Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

К. Н. Ульянов, Вывод уравнений баланса для неравновесной плазмы,
ТВТ, 1965, том 3, выпуск 4, 536–546

https://www.mathnet.ru/tvt4163

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
9 декабря 2025 г., 01:28:52

Первые три члена в правой части (1.1) описывают упругие взаимодействия электронов между собой (${}^{у}S_{ee}$), с ионами (${}^{у}S_{ei}$) и с атомами (${}^{у}S_{ea}$). Явный вид этих членов обсуждался неоднократно раньше [2]. Четвертый член (${}^{ну}S_{ea}$) описывает неупругое взаимодействие электронов с атомами, включающее в себя как процессы, которые не меняют число свободных электронов (возбуждение атома и удары второго рода), так и процессы, изменяющие число свободных электронов (ионизация и столкновительная рекомбинация). Пятый член описывает излучательную рекомбинацию. Шестой член описывает переходы электрона в непрерывном спектре (тормозное излучение в поле атома и иона). Наконец, S_F является результатом воздействия внешних сил (например, электрического поля). Этот член обеспечивает возможность существования стационарных состояний в неравновесных условиях.

Запишем в явном виде выражение для (1.1).

а. Рассмотрим неупругое взаимодействие электрона с атомом, в результате которого атом может переходить из состояния k в состояние n, а также обратный процесс:

$$\begin{aligned} &(1)\ k, \mathbf{v} \to n, \mathbf{v}' \qquad &&(3)\ n, \mathbf{v}' \to k, \mathbf{v}, \\ &(2)\ k, \mathbf{v}'' \to n, \mathbf{v} \qquad &&(4)\ n, \mathbf{v} \to k, \mathbf{v}''. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь запись $k, \mathbf{v} \to n, \mathbf{v}'$ означает, что до соударения имелся атом в состоянии k и электрон со скоростью $\mathbf{v}$, после соударения атом перешел в состояние n, а электрон перешел в состояние со скоростью $\mathbf{v}'$. Соответствующие члены $S_{kn}^{в-т}$ в уравнении (1.1) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} S_{kn}^{в-т}\, d\mathbf{v} = &- n_k n_e \int \underline{dw_{kn}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')}\, f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} + n_n n_e \int \underline{dw_{nk}(\mathbf{v}', \mathbf{v})}\, f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' + \\ &+ n_k n_e \int \underline{dw_{kn}(\mathbf{v}'', \mathbf{v})}\, f(\mathbf{v}'')\, d\mathbf{v}'' - n_n n_e \int \underline{dw_{nk}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'')}\, f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Стрелкой отмечена переменная, по которой производится интегрирование. Функция распределения нормирована на 1 *.

Известно, что вероятность перехода в сек. системы из состояния 1 в состояние 2 под влиянием возмущения может быть записана в виде

$$dw_{12} = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{12}|^2 \delta(E_2 - E_1)\, df_2. \tag{1.4}$$

Здесь U_{12} — матричный элемент соответствующего возмущения, $|U_{kn}|^2 = |U_{nk}|^2$ [3], df_2 — плотность конечных состояний (состояние 2), а наличие δ-функции в выражении (1.4) требует выполнения закона сохранения энергии.

Дифференциальное сечение соответствующего процесса связано простым соотношением с вероятностью перехода

$$d\sigma_{12} = S^{-1} dw_{12},$$

где S — плотность потока рассеиваемых частиц. Используя (1.4) для dw_{kn}, а также воспользовавшись формулой Больцмана, выражение (1.3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} S^{в-т} = \sum_{k<n,\, n} S_{kn}^{в-т} = - \sum_{k<n,\, n} \Bigg\{ &n_k n_e \int \underline{dw_{kn}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')} f(\mathbf{v}) \left[1 - \frac{y_n f^0(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}')}{y_k f(\mathbf{v}) f^0(\mathbf{v}')} \right] + \\ &+ n_n n_e \int \underline{dw_{nk}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'')} f(\mathbf{v}) \left[1 - \frac{y_k f^0(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}'')}{y_n f(\mathbf{v}) f^0(\mathbf{v}'')} \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

* Мы считаем, что $v_a \ll v$, поэтому, выполнив интегрирование по $d\mathbf{v}_a$, вместо произведения fF_a пишем просто f. Напомним, что $\int F_a d\mathbf{v}_a = 1$.

Суммирование проводится по всем дискретным состояниям. Индексом «нуль» помечена равновесная функция распределения, y_n — отношение концентрации атомов в n-м состоянии к соответствующей равновесной концентрации. Естественно, что в равновесии $y_n = y_k = 1$, $f = f^0$ и $S^{\text{в-т}} = 0$.

В работе [2] член $S^{\text{в-т}}$ записан неверно. Авторы правильно записывают только член $k, \mathbf{v} \to n, \mathbf{v}'$, член $k, \mathbf{v}'' \to n, \mathbf{v}$ записан неправильно, а два оставшихся члена опущены по непонятной причине.

б. Рассмотрим столкновения, меняющие число свободных электронов (ионизация, рекомбинация). Соответствующие члены в кинетическом уравнении могут быть записаны в виде

$$S^{\text{и-р}} d\mathbf{v} = \sum_k \Big\{ - n_k n_e \int \underline{dw_{ke}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{v}_2)} f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} +$$
$$+ n_k n_e \int \underline{dw_{ke}(\mathbf{v}'; \mathbf{v}, \mathbf{v}_2')} f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' + n_k n_e \int \underline{dw_{ke}(\mathbf{v}'; \mathbf{v}'', \mathbf{v})} f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' -$$
$$- n_i n_e^2 \int \underline{dw_{ek}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2'; \mathbf{v}')} f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_2')\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{v}'_2 +$$
$$+ n_i n_e^2 \int \underline{dw_{ek}(\mathbf{v}', \mathbf{v}_2; \mathbf{v})} f(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}_2)\, d\mathbf{v}_1'\, d\mathbf{v}_2 -$$
$$- n_i n_e^2 \int \underline{dw_{ek}(\mathbf{v}'', \mathbf{v}; \mathbf{v}')} f(\mathbf{v}'') f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}''\, d\mathbf{v} \Big\}. \qquad (1.6)$$

Здесь $dw_{ke}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{v}_2)$ — вероятность ионизации атома из состояния k электроном со скоростью $\mathbf{v}$, причем в результате имеем ион в основном состоянии, вторичный электрон со скоростью $\mathbf{v}_2$, первичный электрон со скоростью $\mathbf{v}'$.

Воспользовавшись (1.4) и формулой Саха, преобразуем (1.6) к виду

$$S^{\text{и-р}} = - \sum_k \Big\{ n_k n_e \int \underline{dw_{ke}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{v}_2)} f(\mathbf{v}) \Big[1 - \frac{y_i y_e f^0(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}_2)}{y_k f(\mathbf{v}) f^0(\mathbf{v}') f^0(\mathbf{v}_2)} \Big] +$$
$$+ n_i n_e^2 \int \underline{dw_{ek}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2'; \mathbf{v}')} f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_2') \Big[1 - \frac{y_k f^0(\mathbf{v}) f^0(\mathbf{v}_2') f(\mathbf{v}')}{y_i y_e f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_2') f^0(\mathbf{v}')} \Big] d\mathbf{v}_2' +$$
$$+ n_i n_e^2 \int \underline{dw_{ek}(\mathbf{v}'', \mathbf{v}; \mathbf{v}')} f(\mathbf{v}'') f(\mathbf{v}) \Big[1 - \frac{y_k f^0(\mathbf{v}'') f^0(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}')}{y_i y_e f(\mathbf{v}'') f(\mathbf{v}) f^0(\mathbf{v}')} \Big] d\mathbf{v}'' \Big\}. \qquad (1.7)$$

Здесь y_e и y_i — отклонения от равновесных концентраций электронов и ионов соответственно.

В [2] из шести различных членов, входящих в $S_{kn}^{\text{и-р}}$, записаны только два, в результате чего уравнение баланса энергии для электронов оказалось неверным.

в. Рассмотрим аналогичным образом радиационные процессы. В общем случае функция распределения F фотонов по частотам может зависеть от координат $\mathbf{x}$, т. е. $F(\omega, \mathbf{x})$. Здесь мы будем принимать во внимание только спонтанное излучение.

После несложных преобразований, используя свойство симметрии амплитуды рассеяния и вытекающую из него связь между сечениями прямого и обратного процессов для рекомбинационного и тормозного излучения, получаем

$$^{\text{р}}S_{ei} = - \sum_m n_i n_e \int \underline{dw^{\text{р}}(\mathbf{v}; a_m, \mathbf{k})} f(\mathbf{v}) \Big[1 - \frac{y_k f^0(\mathbf{v}) F(\mathbf{k}, \mathbf{x})}{y_i y_e f(\mathbf{v}) F^0(\mathbf{k})} \Big], \qquad (1.8)$$

$$^{\text{т}}S_{e,\,ia} = - \sum_{ia} n_{i,\,a} n_e \Big\{ \int \underline{dw^{\text{т}}_{e,\,ia}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{k})} f(\mathbf{v}) \Big[1 - \frac{f^0(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}') F(\mathbf{k}, \mathbf{x})}{f(\mathbf{v}) f^0(\mathbf{v}') F^0(\mathbf{k})} \Big] -$$
$$- \int \underline{dw^{\text{т}}_{ia,\,e}(\mathbf{k}_2, \mathbf{v}; \mathbf{v}_2)} f(\mathbf{v}) F(\mathbf{k}_2 \mathbf{x}) \Big[1 - \frac{f^0(\mathbf{v}) F^0(\mathbf{k}_2) f(\mathbf{v}_2)}{f(\mathbf{v}) F(\mathbf{k}_2, \mathbf{x}) f^0(\mathbf{v}_2)} \Big] d\mathbf{k}_2 \Big\}. \qquad (1.9)$$

Здесь $F^0(\mathbf{k})$ — распределение Вина фотонов по частотам. Для нахождения функции распределения $F(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ должно быть также написано кинетическое уравнение. Обычно его записывают как интегральное уравнение переноса излучения, однако более логично и для фотонов записывать уравнение, аналогичное уравнению (1.1) [4]. В этой работе будем рассматривать однородную полностью прозрачную плазму, поэтому можно считать $F(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = 0$ и выражения (1.8) и (1.9) упрощаются.

2. Уравнение баланса свободных электронов

Известно, что уравнение баланса частиц в элементе объема $d\mathbf{x}$ может быть получено из кинетического уравнения интегрированием по пространству скоростей $d\mathbf{v}$. Все члены в уравнении (1.1) можно разбить на две группы:

а) S^v — приводящие к изменению числа электронов и б) S^c — не меняющие числа электронов. Естественно, что $\int S^c d\mathbf{v} = 0$. Действительно,

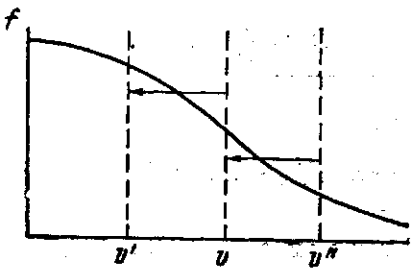

Рис. 1

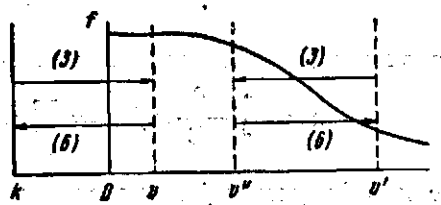

Рис. 2

в кинетическом уравнении всегда встречается два типа членов (рис. 1) $\mathbf{v} \to \mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}'' \to \mathbf{v}$, причем они входят в уравнение с противоположными знаками и взаимно уничтожаются при интегрировании по всему объему $d\mathbf{v}$. Поясним это на конкретном примере. Рассмотрим столкновение, в результате которого атом переходит из одного состояния в другое. Из четырех возможных типов перехода (1.2) взаимно уничтожатся переходы (1) и (2), (3) и (4). Рассмотрим одну из этих пар, например (1) и (2). После интегрирования по объему $d\mathbf{v}$, соответствующие члены имеют вид

$$-n_k n_e \int \underline{dw_{kn}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')} f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} + n_k n_e \int \underline{dw_{kn}(\mathbf{v}'', \mathbf{v})} f(\mathbf{v}'')\, d\mathbf{v}''.$$

В обоих интегралах проводится интегрирование по переменным, которые отличаются только обозначением, поэтому суммарный вклад этих членов равен нулю. В уравнении (1.1) к группе S^c относятся члены ${}^{\text{у}}S_{ee}$, ${}^{\text{у}}S_{ei}$, ${}^{\text{у}}S_{ea}$, ${}^{\text{т}}S_{e,\,ai}$, S_F, а также часть члена ${}^{\text{ну}}S_{ea}$, а именно $S^{\text{в-т}}$.

Вклад в уравнение баланса свободных электронов дают только члены $S^{\text{и-р}}$ и ${}^{\text{р}}S_{ei}$, которые относятся к группе S^v.

Рассмотрим сначала $\int S^{\text{и-р}} d\mathbf{v}$. Схематически члены, записанные в (1.6), можно представить следующим образом:

$$\begin{array}{ll} (1)\ k, \mathbf{v} \to I, \mathbf{v}', \mathbf{v}_2, & (4)\ I, \mathbf{v}', \mathbf{v}_2 \to k, \mathbf{v}, \\ (2)\ k, \mathbf{v}' \to I, \mathbf{v}, \mathbf{v}_2', & (5)\ I, \mathbf{v}, \mathbf{v}_2' \to k, \mathbf{v}', \\ (3)\ k, \mathbf{v}' \to I, \mathbf{v}'', \mathbf{v}, & (6)\ I, \mathbf{v}'', \mathbf{v} \to k, \mathbf{v}'. \end{array}$$

При интегрировании по $d\mathbf{v}$ взаимно уничтожаются члены (1) и (2) и (4) и (5). Действительно, рассмотрим, например, вклад членов (1) и (2):

$$-n_k n_e \int \underline{dw_{ke}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{v}_2)} f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} + n_k n_e \int \underline{dw_{ke}(\mathbf{v}'; \mathbf{v}, \mathbf{v}_2')} f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}'.$$

Поясним, что δ-функция, имеющаяся в dw_{ke}, может «снять» интегрирование по $\mathbf{v}_2$, после чего оба эти интеграла отличаются только обозначением переменных интегрирования, поэтому их суммарный вклад равен нулю. Вклад в уравнение баланса свободных электронов дают только члены (3) и (6), причем член (3) описывает переход, в результате которого в объеме $d\mathbf{v}$ рождается вторичный электрон, т. е. описывает истинное рождение частицы в объеме $d\mathbf{v}$, а член (6) описывает уничтожение вторичного электрона в объеме $d\mathbf{v}$ (рис. 2). Соответствующие члены имеют вид

$$n_k n_e \int \underline{dw_{ke}(\mathbf{v}'; \mathbf{v}'', \mathbf{v})} f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' - n_i n_e^2 \int \underline{dw_{ek}(\mathbf{v}'', \mathbf{v}; \mathbf{v}')} f(\mathbf{v}'') f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}'' d\mathbf{v} = \\ = n_k n_e j_{ke} - n_i n_e^2 j_{ek}, \tag{2.1}$$

что служит определением для коэффициентов ионизации и рекомбинации j_{ke} и j_{ek}.

Рассмотрим $\int {}^{\text{р}}S_{ei} d\mathbf{v}$. Поскольку поглощение излучения отсутствует, можно записать

$$\dot{n}_i n_e \alpha_{ek} = \int {}^{\text{р}}S_{ei} d\mathbf{v}, \quad \text{где } \alpha_{ek} = \int \underline{dw_{ek}{}^{\text{р}}(\mathbf{v}; a_k, k)} f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \tag{2.2}$$

Уравнение баланса электронов имеет вид [5]:

$$\dot{n}_e = \int \frac{\partial}{\partial t} n_e f d\mathbf{v} = \sum_k (n_k n_e j_{ke} - n_i n_e^2 j_{ek} - n_i n_e \alpha_{ek}), \tag{2.3}$$

где коэффициенты j и α характеризуют скорости соответствующих процессов.

3. Уравнение баланса энергии электронов

Разобьем все члены в кинетическом уравнении снова на две группы $S_e{}^{\text{c}}$ и $S_e{}^{v}$, причем теперь в группу $S_e{}^{\text{c}}$ включим процессы, которые не меняют распределения частиц по состояниям дискретного энергетического спектра, а в группу $S_e{}^{v}$ — процессы, которые меняют это распределение. Таким образом,

$$\frac{\partial f n_e}{\partial t} = S_e{}^{v} + S_e{}^{\text{c}}. \tag{3.1}$$

Уравнение баланса энергии получается из кинетического уравнения умножением на $\varepsilon = mv^2/2$ и интегрированием по $d\mathbf{v}$. Левая часть уравнения (3.1) может быть записана в виде $\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon n_e = \frac{\partial}{\partial t} E_e$, где E_e — полная кинетическая энергия электронов в 1 *см*³. Преобразуем первый член в правой части. Учтем, что

$$S_e{}^{v} = S^{\text{в-т}} + S^{\text{и-р}} + {}^{\text{р}}S_{ei}. \tag{3.2}$$

а. Для члена $S^{\text{в-т}}$ возможны переходы (1.2), если для простоты выкладок рассмотреть атом с двумя дискретными состояниями k и n.

Обозначим $dw_{kn} = d\nu_{kn}\delta(E_n - E_k)$, тогда

$$\int S^{\text{в-т}} \varepsilon d\mathbf{v} = -n_k n_e \int \underline{d\nu_{kn}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')}\, \delta\left(v^2 - v'^2 - \frac{2}{m} E_{kn}\right) \varepsilon f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} + \\ + n_k n_e \int \underline{d\nu_{kn}(\mathbf{v}'', \mathbf{v})}\, \delta\left(v''^2 - v^2 - \frac{2}{m} E_{kn}\right) \varepsilon f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' + \\ + n_n n_e \int \underline{d\nu_{nk}(\mathbf{v}', \mathbf{v})}\, \delta\left(v^2 - v'^2 - \frac{2}{m} E_{nk}\right) \varepsilon f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' -$$

$$-n_n n_e \int \underline{d\nu_{nk}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'')}\, \delta\left(v''^2 - v^2 - \frac{2}{m} E_{nk}\right) \varepsilon f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \qquad (3.3)$$

Заменяя переменные интегрирования, получим

$$\int S^{\text{в-т}} \varepsilon d\mathbf{v} = -n_k n_e \int \underline{d\nu_{kn}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')}\, \delta\left(v^2 - v'^2 - \frac{2}{m} E_{kn}\right)(\varepsilon - \varepsilon') f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} +$$

$$+ n_n n_e \int d\nu_{nk}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'')\, \delta\left(v''^2 - v^2 - \frac{2}{m} E_{nk}\right)(\varepsilon'' - \varepsilon) f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \qquad (3.4)$$

В первом интеграле $\varepsilon - \varepsilon' = E_{kn}$, во втором $\varepsilon'' - \varepsilon = E_{nk}$ ($E_{kn} = E_{nk} = |E_k - E_n|$, где E_k и E_n — энергия k-го и n-го состояний), поэтому окончательно имеем:

$$\int S_{kn}^{\text{в-т}} \varepsilon d\mathbf{v} = -E_{kn}(n_k n_e j_{kn} - n_n n_e j_{nk}), \qquad (3.5)$$

где

$$j_{kn} = \int \underline{dw_{kn}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')} f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}, \quad j_{nk} = \int \underline{dw_{nk}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'')} f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}.$$

6. Рассмотрим теперь член $S^{\text{и-р}}$. Схематически все возможные процессы, учитывающие ионизацию атома из k-го состояния и соответственно рекомбинацию, представлены в п. 2. Имеем:

$$\int S_k^{\text{и-р}} \varepsilon d\mathbf{v} = -n_k n_e \int \underline{d\nu_{ke}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{v}_2)}\, \delta\left(v^2 - v'^2 - v_2^2 - \frac{2}{m} E_k\right) \varepsilon f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} +$$

$$+ n_k n_e \int \underline{d\nu_{ke}(\mathbf{v}'; \mathbf{v}, \mathbf{v}_2')}\, \delta\left(v'^2 - v^2 - v_2'^2 - \frac{2}{m} E_k\right) \varepsilon f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' +$$

$$+ n_k n_e \int \underline{d\nu_{ke}(\mathbf{v}'; \mathbf{v}'', \mathbf{v})}\, \delta\left(v'^2 - v''^2 - v^2 - \frac{2}{m} E_k\right) \varepsilon f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' -$$

$$- n_i n_e^2 \int \underline{d\nu_{ek}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2'; \mathbf{v}')}\, \delta\left(v'^2 - v^2 - v_2'^2 - \frac{2}{m} E_k\right) \varepsilon f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_2')\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{v}_2' +$$

$$+ n_i n_e^2 \int \underline{d\nu_{ek}(\mathbf{v}', \mathbf{v}_2; \mathbf{v})}\, \delta\left(v^2 - v'^2 - v_2^2 - \frac{2}{m} E_k\right) \varepsilon f(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}_2)\, d\mathbf{v}'\, d\mathbf{v}_2 -$$

$$- n_i n_e^2 \int \underline{d\nu_{ek}(\mathbf{v}'', \mathbf{v}; \mathbf{v}')}\, \delta\left(v'^2 - v''^2 - v^2 - \frac{2}{m} E_k\right) \varepsilon f(\mathbf{v}'') f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}''\, d\mathbf{v}. \qquad (3.6)$$

Преобразуем два первых интеграла. Заменим во втором переменные интегрирования по схеме $\mathbf{v}' \to \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \to \mathbf{v}'$. Получим

$$-n_k n_e \int \underline{d\nu_{ke}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{v}_2)}\, \delta\left(v^2 - v'^2 - v_2^2 - \frac{2}{m} E_k\right)(\varepsilon - \varepsilon') f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} =$$

$$= -n_k n_e E_k j_{ke} - n_k n_e \int \underline{d\nu_{ke}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{v}_2)}\, \delta\left(v^2 - v'^2 - v_2^2 - \frac{2}{m} E_k\right) \frac{m v_2^2}{2} f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \qquad (3.7)$$

Видно, что последний член в равенстве (3.7) сокращается с третьим интегралом в (3.6), если в нем заменить переменные интегрирования. Это понятно, так как при каждом акте ионизации атома из состояния k энергия свободных электронов меняется на величину E_k, поскольку первичный электрон теряет энергию $E_k + m v_2^2/2$, а вторичный электрон приносит с собой энергию $m v_2^2/2$. Преобразуем аналогичным образом три последних члена в (3.6). Результат можно записать в виде суммы по всем со-

стояниям атома

$$\int S^{\text{и-р}}\varepsilon d\mathbf{v} = -\sum_k n_k n_e E_k j_{ke} + \sum_k n_i n_e^2 E_k j_{ek}. \tag{3.8}$$

в. Преобразуем член в S_e^v, который описывает переход свободного электрона в дискретное состояние k с излучением фотона $h\nu$

$$\int {}^{\text{р}}S_{ei}\varepsilon d\mathbf{v} = -n_i n_e \int \underbrace{d\nu_{ek}^{\text{р}}(\mathbf{v};\, a_k, \mathbf{k})}_{\uparrow}\, \delta\left(v^2 - \frac{\hbar^2 k^2}{m^2} + \frac{2}{m}E_k\right)\varepsilon f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} =$$

$$= n_i n_e E_k \alpha_{ek} - W^{\text{р}}_{\text{изл}}, \text{ где } W^{\text{р}}_{\text{изл}} = \int \underbrace{dw_{ek}^{\text{р}}(\mathbf{v}; a_k \mathbf{k})}_{\uparrow}\, h\nu f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}.$$

Баланс энергии электронов после суммирования по всем состояниям атома имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_e = -W_{\text{упр}} - W^{\text{т}}_{\text{изл}} + \left(-W^{\text{р}}_{\text{изл}} + \sum_k n_i n_e E_k \alpha_{ek}\right) +$$

$$+ \left(-\sum_k n_k n_e E_k j_{ke} + \sum_k n_i n_e^2 E_k j_{ek}\right) +$$

$$+ \left(-\sum_{k<n;\, n} n_k n_e E_{kn} j_{kn} + \sum_{n>k,\, k} n_n n_e E_{nk} j_{nk}\right) + W_F. \tag{3.9}$$

Здесь $W_{\text{упр}} = \int ({}^{\text{у}}S_{ea} + {}^{\text{у}}S_{ei})\varepsilon d\mathbf{v}$ — обмен энергией электронов при упругом взаимодействии с тяжелыми частицами; явное выражение для $W_{\text{упр}}$ может быть взято из [2]. $W_{\text{изл}}{}^{\text{т}}$ и $W_{\text{изл}}{}^{\text{р}}$ — полные потери энергии при тормозном и рекомбинационном излучении. При каждом акте тормозного излучения свободные электроны теряют энергию, равную энергии кванта, в то время как при акте рекомбинационного излучения электроны теряют энергию $mv^2/2 = h\nu - E_k$. Последнее обстоятельство учитывается положительным членом $\sum_k E_k \alpha_{ek} n_i n_e$. Две последующие скобки учитывают неупругие столкновения с тяжелыми частицами. W_F учитывает изменение E_e за счет внешних источников [6].

В неравновесных условиях обычное термодинамическое понятие температуры частиц часто теряет смысл, однако можно ввести эффективную температуру $^3/_2 kT = \int f\varepsilon d\mathbf{v}$. Тогда левая часть уравнения (3.9) имеет вид $\frac{\partial}{\partial t}\frac{3}{2}kT_e n_e$. Естественно, что определенная таким образом температура T совпадает с истинной температурой, если $f = f^0$, и мало отличается от нее, если функция распределения близка к равновесной в той области скоростей, которая дает основной вклад в $\int f\varepsilon d\mathbf{v}$.

4. Кинетическое уравнение для тяжелых частиц

Запишем кинетическое уравнение для атома в k-м состоянии:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k F_k(\mathbf{v}_a) = {}^{\text{у}}S_{aa} + {}^{\text{у}}S_{ai} + {}^{\text{у}}S_{ae} + S_{ea}{}^{\text{ну}} + S^{\text{изл}}. \tag{4.1}$$

Первые три члена в правой части (4.1) меняют лишь скорость атома v_a, в то время как два последних переводят атом из k-го состояния в другое, не меняя v_a. Можно считать, что две этих группы членов действуют независимо (нет корреляции между скоростью атома и распределением атома по возбужденным состояниям), если $v_a \ll v$.

Получим из (4.1) уравнение баланса атомов. Для этого умножим (4.1) на $d\mathbf{v}_a$ и проинтегрируем по всему пространству скоростей. В соответст-

вии со сказанным выше вклад ${}^{\text{у}}S_{aa}$, ${}^{\text{у}}S_{ai}$ и ${}^{\text{у}}S_{ae}$ будет равен нулю. Имеем

$$\dot{n}_k = \int S_{ea}{}^{\text{ну}}\, d\mathbf{v}_a + \int S^{\text{изл}}\, d\mathbf{v}_a. \tag{4.2}$$

Здесь $S_{ea}{}^{\text{ну}} = S^{\text{в-т}} + S^{\text{и-р}}$, причем члены $S^{\text{в-т}}$ и $S^{\text{и-р}}$ записываются аналогично п. 1. Однако в то время, как в кинетическом уравнении для свободных электронов имелось четыре члена, описывающих переход атома $k \leftrightarrow n$, выражение для $S_k{}^{\text{в-т}}$ содержит два члена, а остальные находятся в выражении для $S_n{}^{\text{в-т}}$. Аналогично дело обстоит и с $S^{\text{и-р}}$.

В $S^{\text{изл}}$ будем учитывать только спонтанное излучение — линейчатое и рекомбинационное. Выполнив преобразования, аналогичные п. 2, запишем результат в виде:

$$\dot{n}_k = \sum_{n \neq k} n_n n_e j_{nk} + n_i n_e^2 j_{ek} + n_i n_e a_{ek} - \sum_{n \neq k} n_k n_e j_{kn} - \sum_{n<k} n_k A_{kn} - n_k n_e j_{ke}. \tag{4.3}$$

Здесь первый член описывает переход атомов из всех возбужденных состояний в k-е состояние в результате соответствующего процесса возбуждения или тушения атома в состоянии n при столкновениях с электронами, второй и третий члены описывают рекомбинационный захват электрона с образованием атома в k-м состоянии, четвертый и пятый члены описывают переход атома $k \to n$ при столкновении с электроном или в результате спонтанного излучения фотона, последний член описывает ионизацию атома из состояния k электроном. A_{kn} — вероятность излучательного перехода $k \leftrightarrow n$.

Получим уравнение баланса энергии атомов. Для этого умножим (4.1) на $mv_a^2/2$ и проинтегрируем по dv_a.

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k \varepsilon_k = \sum W_{\text{упр}}^{kn} + W_{\text{упр}}^{ki} + W_{\text{упр}}^{ke} + \sum n_n n_e j_{nk} \varepsilon_n + n_i n_e^2 j_{ek} \varepsilon_i + \\ + n_i n_e a_{ek} \varepsilon_i - \sum n_k n_e j_{kn} \varepsilon_k - \sum n_k A_{kn} \varepsilon_k - n_k n_e j_{ke} \varepsilon_k. \tag{4.4}$$

Здесь $W_{\text{упр}}^{kn}$ характеризует обмен энергией между атомами сортов k и n при упругих столкновениях, $W_{\text{упр}}^{ki}$ и $W_{\text{упр}}^{ke}$ — между атомами сорта k и ионами и электронами. Эти члены меняют только ε_k, не изменяя n_k. Остальные члены описывают изменение энергии атомов k-го сорта за счет изменения n_k при неупругих столкновениях и радиационных процессах. Так, процесс $k \to n$ приводит к уменьшению энергии на ε_k, а если происходит процесс $n \to k$, то энергия атомов, находящихся в k-м состоянии, увеличивается на ε_n.

Получим теперь соответствующие уравнения для ионов. Кинетическое уравнение для ионов имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i F_i(\mathbf{v}_i) = {}^{\text{у}}S_{ii} + {}^{\text{у}}S_{ia} + {}^{\text{у}}S_{ie} + S_{ie}^{\text{ну}} + {}^{\text{р}}S^{\text{изл}} + S_{F'}. \tag{4.5}$$

Уравнения баланса ионов и энергии ионов могут быть получены аналогично уравнениям баланса атомов и энергии атомов и имеют вид:

$$\dot{n}_i = \sum (n_k n_e j_{ke} - n_i n_e^2 j_{ek} - n_i n_e a_{ek}), \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i \varepsilon_i = \sum W_{\text{упр}}^{ik} + W_{\text{упр}}^{ie} + \sum (n_k n_e j_{ke} \varepsilon_k - n_i n_e^2 j_{ek} \varepsilon_i - n_i n_e a_{ek} \varepsilon_i). \tag{4.7}$$

Естественно, что уравнение (4.6) совпадает с (2.3), поскольку $n_i = n_e$. Заметим, что член ${}^{\text{у}}S_{aa}$ в уравнении (4.1) стремится установить равновесное распределение атомов по скоростям, в то время ${}^{\text{у}}S_{ea}$ и ${}^{\text{у}}S_{ai}$ могут вы-

зывать отклонение от него. Оценим их роль. Можно записать, что

$$^{\text{у}}S_{aa} : {}^{\text{у}}S_{ai} : {}^{\text{у}}S_{ae} = n_a\nu_{aa} : n_i\nu_{ia} : n_e\nu_{ea}.$$

где ν — частота соударений для соответствующего процесса. Обычно $^{\text{у}}S_{aa} \gg {}^{\text{у}}S_{ai}$, $^{\text{у}}S_{ae}$, поэтому $^{\text{у}}S_{aa}$ устанавливает равновесное распределение атомов по скоростям, в то время как члены $^{\text{у}}S_{ai}$ и $^{\text{у}}S_{ae}$ вызывают лишь малое отклонение распределения $F(\mathrm{v}_a)$ от равновесного. Кроме того, частота взаимодействия ионов с атомами обычно значительно больше частоты взаимодействия с электронами, поэтому функция распределения ионов по скоростям также является равновесной с той же температурой, что и атомов. В этих случаях можно считать, что $\varepsilon_k \approx \varepsilon_i = \varepsilon$, тогда члены $W^{kn}_{\text{упр}}$, $W^{ki}_{\text{упр}}$ и $W^{ik}_{\text{упр}}$ равны нулю, и уравнения (4.4) и (4.7) значительно упрощаются.

Таким образом, система кинетических уравнений (1.1), (4.1), (4.2), (4.5) сведена к соответствующей системе уравнений баланса частиц (2.3), (4.3) и системе уравнений баланса энергии электронов (3.9) и тяжелых частиц (4.4) и (4.7). В эти уравнения входят различные вероятности переходов, усредненные по функции распределения электронов по скоростям. Если последняя известна, то уравнения баланса заключают в себе такую же информацию о неравновесной системе, как и кинетические уравнения. Естественно, что различные члены в уравнении (1.1) по разному влияют на функцию распределения, поэтому при его решении в каждом конкретном случае надо оставлять основные члены, определяющие вид функции распределения.

5. Другая форма уравнений баланса энергии

Уравнение баланса энергии (3.9) может быть приведено к более удобной форме, если воспользоваться уравнениями баланса атомов (4.3). Для наглядности рассмотрим атом с двумя дискретными состояниями и непрерывным спектром. Баланс энергии электронов в этом случае запишется в форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_e = -W_{\text{упр}} - W^{\text{т}}_{\text{изл}} - W^{\text{р}}_{\text{изл}} + n_i n_e(E_1\alpha_{e1} + E_2\alpha_{e2}) +$$
$$+ E_{12}(n_2 n_e j_{21} - n_1 n_e j_{12}) - E_1 n_1 n_e j_{1e} - E_2 n_2 n_e j_{2e} + n_i n_e^2(E_1 j_{e1} + E_2 j_{e2}) + W_F. \tag{5.1}$$

Соответствующие уравнения для атомов имеют вид:

$$\dot{n}_1 = -n_1 n_e j_{12} + n_2 n_e j_{21} + n_2 A_{21} + n_i n_e \alpha_{e1} + n_i n_e^2 j_{e1} - n_1 n_e j_{1e}, \tag{5.2}$$

$$\dot{n}_2 = n_1 n_e j_{12} - n_2 n_e j_{21} - n_2 A_{21} + n_i n_e \alpha_{e2} + n_i n_e^2 j_{e2} - n_2 n_e j_{2e}. \tag{5.3}$$

После несложных преобразований этих уравнений можно получить:

$$\frac{\partial}{\partial t}[E_e - (n_1 E_1 + n_2 E_2)] = -W_{\text{упр}} - W^{\text{т}}_{\text{изл}} - W^{\text{р}}_{\text{изл}} - n_2 A_{21} E_{21} + W_F. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) допускает простую интерпретацию: суммарное изменение энергии электронов и внутренней энергии возбужденных атомов складывается из потерь энергии свободными электронами при упругих взаимодействиях с тяжелыми частицами и потерь энергии на излучение. $W^{\text{т}}_{\text{изл}}$ характеризует потерю энергии свободными электронами, $n_2 A_{21} E_{21}$ — потерю внутренней энергии возбужденными атомами, а $W^{\text{р}}_{\text{изл}}$ состоит, как уже отмечалось, из двух частей: одна характеризует потерю энергии свободными электронами, а другая — потерю внутренней энергии атомами.

Часто уравнение (5.4) значительно удобнее использовать, чем (3.9), поскольку в правой части (5.4) стоят только источники и потери энергии *. В общем случае уравнение (5.4) запишется в форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E_e - \sum n_k E_k\right) = W_F - W_{\text{упр}} - W^{\text{т}}_{\text{изл}} - W^{\text{р}}_{\text{изл}} - W^{\text{л}}_{\text{изл}}. \qquad (5.5)$$

Уравнение (5.5) может быть записано в иной форме. Действительно, если воспользоваться нормировочным уравнением $\Sigma n_k + n_i = \text{const}$ и условием $n_i = n_e$, то (5.5) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(E_1 + \frac{3}{2}kT_e\right)n_e + \sum_2 n_k E_{k1}\right] = W_F - W_{\text{упр}} - W_{\text{изл}}. \qquad (5.6)$$

Получим другие формы баланса энергии для тяжелых частиц. Заметим, что неупругие столкновения и радиационные процессы в уравнениях (4.4) и (4.7), которые переводят один сорт тяжелых частиц в другой, не меняют суммарной энергии тяжелых частиц и поэтому должны исчезнуть из общего уравнения баланса для всех тяжелых частиц. Кроме того, из него должны исчезнуть члены, приводящие к обмену энергией между тяжелыми частицами. Действительно, сложим все уравнения баланса энергии для возбужденных атомов с уравнением баланса энергии для ионов. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum (n_k\varepsilon_k + n_i\varepsilon_i) = W^{ea}_{\text{упр}} + W^{ei}_{\text{упр}} + W_{F'}, \qquad (5.7)$$

где $W^{ea}_{\text{упр}}$ и $W^{ei}_{\text{упр}}$ — обмен энергией при упругом взаимодействии тяжелых частиц с электронами, $W_{F'}$ — энергия, которую получают тяжелые частицы за счет действия внешних сил (например, ионы от электрического поля). Запишем уравнение баланса энергии для всех частиц плазмы сразу. В него не войдут члены, которые описывают обмен энергией между компонентами плазмы. Сложив уравнения (5.7) и (5.5), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(E_\Sigma + E_e) - \sum n_k E_k\right] = W_F + W_{F'} - W_{\text{изл}}. \qquad (5.8)$$

Здесь изменение кинетической $(E_\Sigma + E_e)$ и внутренней $(\Sigma n_k E_k)$ энергии происходит за счет притока энергии от внешних сил W_F и $W_{F'}$ и стока энергии в результате выхода излучения $(W_{\text{изл}})$. Уравнением (5.8) удобно пользоваться при анализе изотермической плазмы.

6. Обсуждение результатов

Уравнения баланса частиц и энергии, полученные из кинетических уравнений, позволяют с достаточной точностью рассчитать изменение во времени параметров плазмы, если известна функция распределения электронов по скоростям. Таким образом, задача сводится к совместному решению уравнений баланса и кинетического уравнения для электронов, в которое концентрации атомов и электронов входят в качестве параметров.

* Уравнение (3.9) можно переписать в форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_e = W_F - W_{\text{упр}} - W_{\text{изл}} - W^{\uparrow}_{\text{ну}} + W^{\downarrow}_{\text{ну}}, \qquad (3.9)$$

где $W^{\uparrow}_{\text{ну}}$ характеризует потери энергии электронов при возбуждении и ионизации, а $W^{\downarrow}_{\text{ну}}$ — приобретение энергии при ударах второго рода (тушении) и рекомбинации. Точность, с которой можно определить $E_e(t)$, невелика, если $|W_{\text{ну}}| \gg |W_F - W_{\text{упр}} - W_{\text{изл}}|$. Уравнение (5.5) свободно от этого недостатка. Заметим, что часто при изучении нестационарной плазмы реализуется именно такой случай [6], и хотя уравнения (3.9) и (5.5) полностью эквивалентны, использование (5.5) сильно упрощает расчет.

При равновесии из кинетического уравнения мы получим максвелловское распределение по скоростям. Выход излучения и внешние силы вызывают отклонение функции распределения от равновесной. В неизотермической плазме неравновесность вызывается также взаимодействием с тяжелыми частицами. Равновесное распределение может быть обеспечено электрон-электронными соударениями (*ee*). Естественно, что если их частота значительно больше частот соударений, вызывающих отклонение, то для данной скорости функция распределения близка к равновесной.

Анализу функции распределения электронов по скоростям посвящено большое число работ [2]. К сожалению, при решении (1.1) с учетом неупругих столкновений обычно используется квазиклассическое приближение, применимость которого часто вызывает сомнение. Нами было получено этим же способом решение с учетом высвечивания и прямых и обратных процессов при неупругом взаимодействии электрона с атомом. Было показано, как отклонение от равновесной функции распределения влияет на уравнение баланса [6]. Однако отметим еще раз, что математические методы решения кинетических уравнений в сильно неравновесных условиях пока еще разработаны недостаточно.

Остановимся еще на одном вопросе. В этом случае, когда функция распределения электронов отлична от равновесной, при расчете коэффициентов j и α необходимо знать зависимость эффективных сечений от скорости налетающей и рассеянной частиц и от угла рассеяния. Если нас не интересуют явления переноса и функция распределения близка к симметричной, то можно воспользоваться усредненными по углам сечениями. Однако как для решения кинетического уравнения, так и для решения уравнений баланса нужно знать зависимость сечения от энергии начальных и конечных состояний.

Например, при измерении сечения ионизации $\sigma_{ke}(\mathbf{v}; \mathbf{v}', \mathbf{v}_2)$ необходимо измерить сечение как функцию от $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$, тогда $|\mathbf{v}_2|$ определяется из закона сохранения энергии, однако $\mathbf{v}_2$ остается неизвестной. Как уже отмечалось, такое сечение может быть использовано при расчете коэффициента j_{ke}. Однако если производится измерение сечения только в зависимости от v, то это иногда оказывается совершенно недостаточно для использования его при расчете параметров плазмы, функция распределения электронов которой по скоростям отлична от максвелловской.

Автор выражает благодарность Ф. Р. Улиничу и А. Н. Старостину за ценные обсуждения.

Всесоюзный электротехнический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 5 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Грановский. Электрический ток в газе, 1, ГИТТЛ, М., 1952.
2. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич. Усп. физ., н., 20, вып. 2, 202, 1960.
3. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Квантовая механика. Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1963.
4. Б. А. Векленко. Диссертация МЭИ, 1959.
5. К. Н. Ульянов. Теплофизика высоких температур, 2, № 2, 1964.
6. К. Н. Ульянов. Теплофизика высоких температур, 2, № 6, 1964.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
Том 3 *1965* *№ 4*

УДК 536.461:546.27

СОСТАВ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ БОРА ПРИ 3000—3200° К И ТЕПЛОТА ОБРАЗОВАНИЯ BO_2

А. Д. Русин, В. М. Татевский

Методом одновременной регистрации давления и спектра взрыва показано, что при 3000—3200° К основными борсодержащими продуктами сгорания при взрыве в бомбе смесей H_2, O_2, CO с малыми добавками B_2H_6 являются HBO_2 и BO_2.

Теплота образования BO_2 определена через Ф*-потенциалы ($\Delta H_f^0(BO_2) = -68 \pm 7$ *ккал/моль*) и по зависимости K_p от T ($\Delta H_f^0(BO_2) = -65 \pm 7$ *ккал/моль*).

В работе [1] нами предложен метод установления состава продуктов сгорания бора при высоких температурах. Ввиду некоторых недостатков методики эксперимента и для возможно более точного определения теплоты образования BO_2 была создана новая установка и выполнены две серии опытов — при 2970 и 3186° К. Литературные данные по теплоте образования BO_2 немногочисленны и являются по существу оценочными [2—4].

В соответствии с масс-спектрометрическими [5—7] и спектроскопическими [8—10] данными мы предполагали возможность присутствия в газовой фазе при 3000—3200° К следующих соединений бора: B_2O_3, BO, B_2O_2, BO_2, HBO_2. В условиях взрыва в бомбе с центральным зажиганием смесей H_2, O_2, CO, Ar, N_2 и малых добавок B_2H_6 связь между общим содержанием бора — a и концентрациями воды, гидроксила и BO_2 дается выражением [1]:

$$a = \left(1 + \frac{K_3}{A m_{O_2}^{1/2}} + \frac{1}{K_4} U\right) m_{BO_2} + \frac{2K_3^2}{K_2 m_{O_2}} \left(1 + \frac{A m_{O_2}^{1/2}}{K_1}\right) m_{BO_2}^2. \qquad (1)$$

Через m обозначены концентрации соответствующих продуктов, выраженные в молях в расчете на 100 молей исходной смеси. $K_1 - K_4$ — значения констант равновесия при постоянном давлении реакций:

$$B_2O_3 \rightleftarrows B_2O_2 + {}^1/_2O_2, \quad K_1 = \frac{m_{B_2O_2} m_{O_2}^{1/2}}{m_{B_2O_3}} A, \qquad (2)$$

$$B_2O_2 \rightleftarrows 2BO, \quad K_2 = \frac{m_{BO}^2}{m_{B_2O_2}} A^2, \qquad (3)$$

$$BO_2 \rightleftarrows BO + {}^1/_2O_2, \quad K_3 = \frac{m_{BO} m_{O_2}^{1/2}}{m_{BO_2}} A, \qquad (4)$$

$$HBO_2 + OH \rightleftarrows BO_2 + H_2O, \quad K_4 = \frac{m_{BO_2} m_{H_2O}}{m_{HBO_2} m_{OH}}; \quad U = \frac{m_{H_2O}}{m_{OH}}, \qquad (5)$$