффициентами $A = SBS^{-1} \in \Pi_1$ и пространство $W = W_0S^{-1}$, $WA \subset W$, со специальным свойством. Обратное также верно.

Теорема 3.1. *Пусть W — k-подпространство: $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ и $\mathrm{Supp}(W) = W_0$. Пусть $\{w_{i,j}, i, j \geqslant 0\}$ — базис в W, однозначно определенный условиями $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, где $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$. Предположим, что все элементы $w_{i,j}$ удовлетворяют условию A_α с $\alpha \geqslant 1$.*

Тогда существует единственный оператор $S = 1 + S^-$, удовлетворяющий условию A_α, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, такой, что $W_0S = W$.

Доказательство. Мы можем повторить доказательство теоремы 2.1, чтобы показать, что в нашей ситуации S удовлетворяет A_α. Заметим, что S удовлетворяет A_α, если каждый (k,l)-слой удовлетворяет условию A_α для порядка (k,l).

Чтобы это показать, используем индукцию по (k,l). Имеем: $(0,0)$-слой равен $w_{0,0}$, следовательно, он удовлетворяет условию A_α для $(0,0)$. Предположим, что каждый (p,q)-слой с $p \leqslant k$, $q \leqslant l$ и $(p,q) \neq (k,l)$ удовлетворяет A_α для порядка (p,q). Тогда из формулы (2) следует, что (k,l)-слой удовлетворяет условию A_α для порядка (k,l), так как каждый элемент $w_{i,j}$ удовлетворяет A_α (ср. следствие 2.2). $\square$

Следствие 3.2. *Пусть W — подпространство из теоремы. Пусть $A \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ — кольцо такое, что $WA \subset W$. Тогда имеется вложение $SAS^{-1} \subset \hat{D}$ (здесь мы отождествляем кольцо $k[z_1^{-1}]((z_2))$ и $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$, см. определение* 2.4).

Доказательство. Ясно, что $W_0SAS^{-1} \subset W_0$. Тогда в силу предложения 2.2 $SAS^{-1} \in \hat{D}$. $\square$

Теорема 3.1 и лемма 2.11 побуждают дать следующие определения.

Определение 3.1. Подпространство $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ называется α-пространством, если существует такой базис w_i в W, что w_i удовлетворяют условию A_α для всех i.

Определение 3.2. Скажем, что пара подпространств (A,W), где $A, W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ и A — k-алгебра с единицей, причем $WA \subset W$ — α-пара Шура, если $A \subset \Pi_\alpha$ (см. следствие 2.2) и W — α-пространство.

Скажем, что α-пара Шура α-квази-эллиптична, если A — α-квази-эллиптическое кольцо (см. определение 2.18; мы отождествляем здесь кольцо $k[z_1^{-1}]((z_2))$ с кольцом $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ через соответствие $z_1 \mapsto \partial_1^{-1}$, $z_2 \mapsto \partial_2^{-1}$).

Определение 3.3 (ср. [43, определение 1]). Оператор $T \in \hat{E}_+$ называется допустимым, если он обратим, порядка нуль и такой, что $T\partial_1T^{-1}$, $T\partial_2T^{-1} \in k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$. Множество всех допустимых операторов обозначим через Adm (ср. классификацию допустимых операторов в [43, лемма 7]).

Оператор $T \in \hat{E}_+$ называется α-допустимым, если он допустим и удовлетворяет условию A_α (в этом случае по лемме 2.8 имеем $T\partial_1T^{-1}$, $T\partial_2T^{-1} \in \Pi_\alpha$). Множество всех α-допустимых операторов обозначим через Adm_α.

Скажем, что две α-пары Шура (A,W) и (A',W') эквивалентны, если $A' = T^{-1}AT$ и $W' = WT$, где T — допустимый оператор.

Определение 3.4. Коммутативные α-квази-эллиптические кольца B_1, $B_2 \subset \hat{D}$ эквивалентны, если существует обратимый оператор $S \in \hat{D}_1$, как в лемме 2.10, 1b такой, что $B_1 = SB_2S^{-1}$.

Объединяя все рассуждения выше вместе, получаем:

Теорема 3.2. *Существует взаимно-однозначное соответствие между классами эквивалентности* 1*-квази-эллиптических пар Шура* (A, W) *из определения* 3.3 *с носителем* $\mathrm{Supp}(W) = \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \quad | i, j \geqslant 0\rangle$ *и классами эквивалентности* 1*-квази-эллиптических колец* (*см. определения* 2.18, 3.4) *коммутирующих операторов* $B \subset \hat{D}$.

Замечание 3.1. Пара (A, W) — аналог пары Шура, см. [27] и также [6].

Мы ограничились рассмотрением случая 1-квази-эллиптических колец в теореме 3.2 только из-за лемм 2.10, 2b о возможности нормализации. То же утверждение верно, если заменить слова „1-квази-эллиптические“ на „квази-эллиптические“. Доказательство то же.

Мы закончим этот пункт следующим утверждением о „чистоте“ 1-квази-эллиптических подколец дифференциальных операторов в частных производных.

Предложение 3.1. *Пусть* $B \subset D \subset \hat{D}$ — 1*-квази-эллиптическое кольцо коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. Тогда любое кольцо* $B' \subset \hat{D}$ *коммутирующих операторов такое, что* $B' \supset B$, — *кольцо дифференциальных операторов в частных производных, т.е.* $B' \subset D$.

Доказательство. Если $B \subset D$, то в силу леммы 2.11, 1b оператор S такой, что $SBS^{-1} = A \subset k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$, принадлежит E. Так как B' — 1-квази-эллиптическое кольцо, имеем также $SB'S^{-1} \subset k[\partial_1]((\partial_2^{-1})) \subset E$. Следовательно, $B' \subset \hat{D} \cap E = D$. □

3.2. Соответствие между парами Шура и геометрическими данными. Теперь мы собираемся установить соответствие между некоторыми 1-квази-эллиптическими парами Шура и геометрическими данными из так называемого обобщенного соответствия Кричевера–Паршина, см. [33, 10, 21] (на самом деле, мы несколько модифицируем эти данные, см. определение 3.10 и замечание 3.6 ниже). Мы будем рассматривать не все 1-квази-эллиптические пары Шура, но лишь те, которые удовлетворяют условию строгой допустимости (см. определения ниже). Подчеркнем, что такие пары включают, в частности, все пары, происходящие из колец дифференциальных операторов в частных производных, которые упоминались в начале предыдущего параграфа. В результате мы получим соответствие между 1-квази-эллиптическими строго допустимыми кольцами коммутирующих операторов в $\hat{D}$ и геометрическими данными.

Для этого нам потребуется следующий „трюк“.

Лемма 3.2. *Пусть W — замкнутое k-подпространство $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ с носителем $\mathrm{Supp}(W) = \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \mid i,j \geqslant 0\rangle$. Пусть $\{w_{i,j}, i,j \geqslant 0\}$ — базис в W, однозначно определенный условиями $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^{-}$, где $w_{i,j}^{-} \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$. Предположим, что все элементы $w_{i,j}$ удовлетворяют условию A_α с $\alpha \geqslant 1$.*

Тогда существует изоморфизм

$$\psi_\alpha : W \to W'$$

пространства W с замкнутым k-подпространством $W' \subset k[[u]]((t))$ с носителем $\mathrm{Supp}(W') = \langle u^i t^{-j[\alpha]-i} \mid i,j \geqslant 0\rangle$, где $[\alpha]$ — наименьшее целое число большее или равное α.

Доказательство. Рассмотрим композицию отображений $z_1 \mapsto u' := z_1^{-1}$, $z_2 \mapsto t^{[\alpha]}$, и $u' \mapsto u = u't$. Согласно условиям леммы образы элементов $w_{i,j}$ будут корректно определенными элементами из $k[[u]]((t))$, композиция этих отображений является, очевидно, k-линейным отображением и изоморфизмом W на замкнутое k-подпространство $W' \subset k[[u]]((t))$ с нужными свойствами. В дальнейшем будем обозначать эту композицию через ψ_α. □

Следствие 3.3. *Пусть W — замкнутое k-подпространство, как в лемме, и пусть $\alpha = 1$. Тогда W' из леммы имеет носитель $\mathrm{Supp}(W') = \langle u^i t^{-j} \mid i,j \geqslant 0, i-j \leqslant 0\rangle$.*

Более того, в этом случае изоморфизм ψ_1 индуцирует изоморфизм

$$\psi_1 : k[z_1^{-1}]((z_2)) \cap \Pi_1 \to k[[u]]((t)).$$

Доказательство очевидно.

Замечание 3.2. Рассмотрим подпространство W в $k[[u]]((t))$ с носителем $\mathrm{Supp}(W) = \langle u^i t^{-j} \quad | i,j \geqslant 0, i-j \leqslant 0\rangle$ (ср. следствие 3.3). Пусть A — стабилизатор пространства W: $A \cdot W \subset W$. Для всякого элемента $a \in A$ имеем $\mathrm{LT}(a) \in \mathrm{Supp}(W)$, поскольку для всякого элемента $w \in W$ с $\mathrm{LT}(w) = 1$ выполнено $\mathrm{LT}(aw) = \mathrm{LT}(a)$. Таким образом, $\mathrm{Supp}(A) \subset \mathrm{Supp}(W)$. Из [6, лемма 2] известно, что $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) \leqslant 2$, где $\mathrm{Quot}(A)$ — поле частных кольца A.

Если стартовать с кольца B коммутирующих операторов, как в теореме 3.2 (см. также замечание 3.1), и применить следствие 3.3 к паре (W, A)

из замечания 3.1, мы получим пару (W, A) в $k[[u]]((t))$, как выше, со свойством $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$ и с другим свойством, которое мы выделим в следующем определении.

Определение 3.5. Обозначим через ν_t или ν_2 дискретное нормирование поля $k((u))((t))$ рядов по t. Обозначим через ν_u или ν_1 дискретное нормирование поля $k((u))$. Эти нормирования образуют нормирование ранга два $\nu = \mathrm{ord}_\Gamma$ (ср. определение 2.5) поля $k((u))((t))$: $\nu(a) = (\nu_u(\bar{a}), \nu_t(a))$, где $\bar{a}$ обозначает вычет элемента $at^{-\nu_t(a)}$ в кольце нормирования ν_t.

Для кольца $A \subset k[[u]]((t))$ определим число

$$N_A = GCD\{\nu_t(a), \quad a \in A \quad \text{такой, что} \quad \nu(a) = (0, *)\},$$

где $*$ обозначает любое значение нормирования.

Будем говорить, что кольцо A допустимо, если существует элемент $a \in A$ со свойством $\nu(a) = (1, *)$.

В частности, кольцо A, полученное из кольца B выше, является допустимым, поскольку B содержит оператор специального вида (условие квази-эллиптичности). Образ этого оператора после преобразования из леммы 3.2 удовлетворяет свойству из определения допустимого кольца.

Предложение 2.4 служит мотивировкой для следующего определения.

Определение 3.6. Для кольца $A \subset k[[u]]((t))$ определим число

$$\tilde{N}_A = GCD\{\nu_t(a), \ \ a \in A\}.$$

Скажем, что кольцо A строго допустимо, если оно допустимо и $\tilde{N}_A = N_A$.

Определение 3.7. Скажем, что 1-квази-эллиптическое кольцо $A \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ из определения 3.2 строго допустимо, если его образ $\psi_1(A)$ при изоморфизме из леммы 3.2 строго допустим.

Замечание 3.3. Заметим, что образ $\psi_1(A)$ 1-квази-эллиптического кольца A допустим. Обратно, кольцо $\psi_1^{-1}(A)$, где A — допустимое кольцо, — 1-квази-эллиптическое кольцо.

Для 1-квази-эллиптических коммутативных колец $B \subset \hat{D}$ можно обобщить определения 2.10, 2.11, и эти определения будут тесно связаны с определениями 3.5, 3.6: по теореме 3.2 B соответствует паре Шура (A, W) с точностью до эквивалентности, т.е. кольцо A определено с точностью до сопряжения на 1-допустимый оператор. Однако всегда $A \subset \Pi_1$ и A — 1-квази-эллиптическое кольцо.

Определение 3.8. Для 1-квази-эллиптического коммутативного кольца $B \subset \hat{D}$ положим числа $\tilde{N}_B$, N_B равными числам $\tilde{N}_A$, N_A (см. определение 3.7). Скажем, что B строго допустимо, если A строго допустимо.

Мы утверждаем, что наше определение корректно, т.е. не зависит от сопряжения кольца A на 1-допустимый оператор. Как мы видели в доказательстве следствия 3.1, каждый оператор X из A записывается в виде конечной суммы $X = \sum c_{ij} w_{0,0}^{-1} w_{i,j}$, $c_{ij} \in k$. Пусть (k,l) — максимальная пара чисел (относительно антилексикографического порядка) такая, что $c_{kl} \neq 0$ и $k+l \geqslant i+j$ для всех (i,j) с $c_{ij} \neq 0$. Легко видеть, что $\nu(\psi_1(X)) = (k,l)$. Пусть T — 1-допустимый оператор. Тогда, используя лемму 2.8, получаем, что $\nu(\psi_1(TXT^{-1})) = \nu(\psi_1(X)) = (k,l)$. А значит, определение чисел $\tilde{N}_B$, N_B не зависит от сопряжения. Снова используя лемму 2.8, можно увидеть, что это определение совпадает с определениями 2.10, 2.11, если $B \subset D$.

Напомним еще одно определение (см., например, [6]).

Определение 3.9. Для k-подпространства W в $k((u))((t))$, для $i, j \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $i < j$, положим

$$W(i,j) = \frac{W \cap t^i k((u))[[t]]}{W \cap t^j k((u))[[t]]}$$

— k-подпространство в $\frac{t^i k((u))[[t]]}{t^j k((u))[[t]]} \simeq k((u))^{j-i}$.

Заметим, что для пространств W, A из замечания 3.2 пространства $W(i,1), A(i,1)$ совпадают с пространствами $W \cap t^i k[[u]][[t]]$, $A \cap t^i k[[u]][[t]]$ фильтрации, определенной нормированием ν_2.

Лемма 3.3. *Пусть $A \subset k[[u]][[t]]$ — коммутативная k-алгебра с единицей, причем $\mathrm{Supp}(A) \subset \langle u^i t^{-j} \quad | i, j \geqslant 0, i - j \leqslant 0\rangle$. Положим $\tilde{A} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A(-n,1)$. Пусть $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$ и пусть либо*

$$\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A(-n,1)/A(-n+1,1),$$

либо $\tilde{A}$ конечно порождены как k-алгебры. Тогда

(1) *Однородный идеал $I = \tilde{A}(-1)$ прост и определяет приведенную неприводимую замкнутую подсхему C на проективной поверхности $X = \operatorname{Proj} \tilde{A}$, которая является обильным эффективным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором (т.е. dC — обильный эффективный дивизор Картье, см. замечание 3.4).*

(2) *Если A — допустимое кольцо и $N_A = 1$, то центр P нормирования ν, индуцированного на поле частных* $\mathrm{Quot}(\tilde{A})$ *одноименным нормированием двумерного локального поля $k((u))((t))$, является замкнутой регулярной точкой кривой C и поверхности X* (*ср.* [12, гл. II, пример 4.5]).

Доказательство. 1) Обозначим через $i : I \to \tilde{A}$ естественное вложение. Очевидно, $I = (i(1))$, где $1 \in I_1 = \tilde{A}_0$ и $i(1) \in \tilde{A}_1$. Пусть $a \in \tilde{A}_k$, $b \in \tilde{A}_l$ — два однородных элемента, причем $a, b \notin I$. Это возможно, если и только если $\nu_2(a) = -k$, $\nu_2(b) = -l$ (заметим, что такие элементы существуют из-за сделанных предположений на носитель и степень трансцендентности A). Следовательно, $\nu_2(ab) = -k - l$ и произведение $ab \in \tilde{A}_{k+l}$ не может принадлежать I, т.е. I — простой однородный идеал.

В силу [20, предложение 2.4.4] схемы $\mathrm{Proj}\,\tilde{A}$ и $\mathrm{Proj}\,\tilde{A}/I$ целые. Таким образом, идеал I определяет приведенную и неприводимую замкнутую подсхему C в X.

Если $\mathrm{gr}(A)$ конечно порождена, то $\tilde{A}$ также конечно порождена над k (легко проверить, что $\tilde{A}$ порождена элементами $\tilde{b_1}, \dots, \tilde{b_p}, i(1)$ как k-алгебра, где $\tilde{b_1}, \dots, \tilde{b_p}$ — подъемы порождающих $b_1, \dots, b_p$ алгебры $\mathrm{gr}(A)$, ср. также [2, гл. III, §2.9]). По лемме в [29, гл. III, §8] существует $d \in \mathbb{N}$ такое, что градуированное кольцо $\tilde{A}^{(d)} = \oplus_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_{kd}$ порождено $\tilde{A}_1^{(d)}$ над k (и $\tilde{A}_1^{(d)}$ — конечно порожденное k-подпространство из-за условия на носитель A). Мы утверждаем, что dC — дивизор Картье. Действительно, он определен идеалом $I^d = (i(1)^d)$, и $i(1)^d \in \tilde{A}_1^{(d)}$. В силу [20, предложение 2.4.7] имеются изоморфизмы $\mathrm{Proj}\,\tilde{A} \simeq \mathrm{Proj}\,\tilde{A}^{(d)}$ и $\mathrm{Proj}\,\tilde{A}/I \simeq \mathrm{Proj}\,\tilde{A}^{(d)}/I^{(d)}$. Таким образом, достаточно показать, что идеал $I^{(d)}$ в $\tilde{A}^{(d)}$ определяет дивизор Картье. Но это очевидно, поскольку открытые множества $D(x_i)$, где $x_i \in \tilde{A}_1^{(d)}$, образуют покрытие X, и в каждом множестве $D(x_i)$ идеал $I^{(d)}$ порожден элементом $i(1)^d/x_i$.

Наконец, dC — очень обильный дивизор, поскольку является гиперплоским сечением при вложении $\mathrm{Proj}\,\tilde{A}^{(d)} \hookrightarrow \mathrm{Proj}\,\tilde{A}_1^{(d)} \simeq \mathbb{P}^N$.

2) Так как X — проективная схема (а следовательно, собственная над k, см., например, [12, гл. II, §4]), существует единственный центр P нормирования ν, см. [12, гл. II, пример 4.5]. Заметим, что P принадлежит аффинному множеству $\mathrm{Spec}\,\tilde{A}_{(x)}$, где $x \in \tilde{A}$ — элемент со свойствами $\nu(x) = (0, *)$, $x \notin I$ (такой элемент существует, поскольку $N_A = 1$), так как $\tilde{A}_{(x)}$ принадлежит кольцу нормирования R_ν: действительно, если $x \in \tilde{A}_k$, то $\nu_t(x) = k$, и $\nu(a/x^l) = (p, q)$, где $p, q \geqslant 0$ для всех $a \in \tilde{A}_{kl}$. Более того, легко видеть, что элемент $x^{-1} \in k((u))((t))$ (мы рассматриваем

здесь $\tilde{A}_k = A(-k,1)$ как векторное подпространство в $k((u))((t))$, так что $x \in k((u))((t)))$ удовлетворяет свойству $x^{-1} \in k[[u]][[t]] = k[[u,t]]$. Таким образом, есть естественное вложение $\tilde{A}_{(x)} \hookrightarrow k[[u,t]]$.

Так как A — допустимое кольцо и $N_A = 1$, то существуют элементы $u', t' \in \tilde{A}_{(x)}$ со свойствами $\nu(u') = (1,0)$ и $\nu(t') = (0,1)$. Пусть $B = \tilde{A}_{(x)}$ и пусть $p \in B$ — идеал, соответствующий точке P. Ясно, что $u', t' \in p$ и $p = B \cap (u,t)$, где (u,t) — идеал в $k[[u,t]]$. Таким образом, $B/p \simeq k$ и, следовательно, p — максимальный идеал. Так как всякий элемент $a \in k[[u,t]]$ с $\nu(a) = (0,0)$ обратим, получаем $B_p \subset k[[u,t]]$. Обозначим через p' максимальный идеал в B_p.

Определим линейную топологию на B_p, беря в качестве открытых идеалов идеалы вида $M_k := (u,t)^k \cap B_p$. Она отделима, поскольку $\cap (u,t)^k = 0$ в кольце $k[[u,t]]$. Так как $p \subset (u,t)$, то также ${p'}^k \subset M_k$ для всех k. Таким образом, имеется точная последовательность проективных систем:

$$0 \to M_k/{p'}^k \to B_p/{p'}^k \to B_p/M_k \to 0.$$

Заметим, что все естественные гомоморфизмы $M_{k+1}/{p'}^{k+1} \to M_k/{p'}^k$ сюръективны. Действительно, для данного $a \in M_k$ можно найти такие константы $c_i \in k$, $i = 0, \dots k$, что $a - \sum_{i=0}^k c_i {u'}^i {t'}^{k-i} \in M_{k+1}$. Так как $\sum_{i=0}^k c_i {u'}^i {t'}^{k-i} \in {p'}^k$, то a принадлежит образу группы $M_{k+1}/{p'}^{k+1}$. Таким образом, система $\{M_k/{p'}^k\}$ удовлетворяет условию Миттаг–Лефлера, и, следовательно, имеется сюръективный гомоморфизм топологических колец

$$\rho : \hat{B}_p \to \tilde{B}_p,$$

где $\hat{B}_p = \varprojlim B_p/{p'}^k$, $\tilde{B}_p = \varprojlim B_p/M_k$. Заметим, что ρ сохраняет кольцо $k[u',t']$, и это кольцо плотно в $\tilde{B}_p$.

С другой стороны, существует естественный гомоморфизм топологических колец $\rho' : k[[u',t']] \to \hat{B}_p$, который также сохраняет кольцо $k[u',t']$. Таким образом, композиция $\rho\rho'$ — гомоморфизм полных топологических колец, сохраняющий $k[u',t']$, и кольцо $k[u',t']$ плотно в обоих кольцах. Следовательно, это изоморфизм $k[[u',t']] \simeq \tilde{B}_p$. Таким образом, кольцо $\tilde{B}_p$ регулярно размерности Крулля 2.

В силу [1, следствие 11.19] имеем неравенство $\dim \hat{B}_p \leqslant 2$, откуда следует, что ρ должно быть инъективно, т.е. оно должно быть изоморфизмом. Тогда по [1, предложение 11.24] кольцо B_p регулярно, т.е. P — регулярная замкнутая точка на X.

Легко видеть, что $(t) \cap B = I_{(x)}$, где (t) — идеал в кольце $k[[u,t]]$. Таким образом, существует вложение $B/I_{(x)} \hookrightarrow k[[u]]$. Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем $(\widehat{B/I_{(x)}})_p \simeq k[[u]]$, откуда следует, что P — регулярная точка на C. $\square$

Замечание 3.4. Для произвольной проективной поверхности X существует естественный гомоморфизм (в общем случае не инъективный) $Div(X) \to Z^1(X)$ группы дивизоров Картье $Div(X)$ в группу дивизоров Вейля $Z^1(X)$. Утверждение леммы говорит, что схема, определенная пучком идеалов $\mathcal{I}^d$, является локально главной подсхемой в X и, следовательно, определяет эффективный дивизор Картье D. Так как X — целая схема, имеется изоморфизм $CaCl(X) \simeq Pic(X)$. В силу [12, предложение 6.18, ч. 2] $\mathcal{I}^d \simeq \mathcal{O}(-D)$. Утверждение леммы говорит, что пучок $\mathcal{O}(D)$ обилен (ср. [23, §2.4, приложение]).

Лемма 3.4. *Пусть $A \subset k[[u]]((t))$ — строго допустимое кольцо. Тогда существуют ряд с единичным старшим коэффициентом $t' \in k[[u]]((t))$ с нормированием $\nu(t') = (0, N_A)$ и ряд с единичным старшим коэффициентом $u' \in k[[u]]((t))$ с нормированием $\nu(u') = (1,0)$ такие, что $A \subset k[[u']]((t')) \subset k[[u]]((t))$ и в $k[[u']]((t'))$ кольцо A имеет число $N'_A = 1$.*

Доказательство. Так как A строго допустим, то существуют два элемента $a, b \in A$ такие, что $\nu(a) = (0, k_1)$, $\nu(b) = (0, k_2)$ и $GCD(k_1, k_2) = N_A$. Тогда существует обратимый ряд с единичным старшим коэффициентом $t' \in A_{ab} \subset k[[u]]((t))$ такой, что $\nu(t') = (0, N_A)$ и, следовательно, существует ряд с единичным старшим коэффициентом $u' \in A_{ab}$, такой что $\nu(u') = (1,0)$.

Пусть $v \in A$ — произвольный элемент с нормированием $\nu(v) = (k, lN_A)$. Тогда мы можем выбрать константу $c_{k,l} \in k$ таким образом, что $\nu(v - c_{k,l}{u'}^k{t'}^l) = (k_1, l_1 N_A) < (k, lN_A)$. Если продолжить эту процедуру, мы получим последовательность констант $c_{k,l}, c_{k_1,l_1}, \dots$ такую, что

$$v - \sum c_{k_i,l_i}{u'}^{k_i}{t'}^{l_i} = 0$$

(легко видеть, что ряд в формуле сходится). Таким образом, $A \subset k[[u']]((t'))$. В кольце $k[[u']]((t'))$ имеем $GCD(\nu_{t'}(a), \nu_{t'}(b)) = 1$. Следовательно, $N'_A = 1$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $W, A \subset k[[u]]((t))$ — подпространства такие, что* $\mathrm{Supp}(W) = \langle u^i t^{-j} \quad | i,j \geqslant 0, i-j \leqslant 0 \rangle$, *$A$ — кольцо, стабилизатор пространства W: $A \cdot W \subset W$ (ср. замечание* 3.2). *Предположим, что* $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$, $\mathrm{gr}(A)$ *либо $\tilde{A}$ конечно порождена, как k-алгебра, и*

A — строго допустимое кольцо, $A \subset k[[u']]((t'))$ (см. лемму 3.4). Положим $\tilde{W} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} W(-n,1)$ (см. определение 3.9). Тогда

(1) *Пучок $\mathcal{F} = \mathrm{Proj}(\tilde{W})$ — квазикогерентный пучок без кручения*[1] *на поверхности X, построенной по $A \subset k[[u']]((t'))$, как в лемме 3.3. Более того, имеются естественные вложения $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$ и колец $\widehat{\mathcal{O}}_P \hookrightarrow k[[u',t']] \subset k[[u,t]]$, где последнее вложение является изоморфизмом.*

(2) *Пусть $C' = dC$ — очень обильный дивизор Картье на X из леммы 3.3.*

Естественные вложения $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}(nC') \simeq \mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$, определенные при помощи вложения $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$ из п. 1, в композиции с гомоморфизмами $k[[u,t]] \to k[[u,t]]/(u,t)^{ndN_A+1}$ дают изоморфизмы

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq k[[u,t]]/(u,t)^{ndN_A+1}$$

для всех $n \geqslant 0$.

Доказательство. 1) Те же рассуждения, которые использовались в доказательстве леммы 3.3, п. 2, показывают, что имеются естественные вложения колец $\mathcal{O}_P \hookrightarrow k[[u',t']] \subset k[[u,t]]$, $\widehat{\mathcal{O}}_P \simeq k[[u',t']] \hookrightarrow k[[u,t]]$. Они определяют структуру $\mathcal{O}_P$ и $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модулей на $k[[u,t]]$. Так как $\tilde{W}$ — $\tilde{A}$-модуль без кручения, пучок $\mathcal{F}$ также без кручения. Поэтому есть естественно определенное вложение $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$.

Замечание 3.5. Так как W содержит элементы с любыми значениями нормирования вида $(0,k)$, $k \leqslant 0$ (из-за наших предположений на носитель W), существуют элементы $f_1, \dots, f_{N_A} \in \mathcal{F}_P \subset k[[u,t]]$ такие, что $\nu(f_i) = (0, i-1)$, $i = 1, \dots N_A$. Ясно, что пучок $\mathcal{F}$ может быть представлен как прямой предел когерентных пучков, $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_i$, причем $f_1, \dots, f_{N_A} \in \mathcal{F}_{iP}$ для любого i. Рассмотрим отображение

$$\mathcal{O}_P^{\oplus N_A} \to \mathcal{F}_{iP} \subset k[[u,t]], \quad (a_1, \dots a_{N_A}) \mapsto a_1 f_1 + \dots + a_{N_A} f_{N_A}. \tag{14}$$

Ясно, что это вложение $\mathcal{O}_P$-модулей (так как элементы $a_i f_i$ имеют разные значения нормирования в кольце $k[[u,t]]$ и нет кручения, их сумма не может быть равной нулю). Рассуждая, как в доказательстве леммы 3.3, п. 2, получаем, что отображение

$$\widetilde{\mathcal{O}}_P^{\oplus N_A} \to \widetilde{\mathcal{F}_{iP}} \simeq k[[u,t]]$$

[1]Здесь и далее в этой статье мы используем нестандартное обозначение Proj для квазикогерентного пучка, ассоциированного с градуированным модулем.

является изоморфизмом $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модулей для каждого i (пополнение берется относительно M_k-адической топологии). Кроме того, имеется сюръективный гомоморфизм модулей $\rho : \widehat{\mathcal{F}}_P \to \widetilde{\mathcal{F}}_P$. Этот гомоморфизм может иметь нетривиальное ядро, см., например, замечание 3.3 и следствие 3.1 в [23].

2) Так как $\mathcal{F}$ — пучок без кручения, определены канонические вложения $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}_P(nC')$ для всех $n \geqslant 0$. Имеем $\mathcal{F}_P(nC') \simeq \mathcal{F}_P$, и изоморфизм этих $\mathcal{O}_P$-модулей задается умножением на x^{-1}, где $x \in \tilde{A}$ — элемент со свойством $\nu(x) = (0, -ndN_A)$, как в доказательстве п. 2 леммы 3.3. В доказательстве п. 1 мы также видели, что $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$.

Заметим, что для всех n имеются изоморфизмы

$$\mathrm{Proj}(\tilde{W}(ndN_A)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(dN_A)}(n))$$

по [20, предложение 2.4.7], и $\mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(dN_A)}(n)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(dN_A)})(n) \simeq \mathcal{F}(nC')$ по [12, гл. II, предложение 5.12]. Аналогично $\mathrm{Proj}(\tilde{A}(ndN_A)) \simeq \mathcal{O}_X(nC')$. Чтобы закончить доказательство, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.5. *Имеют место равенства*

$$H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{W}(ndN_A))) = W(-ndN_A, 1),$$
$$H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{A}(ndN_A))) = A(-ndN_A, 1)$$

для всех $n \geqslant 0$.

Доказательство. Доказательство одинаковое для обоих пучков. Мы проведем его для пучка $\mathcal{F}$.

По определению $W(-ndN_A, 1) = (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_0 \subset H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{W}(ndN_A)))$. Положим $\tilde{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A'(-n, 1)$, где $A'(-n,1)$ — подпространства, определенные в $k[[u']]((t'))$. Заметим, что $A'(-n,1) = A(-nN_A, 1)$, так что $\tilde{W}^{(dN_A)}(n)$ — градуированный $\tilde{A}^{(d)}$-модуль. Напомним (см. лемму 3.3), что алгебра $\tilde{A}^{(d)}$ порождена $\tilde{A}_d$ как k-алгебра.

Пусть $a \in H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{W}(ndN_A)))$, $a \notin W(-ndN_A, 1)$. Тогда $a = (a_1, \ldots, a_k)$, где $a_i \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{(x_i)}$, $x_i \in \tilde{A}_d$ — порождающие пространства $\tilde{A}_d$ такие, что $x_1 = 1_1^d$, и $a_i = a_j$ в $\tilde{A}_{x_i x_j}$ (здесь 1_1 обозначает элемент 1 в компоненте $\tilde{A}_1$).

Имеем $a_i = \tilde{a}_i / x_i^{k_i}$ ($\tilde{a}_i \in \tilde{W}^{(dN_A)}(n)_{k_i} = \tilde{W}_{(k_i+n)dN_A}$), $a_1 = \tilde{a}_1 / x_1^{k_1}$ и $k_1 > 0$, так как $a \notin W(-ndN_A, 1)$. Действительно, если $\tilde{a}_1 \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_0 = W(-ndN_A, 1)$, то $a = \tilde{a}_1$, поскольку $\tilde{W}^{(dN_A)}(n)$ — $\tilde{A}^{(d)}$-модуль без кручения, противоречие. Таким образом, имеем

$$\tilde{a}_1 \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1} \backslash (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1 - 1}$$

(или, эквивалентно, $(n+k_1)dN_A \geqslant \nu_t(\tilde{a}_1) > (n+k_1-1)dN_A$).

Тогда для $x_i \in \tilde{A}_d \backslash \tilde{A}_{d-1}$ (такой элемент x_i существует, поскольку все элементы из $\tilde{A}_{d-1} \subset \tilde{A}_d$ лежат в идеале, определяющем дивизор C) имеем $x_i^{k_i} \in \tilde{A}_{dk_i} \backslash \tilde{A}_{dk_i-1}$ (или, эквивалентно, $\nu_t(x_i^{k_i}) = dk_iN_A$), и, следовательно,

$$\tilde{a}_1 x_i^{k_i} \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1+k_i} \backslash (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1+k_i-1},$$

так как $\nu_t(\tilde{a}_1 x_i^{k_i}) > (n+k_1+k_i-1)dN_A$.

С другой стороны, мы имеем равенство $\tilde{a}_1 x_i^{k_i} = \tilde{a}_i x_1^{k_1}$, и

$$\tilde{a}_i x_1^{k_1} \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1+k_i-1} \subset (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1+k_i},$$

так как $\nu_t(\tilde{a}_i x_1^{k_1}) = \nu_t(\tilde{a}_i) \leqslant (n+k_i+k_1-1)dN_A$, противоречие. Таким образом, $a \in W(-ndN_A, 1)$. □

Теперь мы имеем вложения

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) = W(-ndN_A, 1) \hookrightarrow \mathcal{F}(nC')_P \simeq \mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]],$$

определенные умножением на x^{-1}. Из-за условий на носитель пространства W композиция с гомоморфизмами $k[[u,t]] \to k[[u,t]]/(u,t)^{ndN_A+1}$ дает изоморфизмы

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq k[[u,t]]/(u,t)^{ndN_A+1}$$

для каждого $n \geqslant 0$. Заметим, что они не зависят от выбора изоморфизма $\mathcal{F}_P(nC') \simeq \mathcal{F}_P$. □

Теперь мы собираемся установить соответствие между парами Шура и геометрическими данными из леммы 3.3 и предложения 3.2. Наиболее подходящий способ сделать это — установить категорную эквивалентность, обобщающую соответствующую эквивалентность в одномерном случае, см. [27, теорема 4.6], поскольку мы имеем дело с большим количеством данных.

Определение 3.10. Назовем набор $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ геометрическими данными ранга r, если

(1) X — приведенная неприводимая проективная алгебраическая поверхность, определенная над полем k;
(2) C — приведенный неприводимый обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X;
(3) $P \in C$ — замкнутая k-точка, которая регулярна на C и на X;
(4)
$$\pi : \widehat{\mathcal{O}}_P \longrightarrow k[[u,t]]$$
— гомоморфизм колец такой, что образ максимального идеала кольца $\widehat{\mathcal{O}}_P$ лежит в максимальном идеале (u,t) кольца $k[[u,t]]$, и

$\nu(\pi(f)) = (0, r)$, $\nu(\pi(g)) = (1, 0)$, где $f \in \mathcal{O}_P$ — локальное уравнение кривой C в окрестности P (так как P — регулярная точка, пучок идеалов C в P порожден одним элементом), и $g \in \mathcal{O}_P$, ограниченный на C, — локальное уравнение точки P на C (таким образом, g, f — порождающие максимального идеала $\mathcal{M}_P$ в $\mathcal{O}_P$).

Раз и навсегда мы выбираем параметры u, t и фиксируем их (заметим, что $k[[u, t]]$ — свободный $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модуль ранга r);

(5) $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок без кручения на X;

(6) $\phi : \mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u, t]]$ — вложение $\mathcal{O}_P$-модулей такое, что гомоморфизмы

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \to k[[u, t]]/(u, t)^{ndr+1},$$

полученные как композиции естественных гомоморфизмов

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}(nC')_P \overset{f^{nd}}{\simeq} \mathcal{F}_P \overset{\phi}{\hookrightarrow} k[[u, t]] \to k[[u, t]]/(u, t)^{ndr+1},$$

где $C' = dC$ — очень обильный дивизор, — изоморфизмы для всех $n \geqslant 0$.

Два набора данных $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi_1, \phi_1)$ и $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi_2, \phi_2)$ отождествляются, если образы вложений (полученные с помощью умножения на f^{nd}, как выше)

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}_P \overset{\phi_1}{\hookrightarrow} k[[u, t]], \quad H^0(X, \mathcal{O}(nC')) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_P \overset{\pi_1}{\hookrightarrow} k[[u, t]]$$

и

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}_P \overset{\phi_2}{\hookrightarrow} k[[u, t]], \quad H^0(X, \mathcal{O}(nC')) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_P \overset{\pi_2}{\hookrightarrow} k[[u, t]]$$

совпадают для всех $n \geqslant 0$. Множество всех данных ранга r обозначим через $\mathcal{Q}_r$.

Замечание 3.6. Наше определение геометрических данных слегка более общее, чем аналогичные определения в работах [33, 10]. В частности, мы не требуем, чтобы поверхность была Коэно–Маколеевой, дивизор C может быть не дивизором Картье, но $\mathbb{Q}$-Картье, и пучок $\mathcal{F}$ может не быть локально свободным.

Эти ограничения в определениях работ [33, 10] объясняются тем, что геометрические данные с этими ограничениями могут быть восстановлены с помощью некоторой комбинаторной конструкции по подпространствам, лежащим в образе отображения Кричевера–Паршина (см. там же). В настоящей работе эта конструкция не нужна.

Замечание 3.7. Отметим, что ранг r геометрических данных в общем случае отличается от ранга пучка $\mathcal{F}$, ср. [23, замечание 3.3].

Если $\mathcal{F}_P$ — свободный $\mathcal{O}_P$-модуль ранга r, то ϕ индуцирует изоморфизм $\widehat{\mathcal{F}}_P \simeq k[[u,t]]$ $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модулей. Это условие выполняется, если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга r, см. [23, следствие 3.1].

Определение 3.11. Определим категорию $\mathcal{Q}$ геометрических данных следующим образом:

(1) Множество объектов

$$Ob(\mathcal{Q}) = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{Q}_r.$$

(2) Морфизм

$$(\beta,\psi) : (X_1, C_1, P_1, \mathcal{F}_1, \pi_1, \phi_1) \to (X_2, C_2, P_2, \mathcal{F}_2, \pi_2, \phi_2)$$

двух объектов состоит из морфизма $\beta : X_1 \to X_2$ поверхностей и гомоморфизма $\psi : \mathcal{F}_2 \to \beta_*\mathcal{F}_1$ пучков на X_2, причем

(a) $\beta|_{C_1} : C_1 \to C_2$ — морфизм кривых;

(b)

$$\beta(P_1) = P_2.$$

(c) Существует непрерывный изоморфизм колец $h : k[[u,t]] \to k[[u,t]]$ такой, что

$$h(u) = u \mod (u^2) + (t), \quad h(t) = t \mod (ut) + (t^2),$$

и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} k[[u,t]] \arrow[r, "h"] & k[[u,t]] \\ \widehat{\mathcal{O}}_{X_2,P_2} \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\beta^\sharp_{P_1}"] & \widehat{\mathcal{O}}_{X_1,P_1} \arrow[u, "\pi_1"] \end{tikzcd}$$

(d) Обозначим через $\beta_*(\phi_1)$ композицию морфизмов $\mathcal{O}_{P_2}$-модулей

$$\beta_*(\phi_1) : \beta_*\mathcal{F}_{1P_2} \to \mathcal{F}_{1P_1} \hookrightarrow k[[u,t]].$$

Существует изоморфизм $k[[u,t]]$-модулей $\xi : k[[u,t]] \simeq h_*(k[[u,t]])$ такой, что следующие диаграммы морфизмов $\mathcal{O}_{P_2}$-модулей коммутативны:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{2P_2} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi_2"] & \beta_*\mathcal{F}_{1P_2} \arrow[d, "\beta_*(\phi_1)"] \\ k[[u,t]] \arrow[r, "\xi"] & h_*(k[[u,t]]) = k[[u,t]] \end{tikzcd}$$

Определение 3.12. Пару (A, W), где $A, W \subset k[[u]]((t))$, будем называть парой Шура ранга r, если выполняются следующие условия:

(1) A — k-алгебра с единицей, $\mathrm{Supp}(W) = \langle u^i t^{-j} \mid i, j \geqslant 0, i - j \leqslant 0\rangle$ и $A \cdot W \subset W$.

(2) A — строго допустимое кольцо (см. определение 3.6), A конечно порождена, как k-алгебра, $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$ и $N_A = r$.

Обозначим через $\mathcal{S}_r$ множество всех пар Шура ранга r.

Замечание 3.8. Ясно, что для данной пары Шура (A, W) пара $(\psi_1^{-1}(A), \psi_1^{-1}(W))$ (см. следствие 3.3, где дано определение ψ_1) является 1-квази-эллиптической парой Шура из определения 3.2. Обратно, если (A, W) — 1-квази-эллиптическая пара Шура такая, что A — строго допустимое кольцо, то $(\psi_1(A), \psi_1(W))$ — пара Шура.

Определение 3.13. Для данного подпространства $W \subset k[[u]]((t))$ определим действие оператора $T \in \Pi_1$ (см. следствие 2.2) на W по формуле

$$WT = \psi_1(\psi_1^{-1}(W)T).$$

Если T — 1-допустимый оператор (см. определение 3.3) и $A \subset k[[u]]((t))$ — подкольцо, определим

$$T^{-1}AT = \psi_1(T^{-1}\psi_1^{-1}(A)T).$$

Определение 3.14. Определим категорию пар Шура $\mathcal{S}$ следующим образом:

(1) $Ob(\mathcal{S}) = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_r$.

(2) Морфизм $T : (A_2, W_2) \to (A_1, W_1)$ двух пар состоит из подкрученных вложений

$$T^{-1}A_2T \hookrightarrow A_1, \quad W_2T \hookrightarrow W_1,$$

где T — произвольный 1-допустимый оператор.

На самом деле, как это следует из определений, $W_2T = W_1$ как k-подпространство во втором вложении $W_2T \hookrightarrow W_1$.

Определение 3.15. Для геометрических данных $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r определим пару подпространств

$$W, A \subset k[[u]]((t))$$

следующим образом.

Пусть f^d — порождающая идеала $\mathcal{O}_X(-C')_P$, где $C' = dC$ — очень обильный дивизор Картье (ср. определение 3.10, п. 6). Тогда $\nu(\pi(f^d)) =$

$(0, r^d)$ в кольце $k[[u,t]]$ и, следовательно, $\pi(f^d)^{-1} \in k[[u]]((t))$. Таким образом, имеются естественные вложения для всех $n > 0$

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}(nC')_P \simeq f^{-nd}(\mathcal{F}_P) \hookrightarrow k[[u]]((t)),$$

где последнее вложение — это вложение $f^{-nd}\mathcal{F}_P \overset{\phi}{\hookrightarrow} f^{-nd}k[[u,t]] \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (ср. определение 3.10, п. 6). Следовательно, имеется вложение

$$\chi_1 \ : \ H^0(X \backslash C, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_{n>0} H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow k[[u]]((t)).$$

Определим $W \overset{\text{def}}{=} \chi_1(H^0(X\backslash C, \mathcal{F}))$. Аналогичным образом определено вложение $H^0(X\backslash C, \mathcal{O}) \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (и мы обозначим его также через χ_1). Определим $A \overset{\text{def}}{=} \chi_1(H^0(X\backslash C, \mathcal{O}))$.

Заметим, что пространство W удовлетворяет условию 1 определения 3.12. Как следует из определения $A \subset k[[u']]((t')) = k[[u]]((t^r))$, где $t' = \pi(f)$, $u' = \pi(g)$ (ср. определение 3.10, п. 4). Таким образом, на A определена фильтрация $A_n = A'(-n, 1) = A(-nr, 1)$, индуцированная фильтрацией $t'^{-n}k[[u']][[t']]$ на пространстве $k[[u']]((t'))$:

$$A_n = A \cap t'^{-n}k[[u']][[t']] = A'(-n, 1) = A \cap t^{-nr}k[[u]][[t]] = A(-nr, 1).$$

Также $\mathrm{Supp}(A) \subset \mathrm{Supp}(W)$, так как $1 \in \mathrm{Supp}\, W$ и W является (по конструкции) A-модулем без кручения. Ясно, что $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$ и A конечно порождена как k-алгебра. Согласно п. 4 определения 3.10 имеем $N_A \geqslant r$, $\tilde{N}_A \geqslant r$.

Лемма 3.6. *Для геометрических данных $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r имеем $H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')) \simeq A_{nd}$ для всех $n \geqslant 0$, где $C' = dC$ — обильный дивизор Картье.*

Доказательство. По определению кольца A имеем

$$A_{nd} = \{a \in A | f^{nd}a \in k[[u]][[t]]\} = \{a \in A | \nu_t(f^{nd}a) \geqslant 0\}.$$

Также по определению имеем $\chi_1(H^0(X, \mathcal{O}_X(nC'))) \subset A_{nd}$. Пусть $a \in A_{nd}$. Тогда

$$a \in \chi_1(H^0(X, \mathcal{O}_X(mC')))$$

для некоторого $m \geqslant n$. Покажем, что $a \in \chi_1(H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')))$. Предположим обратное: $a \notin \chi_1(H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')))$. Ниже мы будем отождествлять a со своим прообразом в $H^0(X\backslash C, \mathcal{O}_X)$ или в $f^{-nd}(\mathcal{O}_{X,P})$.

Существует окрестность $U(P)$ точки P, где обильный дивизор Картье C' задается элементом f^d. Так как $a \in A_{nd}$, имеем $a \in f^{-nd}(\mathcal{O}_{X,P})$; таким образом, $a|_{U(P)} \in \Gamma(U(P), \mathcal{O}_X(nC'))$. Теперь мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & a & \hookrightarrow & H^0(C, \mathcal{O}_X(mC')/\mathcal{O}_X(nC')) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to \Gamma(U(P), \mathcal{O}_X(nC')) \to & & \Gamma(U(P), \mathcal{O}_X(mC')) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(U(P) \cap C, \mathcal{O}_X(mC')/\mathcal{O}_X(nC')), \end{array}$$

где вертикальные стрелки — вложения (правая вертикальная стрелка — вложение, так как $\mathcal{O}_X(mC')/\mathcal{O}_X(nC') \simeq \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X((n-m)C')) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mC')$ и $(C, \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X((n-m)C'))$ — неприводимая схема из-за свойств дивизора C).

Но $\alpha(a) = 0$, противоречие. Итак, $a \in H^0(X, \mathcal{O}_X(nC'))$. □

Лемма 3.7. *Кольцо A, соответствующее геометрическим данным $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r, удовлетворяет следующему свойству: существует константа $K \geqslant 0$ такая, что для всех достаточно больших $n \geqslant 0$ и всех $l \leqslant nr - K$ пространство A_n содержит элемент a с нормированием $\nu(a) = (-nr, l)$.*

В частности, кольцо A строго допустимо.

Доказательство. Из леммы 3.6 следует $X \simeq \operatorname{Proj} \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd}$ (ср. [33, лемма 9]). Таким образом, кольцо $\tilde{A}^{(d)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd}$ конечно порождено как k-алгебра (ср. [42, следствие 10.3]). Тогда кольцо $\tilde{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ тоже конечно порождено как k-алгебра, так как $\tilde{A} = \bigoplus_{l=0}^{d-1} \tilde{A}^{(d,l)}$, где модули $\tilde{A}^{(d,l)} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_{di+l}$, $0 < l < d$ естественно изоморфны идеалам в $\tilde{A}^{(d)}$, которые конечно порождены как $\tilde{A}^{(d)}$-модули.

Имеем

$$\operatorname{Proj}(\tilde{A}(-1)) \simeq \operatorname{Proj}(\tilde{A}^{d,-1}) \text{ by [20, предложение 2.4.7]},$$
$$\operatorname{Proj}(\tilde{A}^{d,-1}(n)) \simeq (\operatorname{Proj}(\tilde{A}^{d,-1}))(nC')$$

(см. [12, гл. II, предложение 5.12]). Следовательно, для всех больших n $H^0(X, (\operatorname{Proj}(\tilde{A}(-1)))(nC')) \simeq A_{nd-1}$ (ср. [12, гл. II, пример 5.9]; аргументы из доказательства леммы 3.5 показывают, что $H^0(X, \operatorname{Proj}(\tilde{A}^{d,-1}(n)) = A_{nd-1}$). Заметим, что пучок $\operatorname{Proj}(\tilde{A}(-1))$ — пучок идеалов $\mathcal{I}$ дивизора C (можно рассуждать как в доказательстве леммы 3.3 и/или заметить, что локализация идеала $I = \tilde{A}(-1)$ относительно любого элемента $a \in A_n$ с нормированием $\nu_t(a) = -rn$ (т.е. $a \notin \tilde{A}(-1)$) совпадает с идеалом нормирования ν_t в кольце $\tilde{A}_{(a)}$). Таким образом, для всех больших n имеем

$H^0(C, \mathcal{O}_C(nC')) \simeq A_{nd}/A_{nd-1}$ и имеем естественные вложения

$$\begin{aligned} &H^0(C, \mathcal{O}_C(nC')) \hookrightarrow \mathcal{O}_C(nC')_P, \\ &\varphi_n : \mathcal{O}_C(nC')_P \simeq \mathcal{O}_X(nC')_P/\mathcal{I}(nC')_P \overset{f^{nd}}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{I}_P \\ &\qquad\qquad = \mathcal{O}_{X,P}/(f) \simeq \mathcal{O}_{C,P} \hookrightarrow k[[u,t]]/(t) \simeq k[[u]] \end{aligned} \tag{15}$$

такие, что образ $H^0(C, \mathcal{O}_C(nC'))$ в $k[[u,t]]/(t)$ совпадает с образом отображения $A_{nd}/A_{nd-1} \overset{f^{nd}}{\hookrightarrow} k[[u,t]]/(t)$.

С другой стороны, для пучка $\mathcal{F}_n = \mathcal{O}_C(nC')$ имеются аналогичные конструкции подпространства W_n в $k((u))$, происходящие из одномерного соответствия Кричевера (ср. [33]). А именно, для каждого $q \geqslant 0$ имеются естественные вложения

$$H^0(C, \mathcal{F}_n(qP)) \hookrightarrow \mathcal{F}_n(qP)_P \simeq g^{-q}(\mathcal{F}_{n,P}) \hookrightarrow k((u)),$$

где последнее вложение — это вложение

$$g^{-q}\mathcal{F}_{n,P} \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} g^{-q}k[[u]] = u^{-q}k[[u]] \hookrightarrow k((u))$$

(ср. определение 3.10, п. 4; мы отождествляем здесь элемент g из определения и его образ в $k[[u]]$). Следовательно, мы имеем вложение (ср. определение 3.15) $H^0(C \backslash P, \mathcal{F}_n) \hookrightarrow k((u))$, чей образ обозначим через W_n. Если $d'P$ — очень обильный дивизор Картье, то, рассуждая, как в лемме 3.6, получаем $H^0(C, \mathcal{F}_n(qd'P)) \simeq W_{n,qd'}$, где $W_{n,qd'} = W_n \cap u^{-qd'}k[[u]]$. Для больших n по теореме Римана–Роха для кривых получаем $\dim_k(H^0(C, \mathcal{F}_n(qd'P))) - \dim_k(H^0(C, \mathcal{F}_n((q-1)d'P))) = d'$ для всех $q \geqslant 0$. Таким образом, $\dim_k(W_{n,qd'}/W_{n,(q-1)d'}) = d'$, и, следовательно, пространство W_n содержит элемент с произвольным заданным отрицательным значением нормирования ν_u.

Теперь рассмотрим пучок $\mathcal{F'}_n = \mathcal{F}_n(-d'P)$. Для каждого $q \geqslant 0$ имеются естественные вложения

$$H^0(C, \mathcal{F'}_n(qP)) \hookrightarrow \mathcal{F'}_n(qP)_P \simeq g^{-q}(\mathcal{F'}_{n,P}) \hookrightarrow k((u)),$$

где последнее вложение — это вложение $g^{-q}\mathcal{F'}_{n,P} \simeq g^{-q+d'}\mathcal{F}_{n,P} \overset{g^{-d'}\varphi_n}{\hookrightarrow} u^{-q}k[[u]] \hookrightarrow k((u))$. Следовательно, мы имеем вложение $H^0(C \backslash P, \mathcal{F'}_n) \hookrightarrow k((u))$, чей образ $W'_n = g^{-d'}W_n$. Снова по теореме Римана–Роха мы получаем, что для достаточно больших n пространство W'_n содержит элементы любых заданных отрицательных значений нормирования ν_u. Более того, существует константа $K \geqslant 0$ такая, что для всех достаточно больших n пространство W_n содержит элементы любых заданных значений l нормирования ν_u, если $l \leqslant ndr - K$ (поскольку по определению

3.10, п. 6 пространство W_n не содержит элементов с нормированием большим, чем ndr). В частности, отсюда следует, что пространство A_{nd} содержит элементы любых заданных значений $(-ndr, l)$ нормирования ν, если $l \leqslant ndr - K$. Таким образом, кольцо A допустимо.

Теперь мы можем повторить все рассуждения выше для пучка $\mathcal{I}(nC')|_C$. Заметим, что $H^0(C, \mathcal{I}(nC')|_C) \simeq A_{nd-1}/A_{nd-2}$, и образ вложения $H^0(C, \mathcal{I}(nC')|_C) \hookrightarrow k[[u,t]]/(t)$ — это $f^{nd-1}(A_{nd-1}) \mod (t)$. Следовательно, для достаточно больших n пространство A_{nd-1} содержит элементы любых заданных значений $(-(nd-1)r, l)$ нормирования ν, если $l \leqslant (nd-1)r - K$. Таким образом, $N_A = r$ и кольцо A строго допустимо, поскольку $\tilde{N}_A | N_A$ и $\tilde{N}_A \geqslant r$.

Продолжая рассуждать в том же духе, получим, что для достаточно больших n каждое пространство A_n содержит элементы любых заданных значений $(-nr, l)$ нормирования ν, если $l \leqslant nr - K$. □

Лемма 3.8. *Пусть (A, W) — пара Шура ранга r. Тогда $\tilde{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ и $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n/A_{n-1}$ — конечно порожденные k-алгебры (ср. лемму 3.3).*

Доказательство. Пусть A порождена элементами $t_1, \dots, t_m$, как k-алгебра. Обозначим через $t_{1,s_1}, \dots, t_{m,s_m}$ соответствующие однородные элементы в $\tilde{A}$, где для каждого i s_i обозначает минимальное число такое, что $t_i \in A(-s_i, 1)$. Без ограничения общности мы можем предположить, что среди порождающих есть элементы a, b с $GCD(\nu_t(a), \nu_t(b)) = r$, $\nu(a) = (0, \nu_t(a))$, $\nu(b) = (0, \nu_t(b))$, и элемент c с $\nu(c) = (1, *)$ (так как A строго допустимое кольцо).

Рассмотрим конечно порожденную k-подалгебру

$$\tilde{A}_1 = k[1_1, t_{1,s_1}, \dots, t_{m,s_m}] \subset \tilde{A}$$

(здесь через 1_1 обозначен элемент $1 \in A(-1,1)$). Рассуждая, как в доказательстве леммы 3.3 и предложения 3.2, мы можем построить геометрические данные $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r из определения 3.10. Заметим, что $H^0(X \backslash C, \mathcal{O}_X) \simeq (\tilde{A}_1)_{(1_1)} \simeq A$. Следовательно, пространство, построенное по данным в определении 3.15, будет совпадать с A. Тогда по лемме 3.6 $H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')) \simeq A_{nd}$, где $C' = dC$ — обильный дивизор Картье. Следовательно, кольцо $\tilde{A}^{(d)}$ — конечно порожденная k-алгебра (см., например, [42, следствие 10.3]). Поэтому $\tilde{A}$ — конечно порожденная k-алгебра (ср. начало доказательства леммы 3.7). Алгебра $\mathrm{gr}(A)$ конечно порождена, поскольку $\mathrm{gr}(A) \simeq \tilde{A}/(1_1)$. □

Определение 3.16. Определим отображение $\chi : Ob(\mathcal{Q}) \to Ob(\mathcal{S})$ следующим образом.

Если $q = (X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi) \in Ob(\mathcal{Q})$ — элемент из $\mathcal{Q}_r$, то положим

$$\chi(q) = (\chi_1(H^0(X\backslash C, \mathcal{O}_X)), \chi_1(H^0(X\backslash C, \mathcal{F}))) \in \mathcal{S}_r.$$

Как следует из замечаний выше и леммы 3.7, $\chi(q)$ — пара Шура ранга r.

Следующая лемма будет нужна для доказательства эквивалентности категорий $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$.

Лемма 3.9. *Пусть $u', v' \in k[[u, t]]$ — ряды с единичными старшими коэффициентами с нормированиями $\nu(u') = (1, 0)$, $\nu(v') = (0, 1)$. Тогда существует допустимый оператор $T \in \mathrm{Adm}_\alpha$ такой, что $T^{-1}uT = u'$, $T^{-1}vT = v'$.*

Это легкое следствие лемм 2.11, 3 и 2.10, 2b.

Напомним, что для данной категории Υ через Υ^{op} обозначается категория с теми же объектами, но с противоположными морфизмами.

Теорема 3.3. *Отображение χ из определения 3.16 индуцирует контравариантный функтор*

$$\chi : \mathcal{Q} \to \mathcal{S}^{op},$$

который является эквивалентностью категорий.

Доказательство. Сначала покажем, что отображение χ индуцирует биекцию $\chi_r : \mathcal{Q}_r \to \mathcal{S}_r$.

Это будет следовать из леммы 3.8, леммы 3.6, предложения 3.2, леммы 3.3, леммы 3.5 и следующего утверждения (ср., например, [33, лемма 9]). Пусть X — проективная схема над полем, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X и C' — обильный дивизор Картье на X. Тогда $X \simeq \mathrm{Proj}(S)$ и $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Proj}(F)$, где $S = \oplus_{m \geqslant 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mC'))$, $F = \oplus_{m \geqslant 0} H^0(X, \mathcal{F}(mC'))$.

Имея в виду это утверждение, стартуя с геометрических данных $q = (X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r, мы можем восстановить их по паре Шура $\chi(q) = (A, W)$ ранга r следующим образом: $X \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd})$ (см. лемму 3.6), и $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd}) \simeq \mathrm{Proj}\,\tilde{A}$. Дивизор C и точка P однозначно восстанавливаются по дискретному нормированию ν_t и нормированию ν кольца $k[[u]]((t))$. В силу [20, предложение 2.6.5] композиция канонических гомоморфизмов $\Gamma_*(\mathcal{F}) \to \Gamma_*(\mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F}))) \to \Gamma_*(\mathcal{F})$ (обозначения см. там же) — тождественный изоморфизм. В частности, гомоморфизм $\Gamma_*(\mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F}))) \to \Gamma_*(\mathcal{F})$ сюръективен. По определению геометрических данных $\mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F})) \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W(-ndr, 1))$ (и $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W(-ndr, 1)) \simeq$

$\operatorname{Proj}\tilde{W}$ по [20, предложение 2.4.7]). По лемме 3.5 $\Gamma_*(\operatorname{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F}))) = \Gamma_*(\mathcal{F})$. Следовательно, канонический гомоморфизм $\operatorname{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F})) \to \mathcal{F}$ должен быть изоморфизмом (иначе существует $n \gg 0$, при котором $H^0(X, \operatorname{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F}(nC')))) \to H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$ — не изоморфизм). Таким образом, $\mathcal{F} \simeq \operatorname{Proj}(\tilde{W})$. Гомоморфизмы π и ϕ естественно определяются по вложениям подпространств A, W в $k[[u]]((t))$.

Обратно, стартуя с пары $(A, W) \in \mathcal{S}_r$, по лемме 3.8, лемме 3.3, предложению 3.2 мы можем построить геометрические данные $q \in \mathcal{Q}_r$. Применяя к ним отображение χ, мы получим ту же пару (ср. доказательство леммы 3.8).

Теперь покажем, как определить функтор χ на морфизмах. Начнем с морфизма $(\beta, \psi) : q_1 \to q_2$ между двумя данными. У нас есть автоморфизм $h : k[[u,t]] \to k[[u,t]]$ из определения 3.11, 2c. По лемме 3.9 существует допустимый оператор $T_1 \in \operatorname{Adm}_1$ такой, что

$$T_1^{-1} u T_1 = h(u), \quad T_1^{-1} v T_1 = h(v).$$

Более того, как следует из доказательства леммы 2.11, мы можем найти T_1 такой, что $1 \cdot T_1 = 1$.

Автоморфизм h продолжается до автоморфизма колец $h : k[[u]]((t)) \to k[[u]]((t))$ очевидным образом. Таким образом,

$$\begin{aligned} k[[u]]((t)) \ni f(u,v) &\mapsto f(h(u), h(v)) \\ &= f(T_1^{-1} u T_1, T_1^{-1} v T_1) = T_1^{-1} f(u,v) T_1 \in k[[u]]((t)). \end{aligned}$$

Изоморфизм $k[[u,t]]$-модулей $\xi : k[[u,t]] \to h_* k[[u,t]]$ из определения 3.11, 2d задается умножением на один обратимый элемент $\xi \in k[[u,t]]^*$. Он определяет 1-допустимый оператор $T_2 = \psi_1^{-1}(\xi)$ (см. следствие 3.3). Так как это оператор с постоянными коэффициентами, $T_2^{-1} A T_2 = A$ для любого подмножества $A \subset k[[u]]((t))$.

Теперь пусть $(A_i, W_i) = \chi(q_i)$, $i = 1, 2$. Так как из определений 3.15 и 3.11, 2c мы имеем, что

$$\begin{array}{ccc} H^0(X_2 \backslash C_2, \mathcal{O}_2) & \xrightarrow{\beta^*} & H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{O}_1) \\ \Big\downarrow \chi_2 & & \Big\downarrow \chi_1 \\ k[[u]]((t)) & \xrightarrow{h} & k[[u]]((t)), \end{array}$$

получаем

$$\begin{aligned} T_1^{-1} T_2^{-1} A_2 T_2 T_1 &= T_1^{-1} A_2 T_1 = h(A_2) \\ &= h\chi_2(H^0(X_2 \backslash C_2, \mathcal{O}_2)) \subset \chi_1(H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{O}_1)) = A_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, из определений 3.15 и 3.11, 2d мы имеем, что

$$\begin{array}{ccc} H^0(X_2\backslash C_2, \mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & H^0(X_2\backslash C_2, \beta_*\mathcal{F}_1) = H^0(X_1\backslash C_1, \mathcal{F}_1) \\ \Big\downarrow \chi_2 & & \Big\downarrow \chi_1 \\ k[[u]]((t)) & \xrightarrow{\xi} & h_*(k[[u]]((t))) = k[[u]]((t)). \end{array}$$

Изоморфизм ξ полностью определен образом $\xi(1) = 1 \cdot T_2$. Каждый элемент $k[[u]]((t))$-модуля $k[[u]]((t))$ имеет вид $a \cdot 1$, где $a \in k[[u]]((t))$. Отсюда

$$\xi(a \cdot 1) = h(a) \cdot \xi(1) = \xi(1) T_1^{-1} a T_1.$$

Следовательно, мы можем заключить, что $\xi = T \overset{\text{def}}{=} T_2 T_1$, принимая во внимание следующую последовательность равенств:

$$\xi(a \cdot 1) = 1 \cdot T_2 \cdot T_1^{-1} a T_1 = 1 \cdot T \cdot T^{-1} a T = aT.$$

Итак, имеем

$$W_2 T = \xi(\chi_2(H^0(X_2\backslash C_2, \mathcal{F}_2))) \subset \chi_1(H^0(X_1\backslash C_1, \mathcal{F}_1)) = W_1.$$

T — 1-допустимый оператор и $T^{-1} A_2 T \subset A_1$ и $W_2 T \subset W_1$. Следовательно, мы построили морфизм

$$\chi(\beta, \psi) : (A_2, W_2) \to (A_1, W_1),$$

и наш функтор определен.

Покажем, что χ задает анти-эквивалентность категорий. Для этого нам осталось построить обратный функтор на морфизмах в $\mathcal{S}$.

Пусть $T : (A_2, W_2) \to (A_1, W_1)$ — морфизм пар Шура, определенный с помощью допустимого оператора $T \in \mathrm{Adm}_1$. Это означает, что имеются вложения

$$T^{-1} A_2 T \subset A_1 \quad \text{и} \quad W_2 T \subset W_1. \tag{16}$$

Пусть X_i — проективные поверхности, определенные по A_i, и $\mathcal{F}_i$ — пучки без кручения, определенные по W_i, $i = 1, 2$. Заметим, что W_1 имеет естественную структуру $T^{-1} A_2 T$-модуля. Следовательно, вложения (16) определяют морфизм (так как сопряжение и умножение на T сохраняет фильтрацию на A_2 и на W_2, и, следовательно, определены вложения градуированных колец и модулей) $\beta : X_1 \to X_2$ и морфизм пучков $\psi : \mathcal{F}_2 \to \beta_* \mathcal{F}_1$. Как видно из имеющегося вложения градуированных колец, свойства 2a и 2b определения 3.11 для морфизма β выполняются.

Так как T 1-допустим, имеем $T^{-1} k[[u, t]] T \simeq k[[u, t]]$, что дает изоморфизм $h : k[[u, t]] \to k[[u, t]]$. Более того, T задает изоморфизм $k[[u]]((t))$-модуля $k[[u]]((t))$ и $T^{-1} k[[u]]((t)) T$-модуля $k[[u]]((t)) T$. Так как $k[[u]]((t))$ порожден элементом 1 как $k[[u]]((t))$-модуль, $T : k[[u]]((t)) \to k[[u]]((t))$

определяется его образом $\xi \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1\cdot T \in k[[u,t]]$. То есть ξ — обратимый элемент, $\xi \in k[[u,t]]^*$. Каждый элемент $k[[u]]((t))$ однозначно представляется в виде $a\cdot 1$, где $a \in k[[u]]((t))$. Имеем

$$T(a\cdot 1) = (1\cdot T)T^{-1}aT = h(a)\xi.$$

Легко проверяется, что h удовлетворяет условию 2c определения 3.11 и ξ определяет изоморфизм $k[[u,t]]$-модулей

$$\xi : k[[u,t]] \to k[[u,t]],$$

который удовлетворяет условию 2d определения 3.11. Это завершает доказательство. □

Обозначим множество классов изоморфных пар Шура через $\mathcal{S}/\operatorname{Adm}_1$ и множество классов изоморфных геометрических данных через $\mathcal{M}$. По теореме 3.3 получаем

Следствие 3.4. *Существует естественная биекция*

$$\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{S}/\mathrm{Adm}_1.$$

Комбинируя теорему 3.2 и теорему 3.3, получаем

Теорема 3.4. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентных* 1*-квази-эллиптических строго допустимых конечно порожденных k-алгебр операторов в $\hat{D}$ (см. определения* 2.18, 3.4, 3.8) *и множеством классов изоморфных геометрических данных $\mathcal{M}$ (см. определения* 3.10, 3.11).

Замечание 3.9. Возникает естественный вопрос: эквивалентны ли категория коммутативных алгебр операторов и категория пар Шура?

Ответ на этот вопрос отрицательный уже в одномерном случае, см. [27, введение]. Можно естественным образом определить категорию коммутативных алгебр операторов. Но она не будет эквивалентна категории пар Шура и категории геометрических данных, поскольку в конструкции в теореме 3.2, которая строит пару Шура по кольцу операторов, был важен выбор операторов L_1, L_2; при выборе других операторов мы получим другую пару Шура, изоморфную первой.

Замечание 3.10. Должно быть возможно расширить категорию геометрических данных, чтобы включить в нее также схемы не конечного типа над k, и доказать эквивалентность этой категории и расширенной категории пар Шура, где кольцо A не обязательно конечно порождено над k.

Замечание 3.11. Было бы интересно найти геометрические условия, описывающие те геометрические данные, которые соответствуют 1-квази-эллиптическим кольцам в кольце $D \subset \hat{D}$. См. работы [5, 23], где получено несколько результатов в этом направлении.

Замечание 3.12. Для кольца $\hat{D}$ и для поверхности из определения 3.10 можно ввести естественное обобщение понятия формального модуля Бейкера–Ахиезера (ср. [5, введение]) или формальных функций Бейкера–Ахиезера как собственных векторов кольца B из теоремы 3.4 (ср. [7, §4]), хотя этот модуль (или функции) в общем случае будут отличаться от тех, которые рассматривались в работах [7] или [5].

А именно, рассмотрим выражение $e^{\varepsilon} = \exp(x_1 z_1^{-1} + x_2 z_2^{-1})$ и определим действие

$$\partial_1(e^{\varepsilon}) = z_1^{-1} e^{\varepsilon}, \quad \partial_2(e^{\varepsilon}) = z_2^{-1} e^{\varepsilon},$$
$$\partial_1^{-1}(e^{\varepsilon}) = z_1 e^{\varepsilon}, \quad \partial_2^{-1}(e^{\varepsilon}) = z_2 e^{\varepsilon}.$$

Теперь определим $\hat{D}$-модуль $M = \hat{D} e^{\varepsilon}$. Будем называть его элементы формальными функциями Бейкера–Ахиезера (BA-функциями).

Пусть B, P, Q, L_1, L_2, S — кольцо и операторы, рассматривавшиеся в п. 3.1. Определим формальную BA-функцию, соответствующую B как

$$\psi_B(x,z) = S^{-1}(e^{\varepsilon}).$$

Тогда имеем

$$P\psi_B(x,z) = z_2^{-k}\psi_B(x,z), \quad Q\psi_B(x,z) = z_1^{-1} z_2^{1-l}\psi_B(x,z).$$

Заметим, что собственные значения отличны от символов операторов, даже если P, Q — дифференциальные операторы в частных производных, как в [7, §4].

В общем случае для произвольного элемента $b \in B$ имеем $b\psi_B(x,z) = a\psi_B(x,z)$, где a — ряд от переменных z_1, z_2. Если применить замену переменных ψ_1 из следствия 3.3 к элементу a, мы получим ряд от u, t, который является выражением мероморфной функции, соответствующей элементу b, на поверхности X в терминах локальных параметров точки P (см. определение 3.10). Таким образом, M может рассматриваться как аналог BA-модуля и $\psi_1(\psi_B(x,z))$ может рассматриваться как аналог BA-функции из [7, §4].

§4. Примеры

В качестве рекламы наших конструкций приведем примеры коммутирующих операторов в кольце $\hat{D}$ (детали вычислений появятся в [24]).

Пример 4.1. В одномерной ситуации, используя теорему Сато, можно получить старый известный пример Берчнала–Чаунди коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, соответствующих каспидальной кривой, если взять в качестве пары Шура $W = \langle 1+t, t^{-i}, i \geqslant 1\rangle$, $A = k[t^{-2}, t^{-3}]$:

$$P = \partial_x^2 - 2(1-x)^{-2}, \quad Q = \partial_x^3 - 3(1-x)^{-2}\partial_x - 3(1-x)^{-3}.$$

Пример 4.2. Рассмотрим подпространство $W = \langle 1+t, t^{-i}u^j, i \geqslant 1, 0 \leqslant j \leqslant i\rangle \subset k[[u]]((t))$. Легко проверить, что его кольцо стабилизаторов содержит элементы t^{-2}, t^{-3}, ut^{-2}. Таким образом, оно строго допустимо. Максимальное кольцо стабилизаторов будет бесконечно порождено над k. Пара Шура (W, A) с конечно порожденным кольцом A, содержащим элементы выше, соответствует геометрическим данным с особой торической поверхностью.

Операторы, соответствующие элементам t^{-2}, ut^{-2} в кольце коммутирующих операторов, соответствующем A (операторы, удовлетворяющие определению квази-эллиптичности, ср. также следствие 3.1), — это

$$P = \partial_2^2 - 2\frac{1}{(1-x_2)^2}(: \exp(-x_1\partial_1) :), \quad Q = \partial_1\partial_2 + \frac{1}{1-x_2}(: \exp(-x_1\partial_1) :)\partial_1,$$

где $(: \exp(-x_1\partial_1) :) = 1 - x_1\partial_1 + x_1^2\partial_1^2/2! - x_1^3\partial_1^3/3! + \dots$ Оператор, соответствующий элементу t^{-3}, — это

$$P' = \partial_2^3 - 3\frac{1}{(1-x_2)^2}(: \exp(-x_1\partial_1) :)\partial_2 - 3\frac{1}{(1-x_2)^3}(: \exp(-x_1\partial_1) :).$$

Таким образом, эти операторы очень похожи на операторы из предыдущего примера. Эта схожесть распространяется и дальше: если вывести уравнения изоспектральных деформаций для этих операторов (ср. [28, §4] и [43, §6]), мы получим следующие уравнения в соответствующей системе Сато–Вильсона (ср. [43, §4]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1}{\partial t_1} &= \frac{1}{4}(s_1)_{x_2x_2x_2} - \frac{3}{2}(s_1)_{x_2}^2, \\ \frac{\partial s_1}{\partial t_2} &= -(s_1)_{x_2}(s_1)_{x_1} - \frac{1}{2}(s_1)_{x_2x_2}\partial_1, \\ \frac{\partial s_1}{\partial t_3} &= -(s_1)_{x_1}^2 - (s_1)_{x_1x_2}\partial_1 - (s_1)_{x_2}\partial_1^2, \end{aligned} \tag{17}$$

где $s_1(t_1, t_2, t_3) = s_1(t)$ — первый коэффициент оператора $S(t) = 1 + s_1(t)\partial_2^{-1} + \dots$, и $S(0) = S$ — сопрягающий оператор: $W = W_0S$, $P = S\partial_2^2S^{-1}$. Примечательно, что $s_1(0) = \frac{1}{1-x_2}(: \exp(-x_1\partial_1) :)$ — решение уравнений выше. Это соответствует следующему факту из одномерной теории КП: функция $u(x) = (x^{-1})_x$ — рациональное решение уравнения КдВ (и эта функция является уполовиненным коэффициентом оператора P в примере 4.1).

Замечание 4.1. Простой анализ уравнений (17) показывает, что даже если деформировать коммутативное кольцо дифференциальных операторов в частных производных (что означает, что $s_1(0) \in k[[x_1, x_2]][\partial_1] = D_1$), изоспектральные деформации не будут дифференциальными операторами в частных производных, но будут операторами из $\hat{D}$, так как $s_1(t) \notin D_1$ для общих значений t. Таким образом, кольцо $\hat{D}$ появляется совершенно естественным образом. Эта ситуация с деформациями похожа на аналогичную ситуацию, возникающую при попытке описания коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами (см., например, [25, 26], где указаны некоторые явные примеры таких колец). В одномерной теории КП, если мы стартуем с коммутативного кольца обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, его изоспектральные деформации (которые связаны с решениями уравнения КП) будут состоять из операторов с неполиномиальными коэффициентами, хотя они и будут оставаться обыкновенными дифференциальными операторами.

Пример 4.3. В этом примере мы покажем, как уже известные примеры коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных, соответствующие квантовым системам Калоджеро–Мозера и кольцам квази-инвариантов (см. [17]), укладываются в нашу классификацию.

Напомним, что кольца в этих примерах состоят из операторов, коммутирующих с оператором Шрёдингера $L = \partial_1^2 + \partial_2^2 - u(x_1, x_2)$, где u — функция специального типа, заданная точной формулой в одном из трех случаев: рациональном, тригонометрическом и эллиптическом. Во всех случаях описаны кольца старших символов (они называются кольцами квази-инвариантов, см. [17]). Таким образом, кольца квази-инвариантов — это k-подалгебры в кольце многочленов (от двух переменных в нашем случае). Как следует из определения и описания этих колец в [17], соответствующие кольца коммутирующих дифференциальных операторов удовлетворяют условиям предложения 2.4 и леммы 2.6. Таким образом, после линейной замены переменных они становятся 1-квази-эллиптическими строго допустимыми кольцами (по предложению 2.4), и, следовательно, соответствуют 1-квази-эллиптическим парам Шура. Если кольцо квази-инвариантов конечно порождено как k-алгебра (ср. предложение 2.3), то кольцо коммутирующих дифференциальных операторов соответствует паре Шура из определения 3.12 (после применения отображения ψ_1 из следствия 3.3 к соответствующей 1-квази-эллиптической паре Шура из теоремы 3.2), и, следовательно, оно также соответствует геометрическим данным из определения 3.10 по теореме 3.3.

Например, операторы $L_1 = \partial_1 + \partial_2$, $L_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 - m(m+1)\wp(x_1 - x_2)$, которые определяют квантовую систему Калоджеро–Мозера (здесь $\wp(z)$ — функция Вейерштрасса гладкой эллиптической кривой), после применения k-линейной замены переменных $\partial'_2 = \partial_1 + \partial_2$, $\partial'_1 = \partial_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_1 = x_1 - x_2 - c$, $c \in \mathbb{C}$, становятся равными

$$L_1 = \partial'_2, \quad L_2 = 2\partial'^2_1 - 2\partial'_1\partial'_2 + \partial'^2_2 - m(m+1)\wp(c + x'_1).$$

Мы выбираем здесь константу c таким образом, чтобы ряд Тейлора функции $\wp(z) - z^{-2}$ в окрестности нуля и все его производные сходились в $z = c$. В этом случае мы можем представить $\wp(c + x'_1)$ как формальный ряд Тейлора, принадлежащий $\mathbb{C}[[x'_1]]$. Заметим, что любое кольцо коммутирующих операторов, содержащее эти операторы, содержит также оператор $L'_2 = L_2 - L_1^2$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(L'_2) = (1,1)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(L_1) = (0,1)$. Заметим, что оба оператора L_1, L'_2 удовлетворяют условию A_1. Следовательно, любое кольцо B коммутирующих операторов, содержащее эти операторы, является 1-квази-эллиптическим строго допустимым с числом $N_B = 1$. Отметим, что проективная поверхность X в геометрических данных, соответствующих этому коммутативному кольцу, естественно изоморфна проективизации аффинного спектрального многообразия, определенного по этому кольцу (ср. [14, замечание 5.3]), предложенной Кричевером в [7]. Описание геометрических свойств поверхности X и геометрических данных (соответствующих произвольному коммутативному кольцу дифференциальных операторов в частных производных или операторов в $\hat{D}$) см. в недавних работах [5, 23].

В заключение мы хотим доказать одно утверждение о геометрических свойствах поверхности X, соответствующей максимальному коммутативному подкольцу дифференциальных операторов в частных производных. Это утверждение отчасти переоткрывает и усиливает ряд результатов в работах [18, 15, 13, 19] (ср. [17, замечание 3.17]), в которых утверждается, что аффинные спектральные многообразия коммутативных колец дифференциальных операторов в частных производных, соответствующих некоторым кольцам квази-инвариантов, Коэно–Маколеевы.

Чтобы сформулировать это утверждение, напомним одну конструкцию (без деталей), описанную в п. 3.2 работы [23]. Для данной целой двумерной схемы X конечного типа над полем k (или над кольцом целых чисел) существует „минимальная“ Коэно–Маколеева схема $CM(X)$ и конечный морфизм $CM(X) \to X$ (и конечный морфизм из нормализации

X в $CM(X)$). Эта конструкция обобщает известную конструкцию нормализации схемы. Для кольца A мы будем обозначать через $CM(A)$ его коэно-маколеевизацию.

Теорема 4.1. *Пусть (A, W) — пара Шура ранга r, причем W — конечно порожденный A-модуль. Тогда $(CM(A), W)$ — тоже пара Шура ранга r.*

В частности, если (A, W) соответствует кольцу дифференциальных операторов в частных производных (ср. [23, предложение 3.2, теорема 2.1]), *то по теореме 3.2 и предложению 3.1 пара $(CM(A), W)$ также соответствует кольцу дифференциальных операторов в частных производных, которое будет Коэно–Маколеевым. Соответствующая паре $(CM(A), W)$ проективная поверхность X также Коэно–Маколеева в силу* [23, теорема 3.2].

Доказательство. Пусть X — проективная поверхность, соответствующая паре (A, W) по теореме 3.3. Тогда по [23, теорема 3.2] существует естественный изоморфизм окрестности дивизора C на X и на $CM(X)$, что влечет изоморфизм $\mathcal{O}_{CM(X),P} \simeq \mathcal{O}_{X,P}$. Таким образом, мы можем продолжить вложение из определения 3.15: $CM(A) \simeq H^0(CM(X)\setminus C, \mathcal{O}_{CM(X)}) \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (заметим, что образ этого вложения содержит A). Обозначим образ этого вложения также через $CM(A)$. Те же аргументы, что и в доказательстве леммы 3.6, показывают, что $H^0(CM(X), \mathcal{O}_{CM(X)}(nC')) \simeq CM(A)_{nd}$.

Рассмотрим подпространство W' в $k[[u]]((t))$, порожденное W над $CM(A)$. Так как W — конечно порожденный A-модуль, пространство W' порождено конечным числом элементов $w_1, \dots, w_n$ над $CM(A)$ (эти элементы также порождают W над A). В силу теоремы 3.2 в [23] градуированные кольца $\mathrm{gr}(CM(A))$ и $\mathrm{gr}(A)$ эквивалентны, поэтому W' порождено как k-подпространство пространством W и конечным числом элементов $w_i a_j$, где $i = 1, \dots n$, a_j — базис конечно порожденного подпространства $CM(A)_{kd}$ для некоторого фиксированного k.

Пусть S — оператор (см. теорему 3.1) такой, что $W_0 S = \psi_1^{-1}(W)$ (см. следствие 3.2). Тогда $B = S\psi_1^{-1}(A)S^{-1} \subset D$ согласно нашим предположениям, откуда $S \in E$ (см. доказательство теоремы 3.2 и леммы 2.11). Обозначим через W_0' пространство $\psi_1^{-1}(W')S^{-1}$. Как показывают рассуждения выше, W_0' порождено W_0 и конечным числом элементов $w_i a_j S^{-1}$ как k-пространство. Заметим, что $W_0' B \subset W_0'$ и $W_0' B' \subset W_0'$, где $B' = S\psi_1^{-1}(CM(A))S^{-1}$.

Теперь можно рассуждать, как в доказательстве предложения 2.1, чтобы показать, что $B' \subset D$. Так как $S \in E$, имеем $B' \in E$. Пусть $b \in B'$,

$b \notin D$. Тогда $b_- = b - b_+ \neq 0$. В этом случае имеем

$$0 \neq z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)} b_- = \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)}(b_-)(0) \notin W_0$$

и $z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)} b_+ \in W_0$. Так как W_0' порождено W_0 и конечным числом элементов, не принадлежащих W_0, и так как $b \in E$, то для некоторого $n \gg 0$ имеем $z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)-(n,0)} b_- \notin W_0'$. Действительно, пусть b_{ij} — коэффициент ряда b_- такой, что $\partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)}(b_{ij})(0) \neq 0$. Пусть $b_{i+1,j}, \dots b_{i+q,j} \neq 0$ — ненулевые коэффициенты ряда b_- с фиксированным j, т.е. $b_{i+l,j} = 0$ для всех $l > q$. Тогда для каждого $n \gg 0$ условие $z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)-(n,0)} b_- \in W_0'$ влечет уравнение

$$\begin{aligned} &\partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)}(b_{i,j})(0) + n\partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)+(1,0)}(b_{i+1,j})(0) \\ &\quad + C_n^2 \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)+(2,0)}(b_{i+2,j})(0) + \dots \\ &\quad + C_n^q \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)+(q,0)}(b_{i+q,j})(0) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, для $n = m, \dots, m+q+1$ (при $m \gg 0$) должна выполняться система линейных уравнений $Cx = 0$, $x = (x_0, \dots, x_q)$, где $x_l = \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)+(l,0)}(b_{i+l,j})(0)$, $l = 0, \dots q$, и

$$C = \begin{pmatrix} 1 & C_m^1 & \dots & C_m^q \\ 1 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{m+q}^1 & \dots & C_{m+q}^q \end{pmatrix}.$$

Так как C обратима, имеем $x = 0$, а значит, противоречие с условием $\partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)}(b_{ij})(0) \neq 0$. Таким образом, если b сохраняет W_0', то b должен быть в D. Следовательно, $B' \subset D$ и B' сохраняет W_0. Тогда $CM(A)$ сохраняет W, следовательно, $(CM(A), W)$ — пара Шура ранга r (все свойства из определения 3.12, п. 2 для кольца $CM(A)$ выполняются, поскольку $CM(A) \supset A$ — конечный A-модуль). □

Список литературы

[1] Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972.

[2] Бурбаки Н., *Коммутативная алгебра*, Мир, М., 1971.

[3] Гельфанд И. М., Дикий Л. А., *Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега–де Фриза*, Успехи мат. наук **30** (1975), №5, 67–100; *Дробные степени операторов и гамильтоновы системы*, Функц. анал. и его прил. **10** (1976), №4, 13–29.

[4] Дринфельд В., *О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец*, Функц. анал. и его прил. **11** (1977), №1, 11–14.

[5] Жеглов А. Б., Миронов А. Е., *Модули Бейкера–Ахиезера, пучки Кричевера и коммутативные кольца дифференциальных операторов в частных производных*, Дальневост. мат. ж. **12** (2012), №1, 20–34.

[6] Жеглов А. Б., Осипов Д. В., *О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера*, Мат. заметки **81** (2007), №4, 528–539.

[7] Кричевер И. М., *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, Успехи мат. наук **32** (1977), №6, 183–208.

[8] Кричевер И. М., *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов*, Функц. анал. и его прил. **12** (1978), №3, 20–31.

[9] Миронов А. Е., *Коммутативные кольца дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям*, Сиб. мат. ж. **43** (2002), №5, 1102–1114.

[10] Осипов Д. В., *Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий*, Изв. РАН. Сер. мат. **65** (2001), №5, 91–128.

[11] Паршин А. Н., *О кольце формальных псевдодифференциальных операторов*, Тр. Мат. ин-та РАН **224** (1999), 291–305.

[12] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.

[13] Berest Yu., Etingof P., Ginzburg V., *Cherednik algebras and differential operators on quasi-invariants*, Duke Math. J. **18** (2003), no. 2, 279–337.

[14] Braverman A., Etingof P., Gaitsgory D., *Quantum integrable systems and differential Galois theory*, Transform. Groups **2** (1997), no. 1, 31–56.

[15] Etingof P., Ginzburg V., *On m-quasi-invariants of a Coxeter group*, Mosc. Math. J. **2** (2002), no. 3, 555–566.

[16] Burchnall J. L., Chaundy T. W., *Commutative ordinary differential operators*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2 **21** (1923) 420–440; Proc. Royal Soc. London Ser. A **118** (1928), 557–583.

[17] Chalykh O., *Algebro-geometric Schrödinger operators in many dimensions*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **366** (2008), no. 1867, 947–971.

[18] Feigin M., Veselov A. P., *Quasi-invariants of Coxeter groups and m-harmonic polynomials*, Intern. Math. Res. Not. **2002**, no. 10, 521–545.

[19] Feigin M., Veselov A. P., *Quasi-invariants and quantum integrals of deformed Calogero–Moser systems*, Intern. Math. Res. Not. **2003**, no. 46, 2487–2511.

[20] Grothendieck A., *Éléments de géométrie algébrique.* II, Étude globale élémentoire de guelgues classes de morphismes, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., no. 8, 1961, 222 p.

[21] Kurke H., Osipov D., Zheglov A., *Formal punctured ribbons and two-dimensional local fields*, J. Reine Angew. Math. **629** (2009), 133–170.

[22] Kurke H., Osipov D., Zheglov A., *Formal groups arising from formal punctured ribbons*, Intern. J. Math. **21** (2010), no. 6, 755–797.

[23] Kurke H., Osipov D., Zheglov A., *Commuting differential operators and higher-dimensional algebraic varieties*, Oberwolfach Preprint Ser., №2, 2012, `http://www.mfo.de/scientific-programme/publications/owp`.

[24] Kurke H., Osipov D., Zheglov A., *Partial differential operators, Sato Grassmanians and non-linear partial differential equations* (to appear).

[25] Mironov A. E., *Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra*, `arXiv:math-ph/1107.3356`.

[26] Mokhov O. I., *On commutative subalgebras of the Weyl algebra that are related to commuting operators of arbitrary rank and genus*, `arXiv:math-sp/1201.5979`.

[27] Mulase M., *Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional Grassmanians*, Intern. J. Math. **1** (1990), no. 3, 293–342.

[28] Mulase M., *Algebraic theory of the KP equations*, Perspectives in Mathematical Physics, 151–217, Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys., III, Intern. Press, Cambridge, MA, 1994.

[29] Mumford D., *The red book of varieties and schemes*, Lecture Notes in Math., 1358, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[30] Mumford D., *An algebro-geometric constructions of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equations, Korteweg de Vries equation and related non-linear equation*, Proc. Intern. Sympos. on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), 115–153, Kinokunija Book Store, Tokyo, 1978.

[31] Mumford D., *Tata lectures on Theta II. Jaconian theta functions and differential equations*, Progress in Math., 43, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1984.

[32] Nakayashiki A., *Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties*, Amer. J. Math. **116** (1994), no. 1, 65–100.

[33] Parshin A. N., *Integrable systems and local fields*, Comm. Algebra, **29** (2001), no. 9, 4157–4181.

[34] Previato E., *Multivariable Burchnall–Chaundy theory*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **366** (2008), no. 1867, 1155–1177.

[35] Rothstein M., *Dynamics of the Krichever construction in several variables*, J. Reine Angew. Math. **572** (2004), 111–138.

[36] Sato M., *Soliton equations and universal Grassmann manifold*, Kokyuroku, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **439** (1981), 30–46.

[37] Sato M., Noumi M., *Soliton equations and universla Grassmann manifold*, Sophia Univ. Lec. Notes Ser. in Math. **18** (1984).

[38] Segal G., Wilson G., *Loop Groups and Equations of KdV Type*, Inst. Hautes Ètudes Dci. Publ. Math. no. 61, 1985, 5–65.

[39] Schur I., *Über vertauschbare lineare Differentialausdrčke*, Sitzungsber. der Berliner Math. Gesel. **4** (1905), 2–8.

[40] Verdier J.-L., *Equations differentielles algébriques*, Mathematics and Physics (Paris, 1979/1982), 215–236, Progress in Math., 37, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1983.

[41] Wallenberg G., *Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke*, Archiv Math. Phys., Drittle Reihe **4** (1903), 252–268.

[42] Zariski O., *The theorem of Riemann–Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 560–615.

[43] Zheglov A. B., *Two dimensional KP systems and their solvability*, `arXiv: math-ph/0503067v2`.

Поступило 27 августа 2012 г.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
Ленинские горы
119899, ГСП-1, Москва
Россия
E-mail: azheglov@math.msu.su