

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Диесперов, О течении в слое смешения Чепмена,
Докл. АН СССР, 1985, том 284, номер 2, 305–309

<https://www.mathnet.ru/dan8973>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

19 мая 2025 г., 15:23:53



В.Н. ДИЕСПЕРОВ

О ТЕЧЕНИИ В СЛОЕ СМЕШЕНИЯ ЧЕПМЕНА

(Представлено академиком А.А. Дородницким 27 VI 1984)

В 1950 г. была опубликована классическая работа Чепмена [1]. В ней рассмотрено течение в вязком слое смешения, который разделяет жидкость, движущуюся с постоянной скоростью, от покоящейся. Уравнение пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления, описывающее это течение, допускает решение в классе автомодельных функций $\psi = \omega^{-1/2} x^\omega \Phi(\xi)$, $\xi = \omega^{1/2} y/x^{1/(m+1)}$, $\omega = m/(m+1)$. В результате для их определения при $m = 1$ получается нелинейное уравнение Блазиуса с тремя точечными условиями [1]. В работе будет доказано существование и единственность решения этой задачи. Используемый метод позволяет исследовать поведение всех интегральных кривых нелинейного уравнения. Среди них наибольший интерес представляет решение Блазиуса для пограничного слоя, решение в слое смешения, получаемого при взаимодействии двух параллельно движущихся в одном направлении потоков с различными скоростями [2], а также задача Локка, когда жидкости в этих потоках разной плотности и вязкости [3]. Поведение автомодельных решений при $1 < m \leq 2$ изучено в работе [4]. К этим значениям m сводятся все случаи слоев смешения, возникающие в теории свободного взаимодействия [5–10]. Однако случай $m = 1$ особый. Картина поведения интегральных кривых переформируется таким образом (см. рис. 1, где приведена качественная картина поведения интегральных кривых), что не возникает решений, описывающих течения в слоях смешения с обратными скоростями [4, 11, 12].

Для определения функции $\Phi(\xi)$ получается нелинейная трехточечная задача

$$(1) \quad \frac{m-1}{m} \Phi'^2 - \Phi \Phi'' = \Phi''';$$

$$(2) \quad \Phi = b \xi^m + \dots, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad m > 0, \quad b > 0;$$

$$(3) \quad \Phi = 0, \quad \xi = 0;$$

$$(4) \quad \frac{d\Phi}{d\xi} = 0, \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

Задаче Чепмена [1] соответствует значение параметра $m = 1$. Случай $1 < m \leq 2$ рассмотрен в работе [4].

Порядок уравнения (1) понижается, если положить

$$f = \frac{d\Phi}{d\xi} \left(\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = f \frac{df}{d\xi}, \quad \xi = \Phi \right).$$

Для определения f получается уравнение второго порядка

$$(5) \quad f f'' + f'^2 + \xi f' = 0$$

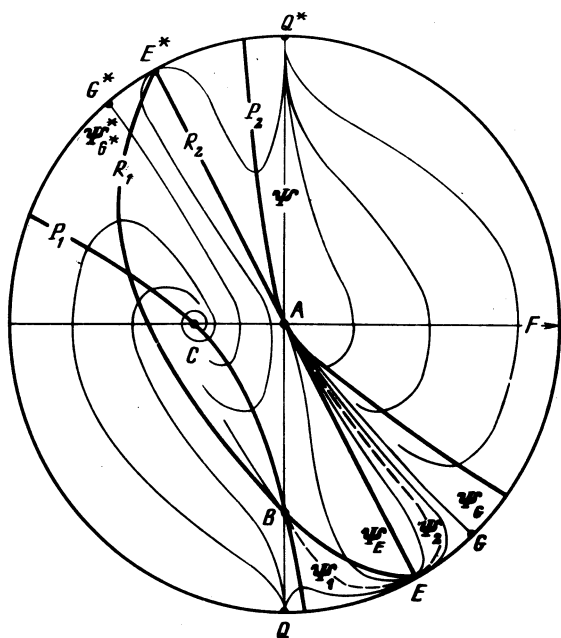


Рис. 1

с граничными условиями

$$(6) \quad f = -c(\xi - c) - \frac{1}{4} (\xi - c)^2 + O[(\xi - c)^3], \quad \xi \rightarrow c = \text{const} < 0;$$

$$(7) \quad f = b + D_1 \xi^{-1} e^{-b^{-1} \xi^2 / 2} + \dots, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad D_1 = \text{const}.$$

Условие (7) соответствует (2) при $m = 1$, а (6)–(4). Требуется найти решение $f(\xi) \in C^2(c, \infty)$ уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям (6), (7). Постоянные c и b связаны соотношением $(-c)^{-2} b = k$, где k – фиксированная постоянная.

Уравнение (5) сводится к уравнению первого порядка, если произвести подстановку

$$f = \xi^2 F(\xi), \quad \xi \frac{dF}{d\xi} = \Psi.$$

В результате получаем

$$(8) \quad \frac{d\Psi}{dF} = - \frac{\Psi^2 + 7\Psi F + 6F^2 + 2F + \Psi}{F\Psi} = - \frac{P(F, \Psi)}{F\Psi};$$

$$(9) \quad \frac{df}{d\xi} = \xi[\Psi + 2F], \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2} = - \frac{(\Psi + 2F)(\Psi + 2F + 1)}{F} = - \frac{R(F, \Psi)}{F}.$$

Уравнение (8) имеет три особые точки $A(0, 0)$, $B(0, -1)$ и $C(-1/3, 0)$ в конечной части плоскости (F, Ψ) и три бесконечно удаленные точки. Каждую точку плоскости (F, Ψ) соединим с центром единичной полусферы, полюс которой совпадает с началом координат, и поставим ей в соответствие точку на полусфере. В результате каждая бесконечно удаленная точка распадается на две тождественные, лежащие на экваторе симметрично относительно центра. Те из них, в которые кривые входят

при $\Psi < 0$, обозначим через Q, E, G , а при $\Psi > 0$ — через Q^*, E^*, G^* . Полусфера затем проектируется на круг. Если особую точку проходит интегральная кривая, то ее часть, лежащую в области $F < 0$, будем обозначать так же, как и особые точки, звездочкой. Ось $F = 0$ интегральные кривые могут проходить только через особые точки A, B, Q и Q^* . Прямая $\Psi = -2F$ является решением и разбивает всю плоскость на две части.

Кривая $P(F, \Psi) = 0$ — гипербола, в точках которой $d\Psi/dF = 0$. Ее нижняя ветвь P_1 проходит через точки C и B , верхняя P_2 — через A (см. рис. 1). Обозначим через $\Omega = \{F > 0, P(F, \Psi) < 0\}$, а через $\Omega^* = \{F < 0, \Psi > 0, P(F, \Psi) < 0\}$. В этих областях $d\Psi/dF < 0$. В точках кривой $R(F, \Psi) = 0$, распадающейся на две прямые R_1 и R_2 , обращается в ноль $d^2 f/d\xi^2 = 0$. Точки на кривых P_i (или R_i) будем обозначать через (F, Ψ_{P_i}) .

Интегральные кривые, попадающие в точку A , в некоторой ее окрестности принадлежат либо Ω , либо Ω^* . Если $(F, \Psi) \in \Omega$, то в точку A входит бесконечное множество кривых, имеющих при $F \rightarrow 0$ асимптотику

$$\Psi = -2F + DF^{1/2} e^{-F^{-1/2}} + \dots, \quad D = \text{const},$$

$$d\Psi/dF < (d\Psi/dF)_{P_2} < 0.$$

Если $(F, \Psi) \in \Omega^*$, то в A входит единственная интегральная кривая $\Psi = -2F$.

Точка B — седло. Через нее проходит единственная голоморфная кривая Ψ_1 , представимая при $F \rightarrow 0$ разложением

$$\Psi_1 = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F^k, \quad b_1 = -\frac{5}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{3},$$

$$b_k = \frac{1}{k+1} \left[7b_{k-1} + \frac{k+2}{2} \sum_{i=2}^k b_{i-1} b_{k-i+1} \right], \quad k \geq 3.$$

В полуплоскости $f > 0$ ей отвечают интегральные кривые (6), а в плоскости (ζ, Φ)

$$\Phi = c - (\text{sign } c) \cdot e^{-c(\zeta+l)} + \dots, \quad c \neq 0, \quad l = \text{const}, \quad c\zeta \rightarrow +\infty.$$

Особая точка C является фокусом. Поведению интегральных кривых в ее окрестности отвечает в плоскости (ξ, f)

$$f = -\frac{1}{3} \xi^2 + [C_1 \sin(\sqrt{2} \ln |\xi|) + C_2 \cos(\sqrt{2} \ln |\xi|)] + \dots, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

а в плоскости (ζ, Φ) при $\zeta \rightarrow \zeta_0$

$$\Phi = 3(\zeta - \zeta_0)^{-1} + [C_3 \sin(\sqrt{2} \ln |\zeta - \zeta_0|) + C_4 \cos(\sqrt{2} \ln |\zeta - \zeta_0|)] (\zeta - \zeta_0) + \dots,$$

$$C_i = \text{const}.$$

Для исследования бесконечно удаленных точек G, G^*, E и E^* произведем в уравнении (8) замену $2F = 1/t, \Psi = z/t, |t| \rightarrow 0$. Анализ в плоскости (t, z) показывает, что точка $G = (0, -3/4)$ является седлом и через нее проходит единственная голоморфная кривая $\Psi_G = -3/2F - 1/5 + \dots, |F| \rightarrow \infty$. В плоскости (ξ, f) ей отвечают интегральные кривые, проходящие через начало координат,

$$f = 2C|\xi|^{1/2} - \frac{2}{15} \xi^2 + \dots, \quad \xi \rightarrow 0, \quad C = \text{const} \neq 0.$$

Это означает, что при $\zeta \rightarrow \zeta_0 + 0$ функция $\Phi(\zeta)$ будет вести себя как

$$(10) \quad \Phi = C^2(\zeta - \zeta_0)^2 - \frac{1}{30} C^4 (\zeta - \zeta_0)^5 + \dots$$

Особая точка E является узлом. Голоморфную интегральную кривую, выходящую из E при $t \geq 0$, обозначим через Ψ_E . При $z + 1 \geq 0$, $t \rightarrow +0$ решения представляются в виде [4]

$$(11) \quad z = -1 + \alpha_E t^{1/2} J_1(t; \alpha_E) + J_2(t; \alpha_E), \quad \alpha_E > 0 \text{ произвольно,}$$

а при $z + 1 \leq 0$, $t \rightarrow +0$

$$(12) \quad z = -1 + \beta_E t^{1/2} J_1(t; \beta_E) + J_2(t; \beta_E), \quad \beta_E < 0 \text{ произвольно.}$$

Функции J_1 и J_2 голоморфны в окрестности $t = 0$. Переход через точку $E(E^*)$ соответствует переходу через ось $\xi = 0$ при $f \neq 0$ в плоскости (ξ, f) . Интегральной кривой $f = f(\xi)$, проходящей аналитически ось $\xi = 0$ ($f \neq 0$), в плоскости (t, z) будет соответствовать кривая, состоящая из двух ветвей (11) и (12) с $\alpha_E = -\beta_E$. В окрестности точки $E^*(t \leq 0, t \rightarrow 0)$ решение строится аналогично (11) и (12).

Точка Q является узлом. В ее окрестности интегральные кривые ведут себя как

$$\Psi = \frac{C_Q}{F} - 1 + O(F), \quad |F| \rightarrow 0, \quad C_Q \neq 0.$$

Это означает, что в окрестности точки $\xi = c, f = 0, (c \neq 0)$ интегральные кривые $f = f(\xi)$ будут вести себя как

$$f = \pm c^2 \left[\frac{2C_Q}{c} (\xi - c) \right]^{1/2} - \frac{2}{3} c (\xi - c) + \dots, \quad \xi \rightarrow c.$$

В плоскости (ζ, Φ) для функции $\Phi(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = \zeta_0$ будем иметь

$$\Phi = c + \frac{c^3 C_Q}{2} (\zeta - \zeta_0)^2 - \frac{c^4 C_Q}{6} (\zeta - \zeta_0)^3 + \dots$$

Если кривая $\Phi(\zeta)$ проходит точку $\zeta = \zeta_0$ аналитически, то ζ_0 является локальным экстремумом. В этом случае соответствующая ей кривая $\Psi(F; C_Q)$ должна войти в точку Q при $F > 0$ и выйти из точки Q^* с $F < 0$.

Из точки B выходит при $F < 0$ единственная кривая Ψ_1^* . Она попадает в точку C . Кривая Ψ_1 , выходящая из B при $F > 0$, попадает в точку E с постоянной $\beta_E < 0$. Далее ее необходимо продолжить кривой Ψ_2 с $\alpha_E = -\beta_E$, так как интегральная кривая на плоскости (ξ, f) должна проходить точку $(\xi = 0, f \neq 0)$ аналитически. Из точки E кривая Ψ_2 попадает в A . Обозначим полученную кривую, состоящую из двух ветвей Ψ_1 и Ψ_2 , через K . На плоскости (ξ, f) ей отвечают интегральные кривые \mathcal{K} с $f(\xi) > 0$, $\xi \in (c, \infty)$, $c < 0$, удовлетворяющие условиям (6), (7). Если зафиксировать постоянную b , то из всего множества кривых \mathcal{K} выделится одна. Ей в плоскости (ζ, Φ) будут соответствовать решения, определяемые формулой

$$\int_0^\Phi \frac{d\xi}{f(\xi)} = \zeta + L, \quad f(\Phi) > 0, \quad c < \Phi < \infty.$$

Они автоматически удовлетворяют условиям (2), (4) с $m = 1$. Из всех полученных решений только единственное с $L = 0$ удовлетворяет (3). Так как интегральная кривая K полностью лежит вне кривой R , то из (9) следует

$$\frac{df}{d\xi} > 0, \quad \frac{d^2f}{d\xi^2} < 0, \quad \xi \in (c, \infty); \quad \frac{d\Phi}{d\xi} > 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} > 0, \quad \xi \in (-\infty, +\infty).$$

Кривая Ψ_G попадает в точку A . Она дает решение Блазиуса для пограничного слоя, если положить в (10) постоянную $\xi_0 = 0$. Кривая Ψ_{G^*} попадает в точку C .

Кривые, лежащие ниже Ψ_2 , но выше Ψ_E , из точки A попадают в E и затем обратно в A . Они удовлетворяют краевым условиям (2), (3) ($m = 1$) и $\Phi = b_1\xi + \dots$ при $\xi \rightarrow -\infty$ ($b_1 = \text{const} > 0$). Решение этой задачи описывает течение в слое смешения, возникающем при движении двух параллельных потоков с разными скоростями [2]. Если плотности ρ и коэффициенты кинематической вязкости ν у них разные, то переход в точке E должен осуществляться по правилу $\rho_1 \nu_1^{\frac{1}{2}} \alpha_E = -\rho_2 \nu_2^{\frac{1}{2}} \beta_E$ [3].

Интегральные кривые, выходящие из A и лежащие между Ψ_G и Ψ_2 , проходят точку E и попадают в точку Q , затем в Q^* , откуда в E^* и далее в C . В таком поведении интегральных кривых лежит коренное отличие от случая $1 < m$ [4]. Оно наиболее отчетливо проявляется при значении $m = 2$. Решение $\Psi = -3F/2$ проходит тогда через точки G, A, G^* и разделяет всю плоскость (F, Ψ) на две части. Поэтому кривые, выходящие из A и расположенные между Ψ_G и Ψ_2 , проходят точки E, Q , затем попадают в Q^*, E^* и возвращаются обратно в Q^* . Из Q^* они попадают в Q, E и затем в A . Эти кривые содержат области, в которых $v_x \leq 0$ [4] (и удовлетворяют аналогичным краевым условиям, что и кривые, выходящие из A и лежащие между Ψ_E и Ψ_2). К ним всегда относится кривая Ψ_{E^*} , которая дает второе решение задачи Гольдштейна для следа, но с $\Phi'(0) < 0$. Поэтому для корректной постановки задачи Гольдштейна необходимо наложить дополнительное требование, например $\Phi'(0) > 0$ [4]. Численно она рассчитана в работе Смита [11].

При $m \in (1, 2)$ только часть кривых, выходящих из A при $F > 0$ обладает этим свойством, так как кривая, выходящая из A при $F < 0$, попадает в точку E^* . Кривая Ψ_{E^*} попадает в A через Q^* .

В заключение автор выражает признательность О.С. Рыжову и Вик.В. Сычеву за внимание, проявленное к работе.

Вычислительный центр
Академии наук СССР, Москва

Поступило
3 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapman D.R.* — N.A.C.A.Rep., 1950, № 958.
2. *Lessen M.* — Ibid., Tech. note, 1929.
3. *Lock R.C.* — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, vol. 4, part. 3.
4. *Диесперов В.Н.* — ДАН, 1984, т. 275, № 6.
5. *Нейланд В.Я.* — Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа, 1969, № 4.
6. *Сычев В.В.* — Там же, 1972, № 3.
7. *Рубан А.И.* — Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2.
8. *Messiter A.F.* — SIAM J. Appl. Math., 1970, vol. 18, № 1.
9. *Daniels P.G.* — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1977, vol. 30, part 3.
10. *Диесперов В.Н.* — Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа, 1983, № 5.
11. *Smith F.T.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1984, vol. A391.
12. *Stewartson K.* — Proc. Cambr. Phil. Soc. Lond., 1953, vol. 49, part 3.