Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Б. М. Будак, Н. Л. Гольдман, А. Б. Успенский, Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 735–738

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
19 марта 2025 г., 12:27:55

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 518.61

МАТЕМАТИКА

Б. М. БУДАК, Н. Л. ГОЛЬДМАН, А. Б. УСПЕНСКИЙ

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С ВЫПРЯМЛЕНИЕМ ФРОНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОФРОНТОВЫХ ЗАДАЧ ТИПА СТЕФАНА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 17 VII 1965)

Мы рассматриваем применение разностных схем с выпрямлением фронтов в одномерном случае для одного параболического уравнения. Переход к многомерному случаю и системе уравнений не вызывает существенных затруднений.

§ 1. Задачи с постоянным числом фазовых фронтов. В качестве основной области изменения независимых переменных (x, t) возьмем область

$$D: \{\tilde{y}(t) \leqslant x \lessapprox \tilde{\tilde{y}}(t),\ t > 0\}, \tag{1}$$

где $x = \tilde{y}(t)$ и $x = \tilde{\tilde{y}}(t)$ — левая и правая границы области — могут быть либо заданными кривыми, либо искомыми фазовыми фронтами. Пусть внутри области D имеется N фазовых фронтов $x = y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, где

$$\tilde{y}(t) = y_0(t) < y_1(t) < \ldots < y_N(t) < y_{N+1}(t) = \tilde{\tilde{y}}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Предположим сначала, что граничные кривые $x = \tilde{y}(t)$ и $x = \tilde{\tilde{y}}(t)$ являются заданными. Тогда задачу типа Стефана можно сформулировать следующим образом. Требуется найти функции $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, ... $\ldots, u_N(x, t)$ и функции $x = y_1(t), \ldots, x = y_N(t)$, удовлетворяющие условиям

$$a(x, t, u_i)\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t, u_i)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)$$

$$\text{при}\ \ y_i(t) < x < y_{i+1}(t),\ t > 0,\ i = 0, 1, \ldots, N; \tag{3}$$

$$\mu_{\mathrm{I}} k(x, t, u_0)\,\partial u_0/\partial x\,|_{x=\tilde{y}(t)} = -\tilde{q}(t, u_0)\,|_{x=\tilde{y}(t)}, \quad t > 0; \tag{4}$$

$$\mu_{\mathrm{II}} k(x, t, u_N)\partial u_N/\partial x\,|_{x=\tilde{\tilde{y}}(t)} = -\tilde{\tilde{q}}(t, u_N)\,|_{x=\tilde{\tilde{y}}(t)}, \quad t > 0; \tag{5}$$

$$u_{i-1}(y_i(t), t) = u_i(y_i(t), t) = \psi_i(y_i(t), t), \quad t \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N; \tag{6}$$

$$\gamma_i(y_i(t), t, \psi_i(y_i(t), t))\,dy_i/dt = k(x, t, u_i)\,\partial u_i/\partial x\,|_{x=y_i(t)+0} -$$
$$- k(x, t, u_{i-1})\,\partial u_{i-1}/\partial x\,|_{x=y_i(t)-0} + \Phi_i(y_i(t), t, \psi_i(y_i(t), t)),$$
$$t > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N; \tag{7}$$

$$y_i(0) = l_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, N+1; \tag{8}$$

$$u_i(x, 0) = \varphi(x), \quad l_i \leqslant x \leqslant l_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Параметры μ_{I} и μ_{II} могут принимать значения 0 или 1, а функции $\tilde{q}(t, u_0)$ и $\tilde{\tilde{q}}(t, u_N)$ могут обращаться в нуль или быть отличными от нуля; в соответствии с этим условия (4) и (5) могут быть граничными условиями 1-го, 2-го или 3-го рода или нелинейными условиями типа излучения.

Если левая граница области D, $x = \tilde{y}(t) = y_0(t)$, является фазовым фронтом, то граничное условие (4) заменяется условиями

$$k(x, t, u_0)\, \partial u_0/\partial x \big|_{x=\tilde{y}(t)} = -\tilde{q}(t, u_0)\big|_{x=\tilde{y}(t)} + \gamma_0(y_0(t),\ t, \psi_0(y_0(t), t))\, dy_0/dt + $$
$$+ \Phi_0(y_0(t), t, \psi_0(y_0(t), t)), \quad t > 0; \tag{4'}$$
$$u_0\big|_{x=\tilde{y}(t)=y_0(t)} = \psi_0(y_0(t), t), \quad t > 0. \tag{4''}$$

Аналогично поступаем в случае, когда правая граница области $D, x = \tilde{\tilde{y}}(t) = y_{N+1}(t)$, является фазовым фронтом.

Выполним замену независимых переменных x и t, приводящую к выпрямлению фронтов и внешних границ области. Именно в каждой области

$$D_i\colon\ \{y_i(t) \leqslant x \leqslant y_{i+1}(t),\ t > 0\}, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{10}$$

перейдем соответственно к новым независимым переменным

$$\zeta_i = (x - y_i(t)) \,/\, (y_{i+1}(t) - y_i(t)), \quad t = t,\ i = 0, 1, \ldots, N\,*. \tag{11}$$

При этом область D_i преобразуется в область

$$D_i^*\colon\ \{0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1, t \geqslant 0\}, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{10*}$$

ограниченную полупрямыми $\zeta_i \equiv 0$ и $\zeta_i \equiv 1$ при $t \geqslant 0$ и отрезком оси абсцисс $0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$, $t \equiv 0$; фронт $x = y_i(t)$, являющийся общей границей областей D_{i-1} и D_i в области D_{i-1}^*, выразится уравнением $\zeta_{i-1}^* \equiv 1$, а в области D_i^* — уравнением $\zeta_i^* \equiv 0$. Выражение любой функции $f(x, t)$ в координатах (ζ_i, t) обозначим через $\bar{f}(\zeta_i, t)$:

$$f(x, t) = f(y_i(t) + \zeta_i[y_{i+1}(t) - y_i(t)]) = \bar{f}(\zeta_i, t). \tag{12}$$

Не составляет труда записать задачу (3)—(9) в координатах (ζ, t) (ср. ([1])). Мы, однако, сразу напишем разностные схемы для решения задачи (3)—(9) в этих координатах. Для этого в каждой из областей D_i^* введем разностную сетку, разбив отрезок $0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$ на M_i равных частей длины $h_i = 1 / M_i$ и обозначив точки деления через

$$\zeta_{ip} = (p - p_i)h_i, \quad h_i = 1 / M_i, \quad p_i \leqslant p \leqslant p_i = p_i + M_i,$$
$$p_0 = 0,\ i = 0, 1, \ldots, N, \tag{13}$$

и разбив полуось $t \geqslant 0$ точками деления

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \ldots, \tau = \text{const}. \tag{14}$$

В результате в каждой D_i^* определится сетка $\Sigma_{ih\tau}$ узлов (ζ_{ip}, t_j).

Задачу (3)—(9) на сетке $\Sigma = \bigcup\limits_{i=0}^{N} \Sigma_{ih\tau}$ будем решать в координатах (ζ, t) с помощью неявной разностной схемы. Если коэффициенты разностных уравнений вычислять на том же временнóм слое, что и искомые величины, то получаются нелинейные разностные уравнения, которые можно решать, сочетая прогонку с итерациями; такую схему мы будем называть **итерационной**. Если же коэффициенты разностных уравнений вычислить на предыдущем временнóм слое, то неявные разностные уравнения получатся линейными; для их решения достаточно прогонки; такую схему мы будем называть **безытерационной**.

Итерационная схема для определения величин на j-м временнóм слое имеет вид

$$\bar{a}_{ipj}^{(s)}\tau^{-1}[\bar{u}_{ipj}^{(s+1)} - \bar{u}_{ip\,j-1}] = [y_{i+1\,j}^{(s+1)} - y_{ij}^{(s+1)}]^{-2}\,\delta_\zeta(\bar{k}_{ipj}^{(s)}\delta_\zeta\bar{u}_{ipj}^{(s+1)}) +$$
$$+ \{y'^{(s+1)}_{ij} + (p - p_{i-1})\,[y'^{(s+1)}_{i+1\,j} - y'^{(s+1)}_{ij}]\} \times$$
$$\times [y_{i+1\,j}^{(s+1)} - y_{ij}^{(s+1)}]^{-1}(2h_i)^{-1}[\bar{u}_{i\,p+1j}^{(s)} - \bar{u}_{i\,p-1j}^{(s)}], \tag{3i}$$
$$p = p_i,\ p_i + 1, \ldots, p_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, N,\ j > 0;$$

---

* Аналогичная замена в сочетании с методом интегральных соотношений применялась А. А. Дородницыным.

$$\mu_{\mathrm{I}}\bar{k}_{00j}^{(s)}\,[y_{1j}^{(s+1)}-y_{0j}]^{-1}\,\delta_\zeta \bar{u}_{00j}^{(s+1)} = -\tilde{q}(t_j, \bar{u}_{00j}^{(s)}), \quad j>0; \tag{4_i}$$

$$\mu_{\mathrm{II}}\bar{k}_{Np_Nj}^{(s)}\,[y_{N+1\,j}-y_{Nj}^{(s+1)}]^{-1}\,\delta_{\bar\zeta} \bar{u}_{Np_Nj}^{(s+1)} = -\tilde{\tilde{q}}(t_j, \bar{u}_{Np_Nj}^{(s)}), \quad j>0; \tag{5_i}$$

$$\bar{u}_{ip_ij}^{(s+1)} = \bar{u}_{i+1\,p_ij}^{(s+1)} = \psi_i(y_{ij}^{(s+1)}, t_j), \quad i=1,2,\ldots,N,\ j>0; \tag{6_i}$$

$$\gamma_i(y_{ij}^{(s)}, t_j, \psi_i(y_{ij}^{(s)}, t_j))\,y'^{(s+1)}_{ij} = [y_{i+1\,j}^{(s)}-y_{ij}^{(s)}]^{-1}\,\bar{k}_{i+1\,p_ij}^{(s)}\delta_\zeta\bar{u}_{i+1\,p_ij}^{(s)} - [y_{ij}^{(s)}-y_{i-1\,j}^{(s)}]^{-1}\,\bar{k}_{ip_ij}^{(s)}\delta_{\bar\zeta}\,\bar{u}_{ip_ij}^{(s)} + \Phi_{ij}^{(s)}, \tag{7_i}$$

$$i=1,2,\ldots,N;$$

$$y_{i0}=l_i, \quad i=0,1,\ldots,N+1; \qquad y_{ij}^{(s+1)} = y_{i\,j-1}+\tau y'^{(s+1)}_{ij},$$
$$i=1,\ldots,N,\ j>0; \tag{8_i}$$

$$\bar{u}_{i0} = \bar{\varphi}(\zeta_{ip}), \quad p_i\leqslant p\leqslant p_{i+1},\ i=0,1,\ldots,N,\ p_{-1}=0, \tag{9_i}$$

причем

$$a_{ipj}^{(s)} = \bar{a}(\zeta_{ip}, t_j, \bar{u}_{ipj}^{(s)}), \quad \Phi_{ij}^{(s)} = \Phi_i(y_{ij}^{(s)}, t_j, \psi_i(y_{ij}^{(s)}, t_j)), \quad i=1,\ldots,N,\ j>0;$$
$$\bar{k}_{ipj}^{(s)} = {}^1/_2\,[\bar{k}(\zeta_{i\,p-1}, t_j, \bar{u}_{i\,p-1\,j}^{(s)}) + \bar{k}(\zeta_{ip}, t_j, \bar{u}_{ipj}^{(s)})],$$
$$\delta_\zeta \bar{f}_{ipj}^{(s)} = \frac{1}{h_i}\,[\bar{f}_{i\,p+1\,j}^{(s)} - \bar{f}_{ipj}^{(s)}], \qquad \delta_{\bar\zeta} = \frac{1}{h_i}\,[\bar{f}_{ipj}^{(s)} - \bar{f}_{i\,p-1\,j}^{(s)}].$$

Все величины на $(j-1)$-м временно́м слое считаются известными. При итерировании прежде всего находятся величины $y'^{(s+1)}_{ij}$ по формулам (7_i), затем величины $y_{ij}^{(s+1)}$ по формулам (8_i), после чего вычисляются коэффициенты и свободные члены уравнений (3_i), (4_i), (5_i) и прогонкой находятся значения $\bar{u}_{ipj}^{(s+1)}$ на каждом отрезке $p_i\leqslant p\leqslant p_{i+1}$ $i=0,1,\ldots,N$, $p_0=0$.

Если левая граница области D (или правая, или обе эти границы) является фазовым фронтом, то разностные аппроксимации соответствующих условий (4′) и (4″) на левой границе (или аналогичных условий на правой границе) пишутся аналогично (7_i).

Итерирование для отыскания величин на j-м временно́м слое ведется до совпадения двух последовательных приближений с заданной степенью точности ε.

Безытерационная схема получается из (3_i)—(9_i), если величины на предыдущей итерации заменить величинами на предыдущем временно́м слое, опустив индексы s и $s+1$.

§ 2. Задачи с меняющимся числом фазовых фронтов. Рассмотрим сначала случай, когда возникает новый фронт. Пусть, например, для определенности, фронты $x=y_2(t)$, $\ldots$, $x=y_N(t)$ уже имеются и границы области $x=y_0(t)$ и $x=y_{N+1}(t)$ не являются фазовыми фронтами. Пусть, далее, в момент $t=0$ от левой границы слоя отщепляется и движется затем внутрь области D новый фронт $x=y_1(t)$, $t>0$. Положим $\bar{\zeta}_0=(x-y_0(t))\,/\,(y_2(t)-y_0(t))$ и разобьем отрезок $0\leqslant\bar{\zeta}_0\leqslant 1$ на $\bar{M}_1$ равных частей длины $\bar{h}_1 = 1\,/\,\bar{M}_1$. После того как новый фронт $x=y_1(t)$ продвинется внутрь D на некоторое число M_0, $1<M_0<\bar{M}_1$, шагов, можно, вводя замену

$$\zeta_0 = (x-y_0(t))\,/\,(y_1(t)-y_0(t)),\ 0\leqslant\zeta_0\leqslant 1;$$
$$\zeta_1 = (x-y_1(t))/(y_2(t)-y_i(t)), \quad 0\leqslant\zeta_1\leqslant 1, \tag{15}$$

и, разбивая отрезки $0\leqslant\zeta_0\leqslant 1$ и $0\leqslant\zeta_1\leqslant 1$ на M_0 и $M_1=\bar{M}_1-M_0$ частей соответственно, вести вычисления по схеме, описанной в § 1. Расчет начального этапа, когда новый фронт еще не прошел M_0 шагов внутрь D, можно вести с ловлей этого фронта в узел сетки, находя шаги τ_j по оси t

итерированием. Именно, в части слоя, заключенной между левой границей $x = y_0(t)$ и фронтом $x = y_2(t)$, расчет ведем по формулам:

$$\mu_1 \bar{k}^{(s)}_{00j} [y^{(s)}_{2j} - y_{0j}]^{-1} \delta_\zeta \bar{u}^{(s+1)}_{00j} = -\tilde{q}(t_j, \bar{u}^{(s)}_{00j}); \tag{16}$$

$$\check{\bar{a}}^{(s)}_{0pj} [\tau^{(s)}_j]^{-1} [\bar{u}^{(s+1)}_{0pj} - \bar{u}_{0p\,j-1}] = [y^{(s)}_{2j} - y_{0j}]^{-2} \delta_\zeta (\check{\bar{k}}^{(s)}_{0pj} \delta_{\bar{\zeta}} \bar{u}^{(s+1)}_{0pj}) +$$
$$+ [y^{(s)}_{2j} - y_{0j}]^{-1} [y'_{0j} + \bar{\zeta}_{0p} (y'^{(s+1)}_{2j} - y'_{0j})] (2\bar{h}_1)^{-1} [\bar{u}^{(s+1)}_{0\,p+1\,j} - \bar{u}^{(s+1)}_{0\,p-1\,j}],$$
$$p = p_0, \ldots, j-1, \ p_0 = 0; \tag{17}$$

$$\check{\check{\bar{a}}}^{(s)}_{0pj} [\tau^{(s)}_j]^{-1} [\bar{u}^{(s+1)}_{0pj} - \bar{u}_{0p\,j-1}] = [y^{(s)}_{2j} - y_{0j}]^{-2} \delta_\zeta (\check{\check{\bar{k}}}^{(s)}_{0pj} \delta_{\bar{\zeta}} \bar{u}^{(s+1)}_{0pj}) +$$
$$+ [y^{(s)}_{2j} - y_{0j}]^{-1} [y'_{0j} + \bar{\zeta}_{0p} (y'^{(s+1)}_{2j} - y'_{0j})] [\bar{u}^{(s+1)}_{0\,p+1\,j} - \bar{u}^{(s+1)}_{0\,p-1\,j}] (2\bar{h}_1)^{-1},$$
$$p = j+1, \ldots, \bar{M}_1 - 1; \tag{18}$$

$$\tau^{(s+1)}{}_j = p_j \gamma^{(s)}_{1j} \bar{h}_1 (y^{(s)}_{2j} - y_{0j}) + (1 + p_j A^{(s)}_j) \tau^{(s)}_j, \tag{19}$$

где $A^{(s)}_j = [\check{\bar{k}}^{(s)}_{0jj} \delta_{\bar{\zeta}} \bar{u}^{(s)}_{0jj} - \check{\check{\bar{k}}}^{(s)}_{0jj} \delta_\zeta \bar{u}^{(s)}_{0jj}] (y^{(s)}_{2j} - y_{0j})^{-1} - \Phi^{(s)}_{1j}$, а параметр p_j выбирается так, что $|1 + p_j A^{(s)}_j| < 1$

$$\tilde{q}^{(s)}_j = \tilde{q}(t_j, \bar{u}^{(s)}_{00j}), \quad \tilde{\tilde{q}}^{(s)}_j = \tilde{\tilde{q}}(t_j, \bar{u}^{(s)}_{Np_N j}), \quad y^{(s)}_{1j} = y_{0j} + j(y^{(s)}_{2j} - y_{0j})\bar{h}_1,$$
$$\gamma^{(s)}_{1j} = \gamma_1(y^{(s)}_{1j}, t_j, \psi_1(y^{(s)}_{1j}, t_j));$$

$\check{\bar{a}}^{(s)}_{0pj}$, $\check{\bar{k}}^{(s)}_{0pj}$ — значения слева от $x = y_1(t)$; $\check{\check{\bar{a}}}^{(s)}_{0pj}$, $\check{\check{\bar{k}}}^{(s)}_{0pj}$ — значения справа от этого фронта. Итерирование при каждом фиксированном j ведется до совпадения двух последовательных приближений с заданной точностью ε.

Рассмотрим теперь случай, когда один из фронтов исчезает: например, фронт $x = y_N(t)$, двигаясь монотонно слева направо, «впадает» в правую границу $x = y_{N+1}(t)$ области D в некоторый момент $t = t^*$. В этом случае отрезок $0 \leqslant \zeta_N \leqslant 1$ будем делить на 2^m равных частей, где m — некоторое натуральное число. При уменьшении в два раза расстояния между фронтом $x = y_N(t)$ и границей $x = y_{N+1}(t)$ нужно сетку узлов на отрезке $0 \leqslant \zeta_N \leqslant 1$ разредить в два раза и т. д. Когда на отрезке $0 \leqslant \zeta_N \leqslant 1$ останется три узла, фронт $x = y_N(t)$ продолжаем до встречи с границей $x = y_{N+1}(t)$, экстраполируя по времени.

§ 3. Сходимость и оценка погрешностей. Пусть $\bar{u}(\zeta_{ip}, t_j)$ и $y_i(t_j)$ — значения точного решения исходной дифференциальной задачи (3), (9) в узлах сетки, а $\bar{u}_{ipj}$ и y_{ij} — значения в тех же узлах точного решения соответствующей безытерационной разностной задачи. Тогда справедлива

Теорема. *Если $\partial\bar{a}_i / \partial\bar{u}$, $\partial\bar{k}_i / \partial\zeta_i$, $\partial\bar{\gamma}_i / \partial\zeta_i$, $\partial\Phi_i / \partial t$, $\partial\bar{u}_i / \partial t$, $\partial^2\bar{u}_i / \partial\zeta_i\partial t$, $\partial^2\bar{u}_i / \partial\zeta_i^2$, $d^3\bar{u}_i / d^3\zeta_i^3$, dy_i / dt, d^2y_i / dt^2 существуют и ограничены, то при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ выполняются оценки*

$$|\bar{u}_{ipj} - \bar{u}(\zeta_{ip}, t_j)| = O(h) + O(\tau), \qquad |y_{ij} - y_i(t_j)| = O(h) + O(\tau). \tag{20}$$

Из оценок (20) вытекает сходимость безытерационной схемы при $h \to 0$ и $\tau \to 0$; практические расчеты показывают, что итерационная схема при тех же шагах сетки h и τ дает более точные результаты.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 VII 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Будак, Ф. П. Васильев, А. Б. Успенский, Сборн. ВЦ МГУ, в. IV. Численные методы в газовой динамике, 1965, стр. 139.