Математические заметки

Том 105 выпуск 4 апрель 2019

УДК 517

О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов

Ф. А. Пушняков

В работе получены новые оценки числа ребер в порожденных подграфах некоторого дистанционного графа.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: дистанционный граф, теорема Турана.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11942

1. Введение

Рассмотрим последовательность графов $G_n = G_n(V_n, E_n) = G(n,3,1)$, у которых

$$\begin{aligned}&V_n = \{x = (x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \{0,1\},\, i = 1,\dots,n,\, x_1+\dots+x_n = 3\},\\ &E_n = \{(x,y) \mid \langle x,y\rangle = 1\},\end{aligned}$$

где через $\langle x,y\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов x и y. Иными словами, вершинами графа $G(n,3,1)$ являются $(0,1)$-векторы, скалярный квадрат которых равен трем. И эти вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно единице.

Данное определение можно переформулировать в комбинаторных терминах. Рассмотрим граф, вершинами которого являются всевозможные трехэлементные подмножества множества $\mathcal{R}_n = \{1,\dots,n\}$, причем ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда соответствующие трехэлементные подмножества имеют ровно один общий элемент.

Изучение данного графа обусловлено многими задачами комбинаторной геометрии, экстремальной комбинаторики, теории кодирования: например, задачей Нелсона–Эрдеша–Хадвигера о раскраске метрического пространства (см. [1]–[15]), проблемой Борсука о разбиении пространства на части меньшего диаметра (см. [1]–[2], [16]–[18]), задачами о числах Рамсея (см. [19]–[21]), задачами о кодах с одним запрещенным расстоянием (см. [23]–[31]).

Напомним несколько свойств данного графа. Граф $G(n,3,1)$ является регулярным со степенью вершины $d_n = 3\cdot C_{n-3}^2$. Очевидно, что

$$|V_n| = C_n^3 \sim \frac{n^3}{6} \qquad \text{при} \quad n\to\infty.$$

В силу регулярности рассматриваемого графа имеем

$$|E_n| = \frac{d_n \cdot |V_n|}{2} = \frac{3}{2} \cdot C_{n-3}^2 \cdot C_n^3 \sim \frac{n^5}{8} \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Напомним, что *независимым множеством* графа называется такое подмножество его вершин, что никакие две вершины подмножества не соединены ребром. *Числом независимости* $\alpha(G)$ называется наибольшая мощность независимого множества графа G. Положим $\alpha_n = \alpha(G(n,3,1))$. Результат теоремы Надя (см. [22]) отвечает на вопрос о числе независимости графа $G(n,3,1)$. А именно,

$$\alpha_n \sim n \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Более того, из доказательства теоремы Надя можно сделать вывод о структуре независимого множества в рассматриваемом графе. Для описания этой структуры введем дополнительные обозначения. Пусть $W \subseteq V_n$. Будем говорить, что W является множеством вершин *первого типа*, если $|W| \geqslant 3$ и существуют такие $i, j \in \mathcal{R}_n$, что для любой вершины $w \in W$ выполнено $i, j \in w$; далее, W является множеством вершин *второго типа*, если $|W| \geqslant 2$ и существуют такие $i, j, k, t \in \mathcal{R}_n$, что для любой вершины $w \in W$ выполнено $w \subset \{i, j, k, t\}$; наконец, W является множеством вершин *третьего типа*, если для любых $w_1, w_2 \in W$ выполнено соотношение $w_1 \cap w_2 = \varnothing$. Более того, *носителем* множества вершин назовем объединение всех вершин данного множества. Тогда имеет место следующее утверждение.

Предложение. *Любое независимое множество $U \subseteq V_n$ можно представить в виде объединения*

$$U = \biggl(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\biggr) \cup \biggl(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} B_j\biggr) \cup \biggl(\bigcup_{k \in \mathcal{K}} C_k\biggr),$$

где A_i – множество вершин первого типа, B_j – множество вершин второго типа, C_k – множество вершин третьего типа, $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$, $k \in \mathcal{K}$, и носители всех упомянутых множеств попарно не пересекаются.

Мы не доказываем данное утверждение, так как оно мгновенно следует из доказательства теоремы Надя (см. [22]).

Обозначим через $r(W)$ количество ребер графа G на множестве $W \subseteq V_n$. Иными словами,

$$r(W) = |\{(x,y) \in E(G) \mid x \in W,\, y \in W\}|.$$

Также положим

$$r(l(n)) = \min_{|W|=l(n),\, W \subseteq V_n} r(W).$$

Заметим, что если $l(n) \leqslant \alpha_n$, то $r(l(n)) = 0$ и обсуждать нечего. Если же $l(n) > \alpha_n$, то, очевидно, в любом $W \subseteq V_n$ мощности $l(n)$ непременно найдутся ребра. Возникает интересный вопрос об изучении величины $r(l(n))$. Оценки, полученные в работах [20], [21], достаточно слабые, поэтому появились работы [26], [27], в которых приведено практически полное исследование величины $r(l(n))$. А именно, в работе [26] была доказана следующая теорема (читая формулировку, важно помнить, что $\alpha_n \sim n$).

Теорема 1. *Возможны следующие четыре случая.*

1) *Пусть функции* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *таковы, что выполнено* $n = o(f)$ *и* $g = o(n^2)$ *при* $n \to \infty$. *Пусть функция* $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что для любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнена цепочка неравенств* $f(n) \leqslant l(n) \leqslant g(n)$. *Тогда*

$$r(l(n)) \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n} \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

2) *Пусть функция* $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что существуют константы* C_1, C_2, *с которыми для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнена цепочка неравенств* $C_1 \cdot n^2 \leqslant f(n) \leqslant C_2 \cdot n^2$. *Тогда*

$$r(l(n)) \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n} \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

3) *Пусть функции* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *таковы, что выполнено* $n^2 = o(f)$ *и* $g = o(n^3)$ *при* $n \to \infty$. *Пусть функция* $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $f(n) \leqslant l(n) \leqslant g(n)$. *Тогда существуют такие функции* $h_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что*

$$h_1 \sim \frac{l(n)^2}{\alpha_n}, \quad h_2 \sim \frac{5l(n)^2}{\alpha_n} \qquad \text{при} \quad n \to \infty$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ *выполнена цепочка неравенств* $h_1(n) \leqslant r(l(n)) \leqslant h_2(n)$. *При этом для выполнения нижней оценки требование* $g = o(n^3)$ *не нужно.*

4) *Пусть функция* $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что существует константа* C, *с которой выполнена цепочка неравенств* $C \cdot n^3 \leqslant l(n) \leqslant C_n^3$. *Пусть* $c_n = 1 - l(n)/C_n^3$. *Тогда существует функция* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такая, что*

$$f(n) \sim n^5\left(\frac{1}{8} - \frac{c_n}{4} + \frac{c_n^2}{72}\right) \qquad \text{при} \quad n \to \infty$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $r(l(n)) \geqslant f(n)$.

Как можно заметить, оценки, полученные в пунктах 3, 4 данной теоремы, не являются точными. Отметим в то же время, что нижняя оценка из пункта 3 верна и в условиях пункта 4. В работе [27] была улучшена оценка из пункта 3. А именно, была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция* $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что* $n^2 = o(l)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда существует такая функция* $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что*

$$h \sim \frac{3l^2}{2n} \qquad \text{при} \quad n \to \infty$$

и $r(l(n)) \geqslant h(n)$ *для достаточно большого* n.

В данной работе автор устранил одну неточность в пункте 4 теоремы 1 и улучшил многие оценки из теоремы 1, а именно доказал следующую теорему.

Теорема 3. *Возможны следующие четыре случая.*

1) *Пусть дана произвольная функция* $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *с ограничением* $n = o(l)$. *Тогда существует такая функция* $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что*

$$h(n) \sim \frac{9l(n)^2}{2\alpha_n} \qquad \text{при} \quad n \to \infty$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $r(l(n)) \leqslant h(n)$.

2) *Пусть функция* $l\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *такова, что существуют константа* C *и функция* $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *такая, что* $n^2=o(g)$ *при* $n\to\infty$ *и для каждого* $n\in\mathbb{N}$ *выполнена цепочка неравенств*

$$C\cdot n^3\leqslant l(n)\leqslant C_n^3-g(n).$$

Пусть $c_n=1-l(n)/C_n^3$. *Тогда существует такая функция* $h\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *что* $h=o(1)$ *при* $n\to\infty$ *и для любого достаточно большого* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено неравенство*

$$r(l(n))\geqslant\frac{n^5}{8}\biggl(1-2c_n+\frac{c_n^2}{3}(1+h(n))-\frac{10}{n}+\frac{20\cdot c_n}{n}-\frac{10\cdot c_n^2}{3n}(1+h(n))\biggr).$$

3) *Пусть функция* $l\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *такова, что существуют константы* B, C *и функция* $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *такая, что* $n=o(g)$ *при* $n\to\infty$ *и для каждого* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено*

$$g(n)\leqslant Bn^2,\qquad C\cdot n^3\leqslant l(n)\leqslant C_n^3-g(n).$$

Пусть $c_n=1-l(n)/C_n^3$. *Тогда существует такая функция* $h\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *что* $h=o(1)$ *при* $n\to\infty$ *и для любого достаточно большого* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено неравенство*

$$r(l(n))\geqslant\frac{n^5}{8}\biggl(1-2c_n+\frac{2c_n^2}{9}(1+h(n))-\frac{10}{n}+\frac{20\cdot c_n}{n}-\frac{20\cdot c_n^2}{9n}(1+h(n))\biggr).$$

4) *Пусть функция* $l\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *такова, что существует такая константа* C, *что для каждого* $n\in\mathbb{N}$ *выполнена цепочка неравенств* $C_n^3-Cn\leqslant l(n)\leqslant C_n^3$. *Пусть* $c_n=1-l(n)/C_n^3$. *Тогда для любого* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено неравенство*

$$r(l(n))\geqslant\frac{n^5}{8}\biggl(1-2c_n-\frac{10}{n}+\frac{20\cdot c_n}{n}\biggr).$$

Результат первого пункта теоремы 3 улучшает оценку, полученную в пункте 3 теоремы 1. Тем не менее, эта оценка по-прежнему не является точной: величина $r(l(n))$ удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$\frac{3l(n)^2}{2\alpha_n}(1+o(1))\leqslant r(l(n))\leqslant\frac{9l(n)^2}{2\alpha_n}(1+o(1))$$

при $n\to\infty$. Между нижней и верхней оценками имеется зазор в три раза.

Результат второго и третьего пунктов теоремы 3 немного улучшает оценку, полученную в пункте 4 теоремы 1. А пункт 4 как будто слабее аналогичного пункта из первой теоремы. Дело в том, что в доказательстве теоремы 1 была допущена неточность и здесь мы ее устраняем. К тому же, оценки из пунктов 2–4 теоремы 3 выглядят несколько иначе, чем аналогичная оценка из теоремы 1. Дело в том, что в формулировке и доказательстве пункта 4 теоремы 1 была допущена ошибка при переходе к асимптотикам, делающая результат некорректным при $c_n\to 0$. Поэтому вместо того, чтобы искать асимптотику функции f, автор нашел ее точное значение. Таким образом, теперь переход к пределу при $c_n\to 0$ абсолютно корректен.

Посмотрим еще с несколько иной точки зрения на полученные результаты. Можно записать лучшую известную нам верхнюю оценку в виде

$$r(l(n))\leqslant\frac{9l(n)^2}{2n}(1+o(1))=\frac{n^5}{8}(1-2c_n+c_n^2)(1+o(1)),\tag{1.1}$$

где c_n из формулировки теоремы 3. В таком же виде можно записать и нижнюю оценку из теоремы 2:

$$r(l(n)) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\,c_n + \frac{1}{3}\,c_n^2\right)(1+o(1)). \tag{1.2}$$

Как мы помним, в условиях пункта 4 теоремы 1 она верна, т.е. верна она и в условиях пунктов 2–4 теоремы 3. Конечно, если $c_n \to 0$, то оценки пунктов 2–4 новой теоремы асимптотически совпадают с оценкой (1.1) и в этом случае оценка (1.2) им не конкурент. Однако в условиях теоремы 3 возможно и то, что c_n не стремится к нулю (хотя и не превосходит константы, строго меньшей единицы). В этом случае оценки из пунктов 2–4 становятся лучше, чем оценка из теоремы 2 при выполнении неравенства

$$\frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n}\right) \geqslant \frac{3(c_n C_n^3)^2}{2}\,,$$

которое выполнено при $c_n \leqslant 0.486\ldots$ и достаточно больших значениях $n \in \mathbb{N}$.

2. Доказательство теоремы 3

2.1. Доказательство пункта 1. Для доказательства верхней оценки необходимо для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию пункта 1 теоремы 3, и для каждого n построить пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом. По-прежнему можно считать, что n достаточно велико.

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию пункта 1 теоремы 3, и число n. Возьмем наименьшее натуральное число t_n, с которым

$$C_{t_n}^3 \cdot \left[\frac{n}{t_n}\right] \geqslant l(n).$$

Ясно, что $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Значит, $t_n \sim \sqrt{6l/n}$ при $n \to \infty$. Положим

$$\begin{aligned}
&S_1 = \{1, 2, \ldots, t_n\},\\
&S_2 = \{t_n+1, t_n+2, \ldots, 2\cdot t_n\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_i = \{i\cdot t_n - t_n + 1, i\cdot t_n - t_n + 2, \ldots, i \cdot t_n\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_{[n/t_n]} = &\left\{\left[\frac{n}{t_n}\right]\cdot t_n - t_n + 1, \left[\frac{n}{t_n}\right]\cdot t_n - t_n + 2, \ldots, \left[\frac{n}{t_n}\right]\cdot t_n\right\}.
\end{aligned}$$

Подчеркнем, что мощность каждого из множеств S_i, $i = 1, \ldots, [n/t_n]$, равна t_n.

Для каждого $i = 1, \ldots, [n/t_n]$ положим

$$U_i = \bigcup_{x\in S_i,\, y\in S_i,\, z\in S_i,\, x\neq y,\, x\neq z,\, y\neq z} \{\{x, y, z\}\}.$$

То есть множество U_i – это подмножество множества вершин графа $G(n,3,1)$, носители которых лежат в множестве S_i.

Заметим, что в силу выбора величины t_n данный выбор подмножеств корректен. То есть, для каждого множества S_i существуют вершины графа $G(n,3,1)$ с носителем, лежащим в S_i. Коль скоро U_i – это подмножество множества вершин графа $G(n,3,1)$, мы можем положить

$$T_i = \{(v,w) \mid v \in U_i,\, w \in U_i,\, (v,w) \in E_n\}.$$

Иными словами, T_i – это множество ребер графа $G(n,3,1)$, вершинами которых являются вершины из множества U_i. Посчитаем мощности множеств U_i и T_i.

Легко видеть, что

$$|U_i| = C^3_{|S_i|} = \frac{|S_i^3|}{6}(1+o(1)) = \frac{t_n^3}{6}(1+o(1)).$$

Для оценки величины $|T_i|$ заметим, что подграф графа $G(n,3,1)$, индуцированный подмножеством вершин U_i, является регулярным. Положим d_i – степень вершины в подграфе графа $G(n,3,1)$, индуцированном подмножеством вершин U_i. Легко видеть, что

$$d_i = 3C^2_{|S_i|-3} = \frac{3|S_i|^2}{2}(1+o(1)) = \frac{3t_n^2}{2}(1+o(1)).$$

Стало быть,

$$|T_i| = \frac{|U_i| \cdot d_i}{2} = \frac{t_n^5}{8}(1+o(1)).$$

Перейдем к построению множества W_n, обладающего описанными в начале доказательства свойствами. Положим

$$W_n = \bigcup_{i=1}^{[n/t_n]} U_i.$$

Заметим, что для любых $i,j \leqslant [n/t_n]$ множества вершин U_i и U_j не пересекаются. Таким образом, объединение выше на самом деле является дизъюнктным.

Положим

$$E(W_n) = \{(u,v) \mid u \in W_n,\, v \in W_n,\, (u,w) \in E_n\}.$$

Иными словами, $E(W_n)$ — это множество ребер в подграфе графа $G(n,3,1)$, индуцированным вершинами W_n. Поскольку множество W_n является дизъюнктным объединением множеств вершин U_i, которые попарно не пересекаются, то и множество ребер $E(W_n)$ является дизъюнктным объединением множеств ребер T_i:

$$E(W_n) = \bigsqcup_{i=1}^{[n/t_n]} T_i.$$

Оценим мощности множеств W_n и $E(W_n)$. Из вышесказанного следует, что

$$|W_n| = \sum_{i=1}^{[n/t_n]} |U_i| = \left[\frac{n}{t_n}\right] \cdot C^3_{t_n} \geqslant l(n).$$

Также ясно, что
$$|W_n| = \frac{n \cdot t_n^2}{6}(1+o(1)) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$
Далее,
$$|E(W_n)| = \sum_{i=1}^{[n/t_n]} |T_i| = \left[\frac{n}{t_n}\right] \cdot |T_1| \cdot (1+o(1)) = \frac{n \cdot t_n^4}{8}(1+o(1)).$$
Таким образом,
$$|E(W_n)| = \frac{n \cdot t_n^4}{8}(1+o(1)) = \frac{9}{2}\frac{|W_n|^2}{\alpha_n}(1+o(1)).$$
Стало быть, для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию пункта 1 теоремы, и для каждого n мы построили пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом.

2.2. Доказательство пунктов 2–4. Для произвольной функции l, удовлетворяющей неравенствам $n^2 = o(l)$ и $l \leqslant C_n^3$, и произвольного натурального числа n положим $c_n = 1 - l(n)/C_n^3$. Рассмотрим произвольное подмножество вершин $W \subseteq V_n$ мощности $l(n)$, положим $W_1 = V_n \setminus W$. Ясно, что $|W_1| = c_n C_n^3$. Обозначим через $E(W_1)$ множество ребер, концами которых являются вершины из W_1. Формально,
$$E(W_1) = \{(x,y) \in E_n \mid x, y \in W_1\}.$$
Обозначим через E_1 множество ребер, один конец которых принадлежит множеству W, а другой – множеству W_1:
$$E_1 = \{(x,y) \in E_n \mid x \in W,\ y \in W_1\}.$$
С учетом введенных обозначений мы имеем
$$E(W) = E_n \setminus (E(W_1) \sqcup E_1).$$
Тогда ясно, что
$$|E(W)| = |E_n| - |E(W_1)| - |E_1|.$$
Оценим сверху величину $|E(W_1)| + |E_1|$. В силу регулярности графа $G(n,3,1)$ имеем
$$|E(W_1)| + |E_1| \leqslant d_n \cdot |W_1|.$$
Действительно, каждое ребро из множества $E(W_1) \cup E_1$ имеет одним из своих концов вершину из W_1. Поэтому этих ребер не больше, чем общее число ребер, содержащих вершины из W_1. Данную оценку можно слегка уточнить.

Заметим, что при таком подсчете дважды были посчитаны ребра из $E(W_1)$. Оценим мощность данного множества. Возможны следующие три случая.

Случай 1. *Функция l удовлетворяет условиям пункта 2 теоремы 3.* В данном случае мощность множества ребер $E(W_1)$ можно оценить с помощью результата теоремы 2. А именно, верна оценка
$$|E(W_1)| \geqslant \frac{3|W_1|^2}{2\alpha_n}(1+o(1)).$$

Формально говоря, это означает, что существует такая функция $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h = o(1)$ при $n \to \infty$ и для любого натурального n выполнено неравенство

$$|E(W_1)| \geqslant \frac{3|W_1|^2}{2\alpha_n}(1 + h(n)).$$

Тогда

$$|E(W_1)| + |E_1| \leqslant d_n \cdot |W_1| - \frac{3|W_1|^2}{2\alpha_n}(1 + h(n)).$$

Положим

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant 10, \\ \dfrac{n^5}{8}\biggl(1 - 2c_n + \dfrac{c_n^2}{3}(1 + h(n)) - \dfrac{10}{n} + \dfrac{20 \cdot c_n}{n} - \dfrac{10 \cdot c_n^2}{3n}(1 + h(n))\biggr) & \\ & \text{при } n > 10. \end{cases}$$

Отметим, что константа 10 в определении функции f не несет значительной смысловой нагрузки – она нужна лишь для упрощения некоторых выкладок ниже.

Заметим, что

$$f(n) \sim n^5\biggl(\frac{1}{8} - \frac{c_n}{4} + \frac{c_n^2}{24}\biggr) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Стало быть, осталось доказать, что $r(l(n)) \geqslant f(n)$ для любого достаточно большого натурального n. Для этого запишем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} r(l(n)) &\geqslant |E(W)| \geqslant \frac{3}{2}\,C_{n-3}^2 C_n^3 - d_n \cdot |W_1| + \frac{3|W_1|^2}{2\alpha_n}(1 + h(n)) \\ &\geqslant \frac{3}{2}\,C_{n-3}^2 C_n^3 - 3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot |W_1| + \frac{3|W_1|^2}{2n}(1 + h(n)) \\ &= \frac{3}{2}\,C_{n-3}^2 C_n^3 - 3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot c_n \cdot C_n^3 + \frac{3 \cdot c_n^2 \cdot (C_n^3)^2}{2n}(1 + h(n)) \\ &= \frac{3}{2}\,C_{n-3}^2 C_n^3\biggl(1 - 2c_n + \frac{c_n^2 \cdot C_n^3}{n \cdot C_{n-3}^2}(1 + h(n))\biggr) \\ &= \frac{n^5}{8}\biggl(1 - \frac{10}{n} + \frac{35}{n^2} - \frac{50}{n^3} + \frac{24}{n^4}\biggr) \cdot \biggl(1 - 2c_n + \frac{c_n^2 \cdot (n-1)(n-2)}{3(n-3)(n-4)}(1 + h(n))\biggr) \\ &\geqslant \frac{n^5}{8}(1 - \frac{10}{n}) \cdot \biggl(1 - 2c_n + \frac{c_n^2}{3}(1 + h(n))\biggr) \geqslant f(n). \end{aligned}$$

Случай 2. *Функция l удовлетворяет условиям пункта 3 теоремы 3*. В данном случае воспользуемся результатами пунктов 1 и 2 теоремы 1. В силу этих результатов имеет место оценка

$$|E(W_1)| \geqslant \frac{|W_1|^2}{\alpha_n}(1 + o(1)).$$

Формально говоря, это означает, что существует такая функция $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h = o(1)$ при $n \to \infty$ и для любого натурального n выполнено неравенство

$$|E(W_1)| \geqslant \frac{|W_1|^2}{\alpha_n}(1 + h(n)).$$

Тогда

$$|E(W_1)| + |E_1| \leqslant d_n \cdot |W_1| - \frac{|W_1|^2}{\alpha_n}(1 + h(n)).$$

Положим

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant 10, \\ \dfrac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n + \dfrac{2c_n^2}{9}(1 + h(n)) - \dfrac{10}{n} + \dfrac{20 \cdot c_n}{n} - \dfrac{20 \cdot c_n^2}{9n}(1 + h(n))\right) & \\ & \text{при } n > 10. \end{cases}$$

Заметим, что

$$f(n) \sim n^5\left(\frac{1}{8} - \frac{c_n}{4} + \frac{c_n^2}{36}\right) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Стало быть, как и в предыдущем пункте, осталось доказать, что $r(l(n)) \geqslant f(n)$ для любого достаточно большого натурального n. Для этого запишем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} r(l(n)) \geqslant |E(W)| &\geqslant \frac{3}{2}\, C_{n-3}^2 C_n^3 - d_n \cdot |W_1| + \frac{|W_1|^2}{\alpha_n}(1 + h(n)) \\ &\geqslant \frac{3}{2}\, C_{n-3}^2 C_n^3 - 3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot |W_1| + \frac{|W_1|^2}{n}(1 + h(n)) \\ &= \frac{3}{2}\, C_{n-3}^2 C_n^3 - 3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot c_n \cdot C_n^3 + \frac{c_n^2 \cdot (C_n^3)^2}{n}(1 + h(n)) \\ &= \frac{3}{2}\, C_{n-3}^2 C_n^3 \left(1 - 2c_n + \frac{2}{3}\frac{c_n^2 \cdot C_n^3}{n \cdot C_{n-3}^2}(1 + h(n))\right) \\ &= \frac{n^5}{8}\left(1 - \frac{10}{n} + \frac{35}{n^2} - \frac{50}{n^3} + \frac{24}{n^4}\right) \cdot \left(1 - 2c_n + \frac{2 \cdot c_n^2 \cdot (n-1)(n-2)}{9(n-3)(n-4)}(1 + h(n))\right) \\ &\geqslant \frac{n^5}{8}\left(1 - \frac{10}{n}\right) \cdot \left(1 - 2c_n + \frac{2 \cdot c_n^2}{9}(1 + h(n))\right) \geqslant f(n). \end{aligned}$$

Случай 3. *Функция l удовлетворяет условиям пункта 4 теоремы 3*. Заметим, что в данном случае множество W_1 может вовсе не содержать ребер. Поэтому от улучшения оценки придется отказаться. Положим

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant 10, \\ \dfrac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n - \dfrac{10}{n} + \dfrac{20 \cdot c_n}{n}\right) & \text{при } n > 10. \end{cases}$$

Заметим, что

$$f(n) \sim n^5\left(\frac{1}{8} - \frac{c_n}{4}\right) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Стало быть, как и в предыдущем пункте, осталось доказать, что $r(l(n)) \geqslant f(n)$ для любого достаточно большого натурального n. Для этого достаточно записать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} r(l(n)) \geqslant |E(W)| &\geqslant \frac{3}{2}\, C_{n-3}^2 C_n^3 - d_n \cdot |W_1| \\ &= \frac{3}{2}\, C_{n-3}^2 C_n^3 - 3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot |W_1| \\ &= \frac{n^5}{8} \cdot \left(1 - \frac{10}{n}\right) \cdot (1 - 2c_n) \geqslant f(n). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. M. Raigorodskii, “Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters”, *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*, Contemp. Math., **625**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 93–109.

[2] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (337) (2001), 107–146.

[3] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[4] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and His Mathematics, II*, Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.

[5] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators*, Springer, New York, 2009.

[6] V. Klee, S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Dolciani Math. Expos., **11**, Math. Assoc. Amer., Washington, DC, 1991.

[7] М. М. Пядёркин, “Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа”, *Матем. заметки*, **99**:2 (2016), 288–297.

[8] Д. Д. Черкашин, А. М. Райгородский, “О хроматических числах пространств малой размерности”, *Докл. АН*, **472**:1 (2017), 11–12.

[9] Р. И. Просанов, А. М. Райгородский, А. А. Сагдеев, “Улучшения теоремы Франкла–Редля и геометрические следствия”, *Докл. АН*, **475**:2 (2017), 137–139.

[10] Л. Э. Шабанов, А. М. Райгородский, “Турановские оценки для дистанционных графов”, *Докл. АН*, **475**:3 (2017), 254–256.

[11] Л. Э. Шабанов, “Турановские оценки для дистанционных графов в тонкой слойке”, *Комбинаторика и теория графов. IX*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **464**, ПОМИ, СПб., 2017, 132–168.

[12] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, “О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечений”, *Докл. АН*, **475**:4 (2017), 365–368.

[13] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, “О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечений”, *Пробл. передачи информ.*, **53**:4 (2017), 16–42.

[14] А. Я. Канель-Белов, В. А. Воронов, Д. Д. Черкашин, “О хроматическом числе плоскости”, *Алгебра и анализ*, **29**:5 (2017), 68–89.

[15] С. Г. Киселев, А. М. Райгородский, “О хроматическом числе случайного подграфа кнезеровского графа”, *Докл. АН*, **476**:4 (2017), 375–376.

[16] V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan,, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Springer, Berlin, 1997.

[17] A. M. Raigorodskii, “Three lectures on the Borsuk partition problem”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 202–247.

[18] А. М. Райгородский, “Вокруг гипотезы Борсука”, *Геометрия и механика*, СМФН, **23**, РУДН, М., 2007, 147–164.

[19] R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[20] А. А. Сагдеев, “О хроматических числах, соответствующих экспоненциально рамсеевским множествам”, Зап. научн. сем. ПОМИ, **475**, ПОМИ, СПб., 2018, 174–189.

[21] А. А. Сагдеев, “Экспоненциально рамсеевские множества”, *Пробл. передачи информ.*, **54**:4 (2018), 82–109.

[22] Z. Nagy, “A certain constructive estimate of the Ramsey number”, *Mat. Lapok*, **23** (1974), 301–302.

[23] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Радио и связь, М., 1979.

[24] L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor, “Codes with forbidden distances”, *Discrete Math.*, **213**:1-3 (2000), 3–11.

[25] A. M. Raigorodskii, “Combinatorial geometry and coding theory”, *Fund. Inform.*, **145**:3 (2016), 359–369.

[26] Ф. А. Пушняков, “О числе ребер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа”, *Матем. заметки*, **99**:4 (2016), 550–558.

[27] Ф. А. Пушняков, “Новая оценка числа ребер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа”, *Пробл. передачи информ.*, **51**:4 (2015), 71–77.

[28] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, “О хроматических числах дистанционных графов, близких к кнезеровским”, *Докл. АН*, **468**:3 (2016), 247–250.

[29] А. А. Сагдеев, “О теореме Франкла–Рэдла”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:6 (2018), 128–157.

[30] А. А. Сагдеев, “Улучшенная теорема Франкла–Рёдля и некоторые ее геометрические следствия”, *Пробл. передачи информ.*, **54**:2 (2018), 45–72.

[31] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, “Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением”, *Матем. сб.*, **207**:5 (2016), 17–42.

Ф. А. Пушняков
Московский физико-технический институт
(государственный университет), г. Долгопрудный,
Московская обл.
E-mail: `filipp.pushnyakov@phystech.edu`

Поступило
25.01.2018
После доработки
16.03.2018
Принято к публикации
04.04.2018