ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 15–38

УДК 517.956.25

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА—ОРЛИЧА

© 2017 г. **Л. М. КОЖЕВНИКОВА**

Аннотация. Для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений с L_1-правой частью в произвольной неограниченной области рассматривается задача Дирихле с неоднородным граничным условием. Доказано существование энтропийных решений в анизотропных пространствах Соболева—Орлича.

***Ключевые слова*:** анизотропное эллиптическое уравнение, энтропийное решение, существование решения, пространство Соболева—Орлича, N-функции, псевдомонотонный оператор.

***AMS Subject Classification*:** 35J25, 35J62, 35D30

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\boldsymbol{x}, u, \nabla u))_{x_i} = a_0(\boldsymbol{x}, u), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.1}$$

с неоднородным краевым условием

$$u(\boldsymbol{x})\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\boldsymbol{x})\Big|_{\partial\Omega}. \tag{1.2}$$

С 80-х годов прошлого столетия ведутся активные исследования нелинейных эллиптических уравнений второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\boldsymbol{x}, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) = f(\boldsymbol{x}) \tag{1.3}$$

с $f \in L_1$ и мерами в качестве правых частей. Слабые решения уравнений вида (1.3) со степенными нелинейностями во всем пространстве $\mathbb{R}_n$ с $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ исследовались в работах Х. Брезиса [17], Л. Боккардо, Т. Галуэт и Ж. Васкеза [16], М. Бендамана, К. Карлсена [10] и др. Существование слабого решения задачи Дирихле в ограниченной области Ω с функцией $f \in L_1(\Omega)$ установлено Л. Боккардо, Т. Галуэт [14], Л. Боккардо, Т. Галуэт, П. Марчелини [15].

В работах Ф. Бенилана, Л. Боккардо, Т. Галлуэт, Р. Гарьепи, М. Пьера и Ж. Л. Васкеза [11], Л. Боккардо [13] для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1-правой частью было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле и доказаны его существование и единственность. Авторы указывают, что вместо энтропийного решения, введенного впервые С. Н. Кружковым [5] для уравнений первого порядка, можно рассматривать также ренормализованное решение. Такие решения являются элементами того же функционального класса, которому принадлежат энтропийные решения, но в отличие от последних удовлетворяют другому семейству интегральных соотношений. В ряде случаев понятия энтропийного и ренормализованного решения эквивалентны. Вопросы существования и единственности ренормализованных решений эллиптических задач в пространствах Орлича исследовались в [9, 20].

Свойства суммируемости и оценки энтропийных решений задачи Дирихле в ограниченных областях для нелинейного эллиптического уравнения (1.3) с условием вырождающейся коэрцитивности установлены А. А. Ковалевским [1].

Изучению существования энтропийных решений задачи Дирихле в пространствах Орлича для эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями второго порядка с $f \in L_1(\Omega)$ (Ω – ограниченная область) посвящена статья А. Бенкиране и Дж. Бенноуна [12].

Следует заметить, что в известных автору работах результаты установлены для энтропийных и ренормализованных решений эллиптических задач в ограниченных областях (за исключением статьи [11]) с однородными граничными условиями. В настоящей статье доказано существование энтропийных решений задачи Дирихле (1.1), (1.2) в анизотропных пространствах Соболева—Орлича без предположения ограниченности области Ω.

2. N-функции и пространства Орлича

В этом разделе приведены необходимые сведения из теории N-функций и пространств Орлича (см. [7]. Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $B(z)$, $z \in \mathbb{R}$б называется *N-функцией*, если она четна и
$$\lim_{z\to 0}\frac{B(z)}{z}=0, \quad \lim_{z\to\infty}\frac{B(z)}{z}=\infty.$$
Отметим, что $B(\varepsilon z) \leqslant \varepsilon B(z)$, $z \in \mathbb{R}$, при $0<\varepsilon\leqslant 1$.

N-функция
$$\overline{B}(z)=\sup_{y\geqslant 0}(y|z|-B(y)), \quad z\in\mathbb{R},$$
называется *дополнительной* к N-функции $B(z)$. Очевидно *неравенство Юнга*:
$$|zy| \leqslant B(y)+\overline{B}(z), \quad z,y\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$
Кроме того, имеет место равенство
$$zB'(z)=\overline{B}(B'(z))+B(z), \quad z\in\mathbb{R}, \tag{2.2}$$
где $B'(z)$ — правая производная N-функции $B(z)$.

Для N-функций $B(z)$, $M(z)$ записывают $B(z) \prec M(z)$, если существуют такие числа $l>0$, $z_0>0$, что
$$B(z)\leqslant M(lz), \quad |z|\geqslant z_0.$$
N-функция $B(z)$ *растет существенно быстрее* N-функции $M(z)$ (обозначение $M(z) \prec\prec B(z)$), если для любого числа $l>0$
$$\lim_{z\to\infty}\frac{M(z)}{B(lz)}=0.$$

Говорят, что N-функция $B(z)$ *удовлетворяет Δ_2-условию* при больших значениях z, если существуют такие числа $c>0$, $z_0\geqslant 0$, что
$$B(2z)\leqslant cB(z) \quad \text{для любых } |z|\geqslant z_0.$$

Δ_2-условие эквивалентно выполнению при $|z| \geqslant z_0$ неравенства

$$B(lz) \leqslant c(l)B(z), \tag{2.3}$$

где l — любое число, большее единицы, $c(l) > 0$.

N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию тогда и только тогда, когда существуют такие числа $c > 1$, $z_0 \geqslant 0$, что при $|z| \geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$zB'(z) \leqslant cB(z) \tag{2.4}$$

(см. [7, гл. I, § 4, теорема 4.1]). В дальнейшем в работе предполагается, что Δ_2-условие для рассматриваемых N-функций выполняется при всех значениях $z \in \mathbb{R}$ (т.е. $z_0 = 0$).

Для N-функции $B(z)$, ввиду выпуклости и неравенства (2.3), существует такое $c > 0$, что справедливо неравенство

$$B(y + z) \leqslant cB(z) + cB(y), \quad z, y \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Пусть Q — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать пространство Орлича $L_B(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{B,Q} = \inf \left\{ k > 0 \;\middle|\; \int\limits_Q B\left(\frac{v(\boldsymbol{x})}{k}\right) d\boldsymbol{x} \leqslant 1 \right\}.$$

Справедливы неравенства (см. [7, гл. II, § 9, неравенства (9.21), (9.12)])

$$\int\limits_Q B\left(\frac{v(\boldsymbol{x})}{\|v\|_{B,Q}}\right) d\boldsymbol{x} \leqslant 1, \tag{2.6}$$

$$\|v\|_{B,Q} \leqslant \int\limits_Q B(v) d\boldsymbol{x} + 1. \tag{2.7}$$

Кроме того, если N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то для $v \in L_B(Q)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_Q B(v) d\boldsymbol{x} \leqslant c(\|v\|_{B,Q}). \tag{2.8}$$

Для функций $u \in L_B(Q)$, $v \in L_{\overline{B}}(Q)$ имеет место неравенство Гельдера (см. [7, гл. II, § 9, неравенства (9.24), (9.27)]:

$$\left| \int\limits_Q u(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right| \leqslant 2\|u\|_{B,Q} \|v\|_{\overline{B},Q}. \tag{2.9}$$

Норму в пространствах $L_p(Q)$, $p \in [1, \infty]$, будем обозначать $\|\cdot\|_{p,Q}$. Индекс $Q = \Omega$ в обозначениях $\|\cdot\|_{p,Q}$, $\|\cdot\|_{B,Q}$ будем опускать. Для любой N-функции $B(z)$, если $\operatorname{mes} Q < \infty$, то $L_B(Q) \subset L_1(Q)$ и выполнено неравенство

$$\|v\|_{1,Q} \leqslant A_0(\operatorname{mes} Q)\|v\|_{B,Q}, \quad v \in L_B(Q). \tag{2.10}$$

Для N-функций $B_1(z), \ldots, B_n(z)$ определим анизотропное пространство Соболева—Орлича $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)} = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{B_i,Q}.$$

Приведем теорему вложения для анизотропного пространства $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$. Положим

$$h(\theta) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{B_i^{-1}(\theta)}{\theta} \right)^{1/n}$$

и будем предполагать, что интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta$$

сходится. Тогда можно определить N-функцию $B_*^{-1}(z)$ по формуле

$$B_*^{-1}(z) = \int\limits_0^{|z|} \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta.$$

Лемма 2.1 ((см. [4])). *Пусть* $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$.

(1) *Если*

$$\int\limits_1^\infty \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta = \infty, \tag{2.11}$$

то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_{B_*}(Q)$ *и*

$$\|v\|_{B_*,Q} \leqslant A_1 \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}; \tag{2.12}$$

(2) *если*

$$\int\limits_1^\infty \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta < \infty, \tag{2.13}$$

то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_\infty(Q)$ *и*

$$\|v\|_{\infty,Q} \leqslant A_2 \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}. \tag{2.14}$$

Здесь

$$A_1 = \frac{n-1}{n}, \quad A_2 = \int\limits_0^\infty \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta.$$

3. Предположения и формулировка результатов

Пусть N-функции $B_1(z), \dots, B_n(z)$ и дополнительные к ним $\overline{B}_1(z), \dots, \overline{B}_n(z)$ подчиняются Δ_2-условию. Через $\mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{B_1}(\Omega) \times \ldots \times L_{B_n}(\Omega)$ с нормой

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{B}} = \|v_1\|_{B_1} + \ldots + \|v_n\|_{B_n}, \quad \boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega). \tag{3.1}$$

Аналогично определяется пространство $\mathrm{L}_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega)$. Будем считать, что $\psi(\boldsymbol{x}) \in L_\infty(\Omega)$, $\nabla\psi \in \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega)$.

Пусть $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_n)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = \Big(a_1(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}),\ \dots,\ a_n(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})\Big). \tag{3.2}$$

Приведем условия на функции, входящие в уравнение (1.1). Предполагается, что функции $a_0(\boldsymbol{x}, s_0)$, $a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})$, $\alpha = 1, \dots, n$, измеримы по $\boldsymbol{x} \in \Omega$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Предполагается, что функция $a_0(\boldsymbol{x}, s_0)$ неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть существуют такие измеримые неотрицательные функции $\phi(\boldsymbol{x})$, $\Phi(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega)$, положительная непрерывная функция $\widehat{a}(k)$ и положительная константа $\overline{a}$, что справедливы неравенства:

$$\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})) \leqslant \widehat{a}(k)\{\Phi(\boldsymbol{x}) + \mathrm{B}(\boldsymbol{s})\}, \quad \overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^n \overline{B}_i(a_i), \quad \mathrm{B}(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^n B_i(s_i); \tag{3.3}$$

$$\Big(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) - a(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{t})\Big) \cdot (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}) > 0 \tag{3.4}$$

при почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и любых $s_0 \in [-k, k]$, $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{t}$. Следующее неравенство предполагается выполненным при почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) \cdot (\boldsymbol{s} - \nabla\psi) \geqslant \overline{a}\mathrm{B}(\boldsymbol{s}) - \phi(\boldsymbol{x}). \tag{3.5}$$

Функции $a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условию Гельдера по переменной s_0: существуют такие непрерывная функция $\widehat{A}(R, \rho)$, $R, \rho > 0$, возрастающая по каждому аргументу, и число $\alpha \in (0,1)$, что для любых $\boldsymbol{x} \in \Omega(R) = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : |\boldsymbol{x}| < R\}$, $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $|s_0| < \rho$, $|t_0| < \rho$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\overline{B}_i\left(\frac{|a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) - a_i(\boldsymbol{x}, t_0, \boldsymbol{s})|}{|s_0 - t_0|^\alpha}\right) \leqslant \widehat{A}(R, \rho)\mathrm{B}(\boldsymbol{s}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Здесь N-функции $B_1(z), \ldots, B_n(z)$ и дополнительные к ним N-функции $\overline{B}_1(z), \ldots, \overline{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2-условию. Неклассическое условие ранее использовалось в [8] для нелинейных эллиптических вариационных односторонних задач в пространствах Орлича.

Положим $a_0(\boldsymbol{x}, s_0) = a_0(\boldsymbol{x}, \psi) + b(\boldsymbol{x}, s_0)$. Пусть существует такое $\delta_0 > 0$, что:

$$a_0(\boldsymbol{x}, \psi),\ a_0(\boldsymbol{x}, \psi \pm \delta_0)\ \in L_1(\Omega). \tag{3.7}$$

Функция $b(\boldsymbol{x}, s_0)$ каратеодориева, неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(\boldsymbol{x}, \psi) = 0$ для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$, поэтому для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(\boldsymbol{x}, s_0)(s_0 - \psi) \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Предположим, что

$$\sup_{|s_0| \leqslant k} |b(\boldsymbol{x}, s_0)| = G_k(\boldsymbol{x}) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{3.9}$$

Из условия (3.7) следует, что

$$b(\boldsymbol{x}, \psi \pm \delta_0) \in L_1(\Omega). \tag{3.10}$$

Определим функцию

$$T_k(r) = \begin{cases} k & \text{при } r > k, \\ r & \text{при } |r| \leqslant k, \\ -k & \text{при } r < -k. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$[v] = \int\limits_\Omega v\, d\boldsymbol{x}.$$

Определение 3.1. *Энтропийным решением* задачи (1.1), (1.2) называется такая измеримая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} &1) \quad A_0(\boldsymbol{x}) = a_0(\boldsymbol{x}, u) \in L_1(\Omega), \\ &2) \quad T_k(u - \psi) \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \quad \text{при всех } k > 0 \end{aligned}$$

и при всех $k > 0$, $\xi(\boldsymbol{x}) \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\Big[a_0(\boldsymbol{x}, u)T_k(u - \psi - \xi) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \psi - \xi)\Big] \leqslant 0. \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.11), (3.3)–(3.7), (3.9). *Тогда существует энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2).

4. Подготовительные сведения

Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Рассмотрим каратеодориевы функции $a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = a_i\Big(\boldsymbol{x}, s_0 + \psi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s} + \nabla\psi(\boldsymbol{x})\Big)$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, s_0) = a_0\big(\boldsymbol{x}, s_0 + \psi(\boldsymbol{x})\big)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$. Функция $a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, s_0)$ является неубывающей по s_0. Применяя (3.3), (2.5), (3.4), для вектор-функции $\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) =$

$\Big(a_{1\psi}(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s}),\ \ldots,\ a_{n\psi}(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})\Big)$ при почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$ и любых $s_0\in[-k,k]$, $\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{t}$ выводим неравенства:

$$\overline{\mathrm{B}}\big(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})\big)=\overline{\mathrm{B}}\Big(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},s_0+\psi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{s}+\nabla\psi(\boldsymbol{x}))\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\widehat{a}\big(k+\|\psi\|_\infty\big)\Big\{\Phi(\boldsymbol{x})+\mathrm{B}\big(\boldsymbol{s}+\nabla\psi(\boldsymbol{x})\big)\Big\}\leqslant\widehat{a}\big(k+\|\psi\|_\infty\big)\Big\{\Phi(\boldsymbol{x})+c\mathrm{B}\big(\nabla\psi(\boldsymbol{x})\big)+c\mathrm{B}(\boldsymbol{s})\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant\widehat{a}_\psi(k)\Big\{\Phi_\psi(\boldsymbol{x})+\mathrm{B}(\boldsymbol{s})\Big\},\quad(3.3\psi)$$

$$\Big(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})-a_\psi(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{t})\Big)\cdot(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t})>0.\quad(3.4\psi)$$

Используя (3.5), (2.5), для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$ и всех $s_0\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^n$ получаем неравенства

$$\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}\Big(\boldsymbol{x},\ s_0+\psi(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{s}+\nabla\psi(\boldsymbol{x})\Big)\cdot\boldsymbol{s}\geqslant$$
$$\geqslant\overline{a}\mathrm{B}(\boldsymbol{s}+\nabla\psi)-\phi(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{\overline{a}}{c\mathrm{B}(\boldsymbol{s})}-\overline{a}\mathrm{B}\big(\nabla\psi(\boldsymbol{x})\big)-\phi(\boldsymbol{x})=\overline{a}_\psi\mathrm{B}(\boldsymbol{s})-\phi_\psi(\boldsymbol{x}).\quad(3.5\psi)$$

Очевидно, что функции $\phi_\psi(\boldsymbol{x})$, $\Phi_\psi(\boldsymbol{x})\in L_1(\Omega)$ неотрицательны, функция $\widehat{a}_\psi(k)$ положительна и непрерывна и $\overline{a}_\psi$ — положительное число.

Из неравенств (3.6) следует, что существуют такие непрерывная функция $\widehat{A}_\psi(R,\rho)$ и число $\alpha\in(0,1)$, что для любых $\boldsymbol{x}\in\Omega(R)$, $s_0,t_0\in\mathbb{R}$, $|s_0|<\rho$, $|t_0|<\rho$, $\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$\overline{B}_i\left(\frac{|a_{i\psi}(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})-a_{i\psi}(\boldsymbol{x},t_0,\boldsymbol{s})|}{|s_0-t_0|^\alpha}\right)\leqslant\widehat{A}\big(R,\rho+\|\psi\|_\infty)\mathrm{B}\big(\boldsymbol{s}+\nabla\psi\big)\leqslant$$
$$\leqslant\widehat{A}_\psi(R,\rho)\big(\mathrm{B}(\boldsymbol{s})+\mathrm{B}(\nabla\psi)\big),\quad i=1,\ldots,n.\quad(3.6\psi)$$

Положим $a_{0\psi}(\boldsymbol{x},s_0)=a_{0\psi}(\boldsymbol{x},0)+b_\psi(\boldsymbol{x},s_0)$, $a_{0\psi}(\boldsymbol{x},0)=a_0(\boldsymbol{x},\psi)$, $b_\psi(\boldsymbol{x},s_0)=b(\boldsymbol{x},s_0+\psi)$. Согласно (3.7), имеем

$$A^0_{0\psi}(\boldsymbol{x})=a_{0\psi}(\boldsymbol{x},0)\in L_1(\Omega).\quad(3.7\psi)$$

Функция $b_\psi(\boldsymbol{x},s_0)$ каратеодориева, неубывающая по $s_0\in\mathbb{R}$, $b_\psi(\boldsymbol{x},0)=0$ для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$, поэтому для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$, $s_0\in\mathbb{R}$

$$b_\psi(\boldsymbol{x},s_0)s_0\geqslant 0.\quad(3.8\psi)$$

Из (3.9) имеем

$$\sup_{|s_0|\leqslant k}\big|b_\psi(\boldsymbol{x},s_0)\big|\leqslant\sup_{|s_0+\psi|\leqslant k+\|\psi\|_\infty}\big|b(\boldsymbol{x},s_0+\psi)\big|=G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x})\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega).\quad(3.9\psi)$$

Наконец, из (3.10) следует, что существует такое $\delta_0>0$, что

$$b_\psi(\boldsymbol{x},\pm\delta_0)\in L_1(\Omega).\quad(3.10\psi)$$

Пусть u — энтропийное задачи (1.1), (1.2). Положив $w=u-\psi$, определение 3.1 можно сформулировать следующим образом.

Определение 3.1$\boldsymbol{\psi}$. *Энтропийным решением* задачи (1.1), (1.2) называется такая измеримая функция $u:\Omega\to\mathbb{R}$, что $u(\boldsymbol{x})=w(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{x})$ и выполнены следующие условия:

$$1\psi)\quad A_{0\psi}(\boldsymbol{x})=a_{0\psi}(\boldsymbol{x},w)\in L_1(\Omega),$$
$$2\psi)\quad T_k(w)\in\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)\text{при всех } k>0$$

и при всех $k>0$, $\xi(\boldsymbol{x})\in C^1_0(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\Big[a_{0\psi}(\boldsymbol{x},w)T_k(w-\xi)+\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\cdot\nabla T_k(w-\xi)\Big]\leqslant 0.\quad(3.11\psi)$$

Пусть $\chi(P)$ обозначает логическую функцию, равную 1, когда P истинно, и 0, когда P ложно. Из условия 2ψ) определения энтропийного решения следует, что для любого $k>0$

$$\chi(|w|<k)\nabla w\in\mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega).\quad(4.1)$$

Отсюда, применяя (3.3ψ), устанавливаем, что для любого $k > 0$

$$\chi(|w| < k)\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, w, \nabla w) \in \mathrm{L}_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega). \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *Если $u = w + \psi$ — энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *то для всех $k \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\left\|\mathrm{B}(\nabla T_k w)\right\|_1 = \int\limits_{\{\Omega:|w|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w)d\boldsymbol{x} \leqslant C_1 k. \tag{4.3}$$

Доказательство. Согласно неравенству (3.11ψ) для $\xi = 0$ и условию (1ψ) имеем

$$\int\limits_{\{\Omega:|w|<k\}} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, w, \nabla w) \cdot \nabla w d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, w, \nabla w) \cdot \nabla T_k(w) d\boldsymbol{x} \leqslant -\int\limits_\Omega a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, w) T_k(w) d\boldsymbol{x} \leqslant k\|A_{0\psi}\|_1.$$

Применяя неравенство (3.5ψ), устанавливаем неравенство

$$\overline{a}_\psi \int\limits_{\{\Omega:|w|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w)d\boldsymbol{x} \leqslant k\|A_{0\psi}\|_1 + \|\phi_\psi\|_1,$$

Из которого следует (4.3). □

Лемма 4.2. *Пусть выполнено условие* (2.11). *Предположим, что для измеримой функции $v : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $T_k v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ при всех $k \geqslant 1$, справедливы неравенства*

$$\left\|\mathrm{B}(\nabla T_k v)\right\|_1 = \int\limits_{\{\Omega:|v|<k\}} \mathrm{B}(\nabla v)d\boldsymbol{x} \leqslant C_2 k. \tag{4.4}$$

Тогда

$$\operatorname{mes}\Big(\big\{\Omega : |v| \geqslant k\big\}\Big) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4.5}$$

Доказательство. Для N-функции $\overline{B}$, удовлетворяющей Δ_2-условию, справедливо соотношение

$$\lim_{\|\omega\|_B \to \infty} \frac{\|B(\omega)\|_1}{\|\omega\|_B} = \infty \tag{4.6}$$

(см. [19, лемма 3.14]). Согласно неравенствам (2.12), (4.4) с учетом (4.6) имеем

$$\|T_k v\|_{B_*} \leqslant A_1\|\nabla T_k v\|_{\mathrm{B}} \leqslant A_1\varepsilon(k)\|\mathrm{B}(\nabla T_k v)\|_1 \leqslant C_3 k\varepsilon(k), \quad k \geqslant 1, \tag{4.7}$$

$\varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Неравенство (4.7) установлено при условии

$$\|\nabla T_k v\|_{\mathrm{B}} \to \infty, \quad k \to \infty.$$

В противном случае

$$\|\nabla T_k v\|_{\mathrm{B}} \leqslant C_4 = C_4 k\varepsilon(k), \quad k > 0,$$

поэтому неравенство (4.7) также справедливо.

Из (4.7) имеем:

$$B_*\left(\frac{k}{\|T_k v\|_{B_*}}\right) \geqslant B_*\left(\frac{1}{C_3\varepsilon(k)}\right) \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{4.8}$$

Далее, применяя (2.6), получаем:

$$1 \geqslant \int\limits_\Omega B_*\left(\frac{T_k v}{\|T_k v\|_{B_*}}\right) d\boldsymbol{x} \geqslant B_*\left(\frac{k}{\|T_k v\|_{B_*}}\right) \operatorname{mes}\Big(\big\{\Omega : |v| \geqslant k\big\}\Big).$$

Пользуясь (4.8), из последнего неравенства выводим (4.5). □

Замечание 4.1. Если $u = w+\psi$ — энтропийное решение задачи (1.1), (1.2) и выполнено условие (2.11), то из лемм 4.1, 4.2 следует

$$\operatorname{mes}\Big(\big\{\Omega : |w| \geqslant k\big\}\Big) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4.9}$$

Лемма 4.3. *Пусть выполнено условие* (2.11). *Предположим, что для измеримой функции* $v : \Omega \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющей условию* $T_k v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ *при всех* $k \geqslant 1$, *справедливы неравенства* (4.4). *Тогда*

$$\operatorname{mes}\Big(\big\{\Omega : \mathrm{B}(\nabla v) \geqslant \rho\big\}\Big) \to 0, \quad \rho \to \infty. \tag{4.10}$$

Доказательство. Положим

$$\Phi(k,\rho) = \operatorname{mes}\Big\{\Omega :\ |v| \geqslant k,\ \mathrm{B}(\nabla v) \geqslant \rho\Big\}, \quad k,\rho \geqslant 0.$$

Выше установлено (см. (4.5)), что

$$\Phi(k,0) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поскольку функция $\rho \to \Phi(k,\rho)$ невозрастающая, то для $k,\rho > 0$ справедливы неравенства

$$\Phi(0,\rho) \leqslant \frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \Phi(0,\varrho)d\varrho \leqslant \Phi(k,0) + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \Big(\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho)\Big)d\varrho. \tag{4.11}$$

Отметим, что

$$\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho) = \operatorname{mes}\Big\{\Omega :\ |v| < k,\ \mathrm{B}(\nabla v) \geqslant \varrho\Big\}.$$

Поэтому из (4.4) следует, что

$$\int\limits_0^\infty \Big(\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho)\Big)d\varrho = \int\limits_{\{\Omega : |v|<k\}} \mathrm{B}(\nabla v)d\boldsymbol{x} \leqslant C_2 k.$$

Теперь из (4.11) получаем неравенство

$$\Phi(0,\rho) \leqslant \Phi(k,0) + \frac{C_2 k}{\rho}.$$

Выбирая k так, чтобы $\Phi(k,0) < \varepsilon$, затем выбирая ρ добиваемся неравенства $\Phi(0,\rho) < 2\varepsilon$. Тем самым (4.10) установлено. □

Лемма 4.4. *Пусть* N*-функция* $\overline{B}(z)$ *удовлетворяет* Δ_2*-условию,* $v^m(\boldsymbol{x})$, $m = 1,\ldots,\infty$, $v(\boldsymbol{x})$ — *такие функции из* $L_B(\Omega)$, *что*

$$\|v^m\|_B \leqslant C, \quad m = 1,2,\ldots,$$
$$v^m \to v \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad m \to \infty.$$

Тогда $v^m \rightharpoonup v$ *слабо в* $L_B(\Omega)$ *при* $m \to \infty$.

Доказательство леммы 4.4 для $B(z) = |z|^a$, $a > 1$, проведено в [6, гл. I, § 1.4, лемма 1.3], для N-функции $B(z)$ осуществляется аналогичным образом.

Лемма 4.5. *Если* $u = w + \psi$ *является энтропийным решением задачи* (1.1), (1.2), *то неравенство* (3.11ψ) *справедливо для любой функции* $\xi \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

Доказательство. По определению пространства $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ существует такая последовательность $\xi^m \in C_0^\infty(\Omega)$, что

$$\nabla\xi^m \to \nabla\xi \quad \text{в } \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega) \text{ при } m \to \infty.$$

Отсюда, согласно (2.12), (2.10), следует сходимость $\xi^m \to \xi$, $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $m \to \infty$, а значит, можно выделить такую подпоследовательность (обозначим ее также), что $\xi^m \to \xi$, $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ почти всюду в Ω. Тогда для любого $k > 0$ имеют место сходимости:

$$T_k(w-\xi^m) \to T_k(w-\xi), \quad \nabla T_k(w-\xi^m) \to \nabla T_k(w-\xi) \quad \text{почти всюду в } \Omega \text{ при } m \to \infty. \tag{4.12}$$

Пусть

$$\widehat{k} = k + \sup_{m=1,2,\ldots} \Big(\|\xi^m\|_\infty,\ \|\xi\|_\infty\Big);$$

тогда

$$\big|\nabla T_k(w-\xi^m)\big| \leqslant \big|\nabla T_{\widehat{k}}(w)\big| + \big|\nabla\xi^m\big|, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad m=1,2,\ldots.$$

Поскольку сходящаяся последовательность $\nabla\xi^m$ ограничена в $\mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega)$, то отсюда, согласно (4.1), следует ограниченность норм $\|\nabla T_k(w-\xi^m)\|_{\mathrm{B}}$. Применяя (4.12) и лемму 4.4, при любом $k>0$ имеем

$$\nabla T_k(w-\xi^m) \rightharpoonup \nabla T_k(w-\xi) \quad \text{в } \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega) \text{ при } m\to\infty. \tag{4.13}$$

Теперь перейдем к пределу при $m\to\infty$ в неравенстве

$$\Big[a_{0\psi}(\boldsymbol{x},w)T_k(w-\xi^m) + \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\cdot\nabla T_k(w-\xi^m)\Big] \leqslant 0.$$

Поскольку $a_{0\psi}(\boldsymbol{x},w)\in L_1(\Omega)$, то в первом слагаемом, применяя (4.12), согласно теореме Лебега, можно перейти к пределу при $m\to\infty$. Ввиду того, что $\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\chi(|w|<\widehat{k})\in \mathrm{L}_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega)$ (см. (4.2)), применяя (4.13), устанавливаем, что второе слагаемое последнего неравенства также имеет предел при $m\to\infty$. □

Замечание 4.2. В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа «из последовательности u^m можно выделить подпоследовательность (обозначим ее также) сходящуюся почти всюду в Ω при $m\to\infty$» будем писать просто «последовательность u^m выборочно сходится почти всюду в Ω при $m\to\infty$». Соответственно, будем использовать термин «выборочно слабо сходится» и т. п.

Обозначим через $\mathcal{F}$ класс функций $T\in C^2(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R})$:

$$T(0)=0; \quad T'(r)\geqslant 0,\ r\in\mathbb{R}; \quad T'(r)=0,\ |r|\geqslant k;$$
$$T(-r)=-T(r),\ r\in\mathbb{R}; \quad T''(r)\leqslant 0,\ r\geqslant 0.$$

Лемма 4.6. *Энтропийное решение $u=w+\psi$ задачи* (1.1), (1.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\Big[a_{0\psi}T(w-\xi) + \boldsymbol{a}_\psi\cdot\nabla T(w-\xi)\Big] \leqslant 0 \tag{3.11ψT}$$

при любом $\xi\in C_0^1(\Omega)$ и всех $T\in\mathcal{F}$.

Доказательство. Очевидно, что (3.11ψT) выполнено при $T(r)=\sum a_jT_{k_j}(r)$, $a_j\geqslant 0$. В общем случае приближаем функции $T\in\mathcal{F}$ такими линейными комбинациями в норме $C^1(\mathbb{R})$ (см. [11, лемма 3.2]). □

Лемма 4.7 (см. [3, лемма 4]). *Пусть Q — ограниченная область и, если выполнено условие* (2.13), *то $M(z)$ — произвольная N-функция, а если выполнено условие* (2.11), *то $M(z)\prec\prec B_*(z)$. Тогда оператор вложения $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)\subset L_M(Q)$ вполне непрерывен.*

Лемма 4.8 (см. [14, лемма 2]). *Пусть* $(X,\mathcal{T},\mathrm{mes})$ *— такое измеримое пространство, что* $\mathrm{mes}(X)<\infty$. *Пусть* $\gamma: X\to[0,+\infty]$ *— такая измеримая функция, что* $\mathrm{mes}\big(\{\boldsymbol{x}\in X:\gamma(\boldsymbol{x})=0\}\big)=0$. *Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что неравенство*

$$\int\limits_Q \gamma(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\leqslant\delta$$

влечет $\mathrm{mes}(Q)\leqslant\varepsilon$.

5. Существование обобщенного решения

Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассмотрим задачу Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big)_{x_i}-a_0(\boldsymbol{x},u,\nabla u)=0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega; \tag{5.1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{5.2}$$

Предполагается, что функции $a_i(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})$, $i=0,\dots,n$, измеримы по $\boldsymbol{x}\in\Omega$ для $\mathbf{s}=(s_0,\boldsymbol{s})=(s_0,s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$. Пусть $\mathbf{s}\cdot\mathbf{t}$ обозначает скалярное произведение $\mathbf{s}=(s_0,\boldsymbol{s})$, $\mathbf{t}=(t_0,\boldsymbol{t})\in\mathbb{R}^{n+1}$ и

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{x},\mathbf{s})=\Big(a_0(\boldsymbol{x},\mathbf{s}),\ a_1(\boldsymbol{x},\mathbf{s}),\ \dots,\ a_n(\boldsymbol{x},\mathbf{s})\Big).$$

Пусть существуют такие измеримые неотрицательные функции $\phi(\boldsymbol{x})$, $\Phi(\boldsymbol{x})\in L_1(\Omega)$, что для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$ и любых $\mathbf{s}=(s_0,\boldsymbol{s})\in\mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства (3.4) и

$$\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{a}(\boldsymbol{x},\mathbf{s}))\leqslant\widehat{a}\mathbf{B}(\mathbf{s})+\Phi(\boldsymbol{x}),\quad \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{a})=\sum_{i=0}^{n}\overline{B}_i(a_i),\quad \mathbf{B}(\mathbf{s})=\sum_{i=0}^{n}B_i(s_i)=B_0(s_0)+\mathrm{B}(\boldsymbol{s}); \tag{5.3}$$

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{x},\mathbf{s})\cdot\mathbf{s}\geqslant\overline{a}\mathbf{B}(\mathbf{s})-\phi(\boldsymbol{x}). \tag{5.4}$$

Здесь N-функции $B_0(z)$, $B_1(z),\dots$, $B_n(z)$ и дополнительные к ним N-функции $\overline{B}_0(z)$, $\overline{B}_1(z),\dots$, $\overline{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Через $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{\overline{B}_0}(\Omega)\times L_{\overline{B}_1}(\Omega)\times\ldots\times L_{\overline{B}_n}(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\overline{\mathbf{B}}}=\|v_0\|_{\overline{B}_0}+\|v_1\|_{\overline{B}_1}+\ldots+\|v_n\|_{\overline{B}_n},\quad \mathbf{v}=(v_0,v_1,\dots,v_n)\in\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega).$$

Определим пространство Соболева—Орлича $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)}=\|v\|_{B_0}+\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)}.$$

В случае выполнения условия (2.11), будем считать, что

$$B_0(z)\prec\prec B_*(z), \tag{5.5}$$

а при выполнении (2.13) — что $B_0(z)$ является произвольной N-функцией.

Будем считать, что

$$B_i(z)\prec B_0(z),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{5.6}$$

Из условия (5.3), пользуясь (2.7), для $u\in\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ выводим оценку

$$\begin{gathered}\big\|\mathbf{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big\|_{\overline{\mathbf{B}}}=\sum_{i=0}^{n}\big\|a_i(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big\|_{\overline{B}_i}\leqslant\\ \leqslant\sum_{i=0}^{n}\int\limits_{\Omega}\overline{B}_i\big(a_i(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big)d\boldsymbol{x}+n+1\leqslant\widehat{a}\big\|\mathrm{B}(\nabla u)\big\|_1+\widehat{a}\big\|B_0(u)\big\|_1+\|\Phi\|_1+n+1.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Введем обозначение $v_{x_0}=v$. Далее, по элементу $\mathbf{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\in\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega)$ для $v(\boldsymbol{x})\in\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством

$$\langle\mathbf{A}(u),v\rangle=\Big[\mathbf{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\cdot(v,\nabla v)\Big]=\sum_{i=0}^{n}\big[a_iv_{x_i}\big]. \tag{5.8}$$

Используя неравенство Гельдера (2.9), для функций $u(\boldsymbol{x}),v(\boldsymbol{x})\in\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ выводим неравенства

$$\Big|\langle\mathbf{A}(u),v\rangle\Big|\leqslant2\sum_{i=0}^{n}\|a_i\|_{\overline{B}_i}\|v_{x_i}\|_{B_i}\leqslant2\big\|\mathbf{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big\|_{\overline{\mathbf{B}}}\|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)}. \tag{5.9}$$

Из (5.9), (5.7) следует, что функционал $\mathbf{A}(u)$, определяемый равенством (5.8) в пространстве $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, является ограниченным.

Определение 5.1. Обобщенным решением задачи (5.1), (5.2) назовем функцию $u(\boldsymbol{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle = 0 \tag{5.10}$$

для любой функции $v(\boldsymbol{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$.

Теорема 5.1. *Если выполнены условия* (3.4), (5.3)–(5.6), *то существует обобщенное решение задачи* (5.1), (5.2).

Существование решения задачи (5.1), (5.2) с монотонным оператором оператором $\mathbf{A}$ установлено в [2]. Для изотропного уравнения со степенными нелинейностями существование решения задачи Дирихле установлено Ф. Браудером [18]: оно основано на абстрактной теореме для псевдомонотонных операторов.

Определение 5.2. Оператор $A : V \to V'$ называется *псевдомонотонным*, если

(i) A — ограниченный оператор;

(ii) из условий $u^j \rightharpoonup u$ слабо в V и

$$\lim_{j\to\infty} \sup \langle A(u^j), u^j - u\rangle \leqslant 0$$

следует, что для любого $v \in V$ справедливо неравенство

$$\lim_{j\to\infty} \inf \langle A(u^j), u^j - v\rangle \geqslant \langle A(u), u - v\rangle. \tag{5.11}$$

Лемма 5.1 (см. [6, гл. II,§ 2, теорема 2.7]). *Пусть V — рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Пусть оператор $A : V \to V'$ является псевдомонотонным и коэрцитивным, т.е.*

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} \to \infty, \quad \|u\| \to \infty. \tag{5.12}$$

Тогда отображение $A : V \to V'$ сюръективно, т.е. для всякого $F \in V'$ существует такой $u \in V$, что $A(u) = F$.

Прежде чем перейти к проверке условий леммы 5.1 приведем вспомогательные оценки и замечания.

Замечание 5.1. Из неравенств (2.7), (2.8) следует, что, если N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то ограниченность множества функций в пространстве $L_B(\Omega)$ равносильна ограниченности в среднем. Поэтому ограниченность множества $\Theta \subset \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ по норме равносильна ограниченности множества $\{\|\mathbf{B}(u)\|_1,\ u \in \Theta\}$.

Замечание 5.2. Пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ является рефлексивным сепарабельным банаховым пространством.

Предложение 5.1. *Пусть выполнены условия* (3.4), (5.3)–(5.6). *Тогда оператор*

$$\mathbf{A} : \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega) \to \left(\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)\right)',$$

определяемый равенством (5.8), *является псевдомонотонным.*

Доказательство. Ограниченность оператора $\mathbf{A}$ следует из оценок (5.9), (5.7). Рассмотрим такую последовательность $\{u^j\}_{j=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, что

$$u^j \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega), \quad j \to \infty; \tag{5.13}$$

$$\lim_{j\to\infty} \sup \langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle \leqslant 0. \tag{5.14}$$

Покажем, что

$$\mathbf{A}(u^j) \rightharpoonup \mathbf{A}(u) \quad \text{слабо в } \Big(\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)\Big)', \quad j \to \infty; \tag{5.15}$$

$$\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle \to 0, \quad j \to \infty. \tag{5.16}$$

Очевидно, что из (5.15), (5.16) следует (5.11).

Прежде всего, из сходимости (5.13) и неравенства (2.8) следуют оценки:

$$\|u^j\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} \leqslant C_1, \quad j = 1, 2, \ldots; \tag{5.17}$$

$$\|B_0(u^j)\|_1 + \|\mathrm{B}(\nabla u^j)\|_1 \leqslant C_2, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{5.18}$$

Кроме того, соединяя (5.7), (5.18), выводим оценку

$$\big\|\mathbf{a}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u)\big\|_{\overline{\mathbf{B}}} = \sum_{i=0}^{n} \big\|a_i(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j)\big\|_{\overline{B}_i} \leqslant C_3, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{5.19}$$

Зафиксируем произвольное $R > 0$. В случае (2.11) по лемме 4.7 пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в $L_P(\Omega(R+1))$ для любой N-функции $M(z)$, удовлетворяющей условию $M(z) \prec\prec B_*(z)$. В случае (2.13) для любой N-функции $M(z)$ по лемме 4.7 пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в $L_M(\Omega(R+1))$. Согласно условиям (5.5), (5.6), в обоих случаях (2.11) и (2.13), пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в пространства $L_{B_i}(\Omega(R+1))$, $i = 0, \ldots, n$.

Из условия (5.6), применяя (2.3), устанавливаем существование такого $z_0 > 0$, что

$$B_i(z) \leqslant C_4 B_0(z), \quad |z| \geqslant z_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.20}$$

Пусть $\eta_R(r) = \min(1, \max(0, R+1-r))$. Пользуясь (2.5), (5.20), (5.18) выводим неравенства

$$\int\limits_{\Omega(R+1)} \Big(\mathrm{B}\Big(\nabla\big(u^j\eta_R(|\boldsymbol{x}|)\big)\Big) + B_0\Big(u^j\eta_R\big(|\boldsymbol{x}|\big)\Big)\Big)\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega(R+1)} \Big(\mathrm{B}\Big(\nabla u^j\eta_R + u^j\nabla\eta_R\Big) + B_0\big(u^j\eta_R\big)\Big)\,d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega(R+1)} \Big(C_5\Big\{\mathrm{B}(\nabla u^j) + \mathrm{B}(u^j)\Big\} + B_0(u^j)\Big)\,d\boldsymbol{x} \leqslant C_6 \int\limits_{\Omega(R+1)} \big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + \mathrm{B}(z_0) + B_0(u^j)\big)\,d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant C_6\Big(\big\|B_0(u^j)\big\|_{1,\Omega(R+1)} + \big\|\mathrm{B}(\nabla u^j)\big\|_{1,\Omega(R+1)}\Big) + C_7 \operatorname{mes}\Omega(R+1) \leqslant C_8(R), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно (см. замечание 5.1), последовательность $\{u^j\eta_R\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена в пространстве $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1))$. Ввиду компактности вложений

$$\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1)) \subset L_{B_i}(\Omega(R+1)), \quad i = 0, \ldots, n,$$

имеют место сильные сходимости

$$u^j\eta_R \to u\eta_R \quad \text{в } L_{B_i}(\Omega(R+1)),\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad j \to \infty,$$

из которых следуют сильные сходимости

$$u^j \to u \quad \text{в } L_{B_i}(\Omega(R)),\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad j \to \infty, \tag{5.21}$$

а также выборочная сходимость $u^j \to u$ почти всюду в $\Omega(R)$. Диагональным процессом устанавливается сходимость

$$u^j \to u \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad j \to \infty. \tag{5.22}$$

Положим

$$A^j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) - a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)\Big)(u^j - u)_{x_i}, \quad j = 1, \ldots;$$

тогда

$$\langle \mathbf{A}(u^j) - \mathbf{A}(u), u^j - u\rangle = \int\limits_{\Omega} A^j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad j = 1, \ldots.$$

Согласно (5.13), (5.14), имеем

$$\lim_{j\to\infty}\sup\int\limits_{\Omega} A^j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{5.23}$$

Запишем $A^j(\boldsymbol{x})$ в следующем виде:

$$A^j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\Big(a_i\big(\boldsymbol{x},u^j,\nabla u^j\big) - a_i\big(\boldsymbol{x},u^j,\nabla u\big)\Big)(u^j-u)_{x_i} + \\ + \sum_{i=1}^{n}\Big(a_i\big(\boldsymbol{x},u^j,\nabla u\big) - a_i\big(\boldsymbol{x},u,\nabla u\big)\Big)(u^j-u)_{x_i} + \\ + \Big(a_0\big(\boldsymbol{x},u^j,\nabla u^j\big) - a_0\big(\boldsymbol{x},u,\nabla u\big)\Big)(u^j-u) = \\ = q^j(\boldsymbol{x}) + r^j(\boldsymbol{x}) + s^j(\boldsymbol{x}), \quad j=1,\ldots. \tag{5.24}$$

Покажем, что

$$r^j(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad j\to\infty, \tag{5.25}$$

$$s^j(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad j\to\infty. \tag{5.26}$$

Рассмотрим операторы Немыцкого $A_i(u) = a_i(\boldsymbol{x},u,\nabla v)$, $i=1,2,\ldots,n$, при фиксированном $v\in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ для $\boldsymbol{x}\in\Omega(R)$, $R>0$. Применяя оценку (5.3), выводим неравенство

$$\overline{B}_i(a_i(\boldsymbol{x},u,\nabla v)) \leqslant \widehat{a}\mathrm{B}(\nabla v) + B_0(u) + \Phi(\boldsymbol{x}),$$

с функцией $\widehat{a}\mathrm{B}(\nabla v)+\Phi(\boldsymbol{x})\in L_1(\Omega)$. Согласно [7, гл. III, § 17, теорема 17.5], операторы A_i действуют из $L_{B_0}(\Omega(R))$ в $L_{\overline{B}_i}(\Omega(R))$, $i=1,2,\ldots,n$. Кроме того, из [7, гл. III, § 17, теорема 17.3] следует непрерывность операторов A_i, $i=1,2,\ldots,n$, в $L_{B_0}(\Omega(R))$ при любом $R>0$.

Применяя неравенство (2.9), выводим

$$\int\limits_{\Omega(R)} \big|r^j(\boldsymbol{x})\big|d\boldsymbol{x} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\Big\|a_i\big(\boldsymbol{x},u^j,\nabla u\big) - a_i\big(\boldsymbol{x},u,\nabla u\big)\Big\|_{\overline{B}_i,\Omega(R)}\big\|(u^j-u)_{x_i}\big\|_{B_i,\Omega(R)}.$$

Ввиду сходимости $u^j\to u$ в $L_{B_0}(\Omega(R))$ при $j\to\infty$ (см. (5.21)) и непрерывности операторов $A_i : L_{B_0}(\Omega(R)) \to L_{\overline{B}_i}(\Omega(R))$, $i=1,2,\ldots,n$, первый сомножитель стремится к нулю, а второй равномерно ограничен (см. (5.17)). Таким образом, установлено, что для любого $R>0$

$$r^j(\boldsymbol{x}) \to 0, \quad j\to\infty,$$

в $L_1(\Omega(R))$. Отсюда при помощи диагонального процесса устанавливается сходимость (5.25).

Используя неравенство (2.9), выводим

$$\int\limits_{\Omega(R)} bbb\big|s^j(\boldsymbol{x})\big|d\boldsymbol{x} \leqslant 2\Big\|a_0\big(\boldsymbol{x},u^j,\nabla u^j\big) - a_0\big(\boldsymbol{x},u,\nabla u\big)\Big\|_{\overline{B}_0,\Omega(R)}\|u^j-u\|_{B_0,\Omega(R)}.$$

Первый сомножитель равномерно ограничен (см. (5.19)), а второй стремится к нулю (см. (5.21)), поэтому для любого $R>0$

$$s^j(\boldsymbol{x}) \to 0, j\to\infty,$$

в $L_1(\Omega(R))$. Отсюда при помощи диагонального процесса устанавливается сходимость (5.26).

Далее, запишем $A^j(\boldsymbol{x})$ в виде

$$A^j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x},u^j,\nabla u^j\big)u^j_{x_i} + a_0\big(\boldsymbol{x},u^j,\nabla u^j\big)u^j - g^j(\boldsymbol{x}), \quad j=1,\ldots, \tag{5.27}$$

где

$$g^j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)(u^j - u)_{x_i} + a_0\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)(u^j - u) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big)u_{x_i} + a_0\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big)u \in L_1(\Omega), \quad j = 1, \ldots .$$

Используя неравенство (2.1) для $\varepsilon \in (0,1)$, получаем

$$\big|g^j(\boldsymbol{x})\big| \leqslant \varepsilon\Big(B_0(u^j) + \mathrm{B}(\nabla u^j) + \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{a}(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j))\Big) + C_9(\varepsilon)\Big(B_0(u) + \mathrm{B}(\nabla u) + \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{a}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u))\Big).$$

Применяя (5.3), выводим неравенства

$$\big|g^j(\boldsymbol{x})\big| \leqslant \varepsilon C_{10}\Big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + B_0(u^j)\Big) + C_{11}(\varepsilon)\Big(\mathrm{B}(\nabla u) + B_0(u) + \Phi(\boldsymbol{x})\Big). \tag{5.28}$$

Используя (5.4), из (5.27) выводим неравенства:

$$A^j(\boldsymbol{x}) \geqslant \overline{a}\Big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + B_0(u^j)\Big) - \phi(\boldsymbol{x}) - \big|g^j(\boldsymbol{x})\big|. \tag{5.29}$$

Соединяя (5.28), (5.29), выбирая $\varepsilon < \overline{a}/C_{10}$, устанавливаем оценки

$$A^j(\boldsymbol{x}) \geqslant C_{12}\Big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + B_0(u^j)\Big) - \Phi_u(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \ldots, \tag{5.30}$$

с неотрицательной функцией

$$\Phi_u(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) + C_{11}\Big(\mathrm{B}(\nabla u) + B_0(u) + \Phi(\boldsymbol{x})\Big) \in L_1(\Omega),$$

конечной почти всюду в Ω.

Пусть $A^j(\boldsymbol{x}) = A^{j+}(\boldsymbol{x}) - A^{j-}(\boldsymbol{x})$, где $A^{j+}(\boldsymbol{x})$, $A^{j-}(\boldsymbol{x})$ — положительная и отрицательная части $A^j(\boldsymbol{x})$, соответственно. Из (5.30) следуют оценки

$$A^{j+}(\boldsymbol{x}) \geqslant C_{12}\Big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + B_0(u^j)\Big) - \Phi_u(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \ldots . \tag{5.31}$$

Если $\chi^j(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция множества $\{\boldsymbol{x} : A^{j-}(\boldsymbol{x}) > 0\}$, то

$$-A^{j-} = \chi^j q^j + \chi^j r^j + \chi^j s^j,$$

причем, согласно (5.25), (5.26), $\chi^j r^j(\boldsymbol{x}) \to 0$, $\chi^j s^j(\boldsymbol{x}) \to 0$ почти всюду в Ω при $j \to \infty$. Ввиду (5.4), $\chi^j q^j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ почти всюду в Ω; тогда $A^{j-}(\boldsymbol{x}) \to 0$ почти всюду в Ω при $j \to \infty$.

Кроме того, из (5.30) следует оценка

$$A^j(\boldsymbol{x}) \geqslant -\Phi_u(\boldsymbol{x}), \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Отсюда имеем: $A^{j-}(\boldsymbol{x}) \leqslant \Phi_u(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \ldots$. Тогда, согласно теореме Лебега,

$$A^{j-}(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \to \infty. \tag{5.32}$$

Поэтому, согласно (5.23),

$$0 \leqslant \lim_{j\to\infty} \sup \int\limits_{\Omega} A^{j+}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{j\to\infty} \sup \int\limits_{\Omega} A^j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \lim_{j\to\infty} \sup \int\limits_{\Omega} A^{j-}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$A^{j+}(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \to \infty. \tag{5.33}$$

Таким образом, из (5.32), (5.33) имеем сходимость

$$A^j(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \to \infty, \tag{5.34}$$

а также выборочные сходимости

$$A^{j+}(\boldsymbol{x}) \to 0, \quad A^j(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad j \to \infty. \tag{5.35}$$

Установим сходимость

$$u^j_{x_i}(\boldsymbol{x}) \to u_{x_i}(\boldsymbol{x}) \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \quad j \to \infty. \tag{5.36}$$

Обозначим через $\Omega' \subset \Omega$ подмножество точек полной меры, для которых имеют место сходимости (5.22), (5.35) и выполнены неравенства (3.4), (5.3), (5.4).

От противного, пусть в некоторой точке $\boldsymbol{x}^* \in \Omega'$ нет сходимости. Введем обозначения

$$s_0^j = u^j(\boldsymbol{x}^*), \quad s_0 = u(\boldsymbol{x}^*),$$
$$\boldsymbol{s}^j = \Big(s_1^j,\ s_2^j,\ \ldots,\ s_n^j\Big) = \Big(u_{x_1}^j(\boldsymbol{x}^*),\ u_{x_2}^j(\boldsymbol{x}^*),\ \ldots,\ u_{x_n}^j(\boldsymbol{x}^*)\Big),$$
$$\boldsymbol{s} = \Big(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n\Big) = \Big(u_{x_1}(\boldsymbol{x}^*),\ u_{x_2}(\boldsymbol{x}^*),\ \ldots,\ u_{x_n}(\boldsymbol{x}^*)\Big).$$

Предположим, что последовательность $\{\mathrm{B}(\boldsymbol{s}^j)\}_{j=1}^{\infty}$ не ограничена. Тогда из оценки (5.31) следует неограниченность последовательности $A^{j+}(\boldsymbol{x}^*)$, $j = 1, 2, \ldots$, что противоречит (5.35). Поэтому последовательность $\{s^j\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена.

Пусть $\boldsymbol{s}^* = \big(s_1^*,\ s_2^*,\ \ldots,\ s_n^*\big)$ — один из частичных пределов $\boldsymbol{s}^j = \big(s_1^j,\ s_2^j,\ \ldots,\ s_n^j\big)$ при $j \to \infty$. Тогда, с учетом (5.22), имеем

$$s_0^j \to s_0, \quad s_i^j \to s_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \to \infty.$$

Поэтому, применяя (5.25), (5.26), (5.35), из (5.24) и непрерывности $a_i(\boldsymbol{x}^*, s_0, \boldsymbol{s})$ по $\mathbf{s} = (s_0, \boldsymbol{s})$ вытекает, что

$$A^j(\boldsymbol{x}^*) \to \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i(\boldsymbol{x}^*, s_0, \boldsymbol{s}^*) - a_i(\boldsymbol{x}^*, s_0, \boldsymbol{s})\Big)(s_i^* - s_i) = 0;$$

следовательно, согласно (3.4), $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^*$. Это противоречит тому, что в точке $\boldsymbol{x}^*$ нет сходимости.

Таким образом, из (5.22), (5.36) и непрерывности $a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})$ по $\mathbf{s} = (s_0, \boldsymbol{s})$ следует, что при $j \to \infty$

$$a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) \to a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big) \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Кроме того, из (5.19) следует ограниченность $a_i\big(\boldsymbol{x}, u^i, \nabla u^i\big)$ в $L_{\overline{B}_i}(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Применяя лемму 4.4, устанавливаем слабые сходимости

$$a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) \rightharpoonup a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big) \quad \text{в } L_{\overline{B}_i}(\Omega), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{5.37}$$

Очевидно, из (5.37) следует слабая сходимость (5.15).

Чтобы завершить доказательство, заметим, что из (5.13), (5.34) следует (5.16):

$$\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle = \langle \mathbf{A}(u^j) - \mathbf{A}(u), u^j - u\rangle + \langle \mathbf{A}(u), u^j - u\rangle \to 0, \quad j \to \infty.$$

Предложение 5.1 доказано. □

Доказательство теоремы 5.1. Коэрцитивность оператора $\mathbf{A}$ установлена в [3]. Из предложения 5.1, согласно лемме 5.1, следует существование такой функции $u \in \mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$, что $\mathbf{A}(u) = \mathbf{0}$. Таким образом, для любого $v \in \mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ справедливо тождество (5.10). □

ddd

6. Существование энтропийного решения

Доказательство теоремы 3.1

Шаг 1. Выберем последовательность функций $A_{0\psi}^m(\boldsymbol{x}) \in C_0^{\infty}(\Omega)$ так, чтобы

$$A_{0\psi}^m \to A_{0\psi}^0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty, \tag{6.1}$$

и при этом

$$\|A_{0\psi}^m\|_1 \leqslant \|A_{0\psi}^0\|_1, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.2}$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^m(\boldsymbol{x}, w, \nabla w))_{x_i} = a_0^m(\boldsymbol{x}, w), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{6.3}$$

с функциями $a_i^m(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_m s_0, \boldsymbol{s})$, $a_0^m(\boldsymbol{x}, s_0) = A_{0\psi}^m(\boldsymbol{x}) + b^m(\boldsymbol{x}, s_0) + B_0'(s_0)/m$. Здесь $b^m(\boldsymbol{x}, s_0) = T_m b_{\psi}(\boldsymbol{x}, s_0)\kappa_m(\boldsymbol{x})$, $\kappa_m(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция множества $\Omega(m) = \{\boldsymbol{x} \in$

$\Omega : |\boldsymbol{x}| < m\}$. Предполагаем, что непрерывно дифференцируемые N – функции B_0, $\overline{B}_0$ удовлетворяют Δ_2 – условию и выполнены требования (5.5), (5.6).

Очевидно, что

$$|b^m(\boldsymbol{x}, s_0)| \leqslant |b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0)|, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6.4}$$

Кроме того, применяя (3.8ψ), устанавливаем неравенства

$$b^m(\boldsymbol{x}, s_0)s_0 \geqslant 0, \quad s_0 B_0'(s_0) \geqslant B_0(s_0) \geqslant 0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6.5}$$

Обобщенным решением задачи (6.3), (5.2) является функция $w^m \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$[A^m_{0\psi}(\boldsymbol{x}) + T_m b_\psi(\boldsymbol{x}, w^m)\kappa_m(\boldsymbol{x}) + B_0'(w^m)/m) + \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) \cdot \nabla v] = 0 \tag{6.6}$$

для любой функции $v \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$.

Для функций $\boldsymbol{a}^m(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = (a^m_1(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}), \ldots, a^m_n(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}))$, $a^m_0(\boldsymbol{x}, s_0)$ проверим условия (3.4), (5.3), (5.4). Очевидно, что

$$\overline{B}_0(b^m(\boldsymbol{x}, s_0)) = \overline{B}_0(T_m b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0)\kappa_m(\boldsymbol{x})) \leqslant \overline{B}_0(m)\kappa_m(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega),$$

поэтому, применяя (2.5), (2.2), (2.4), устанавливаем

$$\begin{gathered}\overline{B}_0(a^m_0(\boldsymbol{x}, s_0)) \leqslant c\overline{B}_0(A^m_{0\psi}(\boldsymbol{x})) + c\overline{B}_0(b^m(\boldsymbol{x}, s_0)) + c\overline{B}_0(B_0'(s_0)/m) \leqslant \\ \leqslant \widehat{a}_m B_0(s_0) + \Phi_m(\boldsymbol{x}), \quad \Phi_m(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega).\end{gathered} \tag{6.7}$$

Из (3.3ψ), (6.7) следует неравенство (5.3).

Далее, применяя (2.1), (6.5), получаем

$$a^m_0(\boldsymbol{x}, s_0)s_0 = (A^m_{0\psi}(\boldsymbol{x}) + b^m(\boldsymbol{x}, s_0) + B_0'(s_0)/m)s_0 \geqslant B_0(s_0)/m - \varepsilon B_0(s_0) - C(\varepsilon)\overline{B}_0(A^m_{0\psi}).$$

Отсюда, выбирая $\varepsilon < 1/m$, выводим неравенство

$$a^m_0(\boldsymbol{x}, s_0)s_0 \geqslant \overline{a}_m B_0(s_0) - \phi_m(\boldsymbol{x}), \quad \phi_m(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega). \tag{6.8}$$

Соединяя (3.5ψ), (6.8), устанавливаем неравенство (5.4).

Кроме того, ввиду (3.4ψ), справедливо (3.4). Согласно теореме 5.1 существует $w^m \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ обобщенное решение задачи (6.3), (5.2).

Шаг 2. Рассмотрим функцию $T_{k,h}(r) = T_k(r - T_h(r))$. Очевидно,

$$T_{k,h}(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r| < h, \\ r - h \operatorname{sign} r & \text{при } h \leqslant |r| < k + h, \\ k \operatorname{sign} r & \text{при } |r| \geqslant k + h. \end{cases}$$

Положив в (6.6) $v = T_{k,h}w^m$, учитывая (6.5), будем иметь

$$\begin{gathered}\int\limits_{\{\Omega : h \leqslant |w^m| < k+h\}} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) \cdot \nabla w^m d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega : |w^m| \geqslant k+h\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} + \\ + \int\limits_{\{\Omega : h \leqslant |w^m| < k+h\}} \big(b^m(\boldsymbol{x}, w^m) + B_0'(w^m)/m\big)\,(w^m - h \operatorname{sign} w^m) d\boldsymbol{x} \leqslant k \int\limits_{\{\Omega : |w^m| \geqslant h\}} |A^m_{0\psi}| d\boldsymbol{x}.\end{gathered} \tag{6.9}$$

Ввиду (6.5) для $h \leqslant |w^m|$ справедливо неравенство $(b^m(\boldsymbol{x}, w^m) + B_0'(w^m)/m)(w^m - h \operatorname{sign} w^m) \geqslant 0$. Учитывая это, из (6.9) выводим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\{\Omega : h \leqslant |w^m| < k+h\}} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) \cdot \nabla w^m d\boldsymbol{x} + \\ + k \int\limits_{\{\Omega : |w^m| \geqslant k+h\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant k \int\limits_{\{\Omega : |w^m| \geqslant h\}} |A^m_{0\psi}| d\boldsymbol{x}.\end{gathered} \tag{6.10}$$

Применяя (3.5ψ), учитывая (6.2), неравенство (6.10) приводим к виду:

$$\overline{a}_\psi \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |w^m|<k+h\}} \mathrm{B}(\nabla w^m) d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega: |w^m|\geqslant k+h\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant \tag{6.11}$$

$$\leqslant k \int\limits_{\{\Omega: |w^m|\geqslant h\}} |A_{0\psi}^m| d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |w^m|<k+h\}} \phi_\psi d\boldsymbol{x} \leqslant k\|A_{0\psi}^0\|_1 + \|\phi_\psi\|_1.$$

Теперь в качестве пробной функции в (6.6) возьмем $T_k w^m$, получим

$$\int\limits_\Omega \{\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)\cdot \nabla T_k w^m + (A_{0\psi}^m(\boldsymbol{x}) + b^m(\boldsymbol{x}, w^m) + B_0'(w^m)/m) T_k w^m\} = 0.$$

Применяя (6.2), (6.5), выводим

$$\int\limits_{\{\Omega: |w^m|<k\}} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)\cdot \nabla w^m d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega: |w^m|\geqslant k\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant k\|A_{0\psi}^m\|_1 \leqslant k\|A_{0\psi}^0\|_1.$$

Отсюда, используя неравенство (3.5ψ), получаем

$$\overline{a}_\psi \int\limits_{\{\Omega: |w^m|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w^m) d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega: |w^m|\geqslant k\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant \tag{6.12}$$

$$\leqslant k\|A_{0\psi}^0\|_1 + \|\phi_\psi\|_1.$$

Согласно (6.4), (3.9ψ), имеем:

$$\sup_{|w^m|\leqslant k} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big) \leqslant \sup_{|w^m|\leqslant k} \big(|b_\psi(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|\big) \leqslant \tag{6.13}$$

$$\leqslant G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x}) + |B_0'(k)| \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Соединяя (6.12), (6.13), приходим к выводу, что для любого компакта $Q\subset\Omega$ справедливы неравенства:

$$\|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)\|_{1,Q} + \|B_0'(w^m)\|_{1,Q}/m \leqslant C_1, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.14}$$

Докажем, что

$$\|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)\|_1 \leqslant C_2, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.15}$$

Выбирая в (6.12) $k = \delta_0$ (δ_0 из (3.10ψ)), получим

$$\int\limits_{\{\Omega: |w^m|\geqslant \delta_0\}} |b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| d\boldsymbol{x} \leqslant C_3, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.16}$$

Из (6.4), (3.10ψ) имеем:

$$\int\limits_{\{\Omega: |w^m|<\delta_0\}} |b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{\{\Omega: |w^m|<\delta_0\}} |b_\psi(\boldsymbol{x}, w^m)| d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\{\Omega: 0\leqslant w^m<\delta_0\}} b_\psi(\boldsymbol{x}, \delta_0) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{\Omega: -\delta_0< w^m<0\}} |b_\psi(\boldsymbol{x}, -\delta_0)| d\boldsymbol{x} \leqslant C_4. \tag{6.17}$$

Соединяя (6.16), (6.17), выводим (6.15).

Шаг 3. Из (6.12) для любого $k>0$ следует оценка:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{B}(\nabla T_k w^m) d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\{\Omega: |w^m|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w^m) d\boldsymbol{x} \leqslant kC_5 + C_6, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.18}$$

Отсюда, согласно лемме 4.2, имеем:
$$\mathrm{mes}(\{\Omega : |w^m| \geqslant k\}) \to 0 \quad \text{равномерно по } m, \quad k \to \infty. \tag{6.19}$$

Установим сходимость:
$$w^m \to w \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{6.20}$$

Из оценки (6.18), применяя (2.5), выводим:
$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{B}(\nabla(\eta_R(|\boldsymbol{x}|)T_k w^m))d\boldsymbol{x} \leqslant c \int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w^m)d\boldsymbol{x} + c\int\limits_{\Omega} \mathrm{B}(T_k w^m \nabla \eta_R(|\boldsymbol{x}|))d\boldsymbol{x} \leqslant C_7(k, R).$$

Отсюда при любых фиксированных $k, R > 0$ следует ограниченность множества $\{\eta_R T_k w^m\}$ в $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega(R+1))$. Для N-функции $M \prec\prec B_*$, согласно лемме 4.7, имеем компактность вложения $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega(R+1)) \subset L_M(\Omega(R+1))$. Таким образом, для любых фиксированных $k, R > 0$ установлена выборочная сходимость $\eta_R T_k w^m \to v$ в $L_M(\Omega(R+1))$ при $m \to \infty$. Отсюда следует сходимость $T_k w^m \to v$ в $L_M(\Omega(R))$, а также выборочная сходимость $T_k w^m \to v$ почти всюду в $\Omega(R)$ при $m \to \infty$ для $k = 1, 2, \ldots$. Диагональным процессом устанавливается, что найдется измеримая функция $w : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $v = T_k w$ и $w^m \to w$ почти всюду в $\Omega(R)$ для любого $R > 0$. Отсюда следует сходимость (6.20).

Из сходимости $w^m \to w$ почти всюду в $\Omega(R)$ для любого $R > 0$ следует локальная сходимость по мере, а значит и локальная фундаментальность w^m по мере:
$$\mathrm{mes}\{\Omega(R) : |w^m - w^l| \geqslant \nu\} \to 0 \quad \text{при} \quad m, l \to \infty \quad \text{для любого} \quad \nu > 0. \tag{6.21}$$

Шаг 4. Из (6.18), (3.3ψ) при любом $k > 0$ имеем оценку:
$$\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m))\chi(|w^m| < k)\|_1 \leqslant C_8(k), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.22}$$

Из неравенств (6.18), согласно лемме 4.3, имеем:
$$\mathrm{mes}\{\Omega : \mathrm{B}(\nabla w^m) \geqslant \rho\} \to 0 \quad \text{равномерно по} \quad m, \quad \rho \to \infty. \tag{6.23}$$

Сначала установим сходимость:
$$\nabla w^m \to \nabla w \quad \text{локально по мере}, \quad m \to \infty. \tag{6.24}$$

Рассмотрим множество
$$E_{\nu,\theta,\rho}(R) =$$
$$= \{\Omega(R) : |w^l - w^m| < \nu,\ \mathrm{B}(\nabla w^l) \leqslant \rho,\ \mathrm{B}(\nabla w^m) \leqslant \rho,\ |w^l| \leqslant \rho,\ |w^m| \leqslant \rho,\ |\nabla(w^l - w^m)| \geqslant \theta\}.$$

Поскольку справедливо вложение
$$\{\Omega(R) : |\nabla(w^l - w^m)| \geqslant \theta\} \subset \{\Omega : \mathrm{B}(\nabla w^l) > \rho\} \cup \{\Omega : \mathrm{B}(\nabla w^m) > \rho\} \cup$$
$$\{\Omega(R) : |w^l - w^m| \geqslant \nu\} \cup \{\Omega : |w^l| > \rho\} \cup \{\Omega : |w^m| > \rho\} \cup E_{\nu,\theta,\rho}(R),$$

то, в силу (6.19), (6.23), выбором ρ добьемся неравенств
$$\mathrm{mes}\{\Omega(R) : |\nabla(w^l - w^m)| \geqslant \theta\} < \tag{6.25}$$
$$< 4\varepsilon + \mathrm{mes}\, E_{\nu,\theta,\rho}(R) + \mathrm{mes}\{\Omega(R) : |w^l - w^m| \geqslant \nu\}, \quad m, l = 1, 2, \ldots.$$

По условию (3.4ψ) и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(\boldsymbol{x}) > 0$ почти всюду в Ω такая, что при $\mathrm{B}(\boldsymbol{s}) \leqslant \rho$, $\mathrm{B}(\boldsymbol{t}) \leqslant \rho$, $|s_0| \leqslant \rho$, $|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}| \geqslant \theta$ справедливо неравенство
$$(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{t})) \cdot (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}) \geqslant \gamma(\boldsymbol{x}). \tag{6.26}$$

Введем обозначение $A_0^m(\boldsymbol{x}) = A_{0\psi}^m(\boldsymbol{x}) + b^m(\boldsymbol{x}, w^m) + B_0'(w^m)/m$, из (6.2), (6.14) следует ограниченность $A_0^m(\boldsymbol{x})$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ равномерно по m. Запишем (6.6) дважды для w^m и w^l и вычтем из первого второе, получим
$$\Big[(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)) \cdot \nabla v + (A_0^m - A_0^l)v\Big] = 0.$$

Подставляя пробную функцию $v = \eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m - w^l)$, устанавливаем

$$\Big[(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)) \cdot \nabla(\eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m - w^l))\Big] =$$
$$= -\Big[(A_0^m - A_0^l)\eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m - w^l)\Big] \leqslant C_9(R)\nu. \tag{6.27}$$

Далее, применяя (6.26), выводим

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)} \gamma(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)} \Big(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^l)\Big) \cdot \nabla(w^m - w^l)d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{|w^m - w^l| < \nu} \eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^l)) \cdot \nabla(w^m - w^l)d\boldsymbol{x} =$$
$$= \int\limits_{|w^m - w^l| < \nu} \eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)) \cdot \nabla(w^m - w^l)d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \int\limits_{|w^m - w^l| < \nu} \eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^l)) \cdot \nabla(w^m - w^l)d\boldsymbol{x} =$$
$$= I_1 + I_2. \tag{6.28}$$

Для оценки I_1 используем (6.27), (2.1)

$$I_1 \leqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_{|w^m| < \rho+1, |w^l| < \rho+1, |\boldsymbol{x}| < R+1} (|a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)| + |a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)|)|T_\nu(w^m - w^l)|d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_{\rho < |w^l| < \rho+1, |w^m| < \rho+1} (|a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)| + |a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)|)|w^l_{x_i}||T_\nu(w^m - w^l)|d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_{\rho < |w^m| < \rho+1, |w^l| < \rho+1} (|a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)| + |a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)|)|w^m_{x_i}||T_\nu(w^m - w^l)|d\boldsymbol{x} +$$
$$+ C_9(R)\nu \leqslant \nu(3\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m))\chi(|w^m| < \rho + 1)\|_1 +$$
$$+ 3\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l))\chi(|w^l| < \rho + 1)\|_1 +$$
$$+ 2\|\mathrm{B}(\nabla w^m)\chi(|w^m| < \rho + 1)\|_1 + 2\|\mathrm{B}(\nabla w^l)\chi(|w^l| < \rho + 1)\|_1 + C_{10}(R)).$$

Применяя (6.12), (6.22), выводим

$$I_1 \leqslant C_{11}(R, \rho)\nu. \tag{6.29}$$

Для $m, l \geqslant \rho+1$ из $|w^l| < \rho+1, |w^m| < \rho+1$, $|w^m - w^l| < \nu$ следует $|T_m w^m - T_l w^l| < \nu$. Применяя условие гельдеровости (3.6ψ) и неравенства (2.1), (2.5), для $m, l \geqslant \rho + 1$ имеем

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{|w^m - w^l| < \nu, |w^l| < \rho+1, |w^m| < \rho+1} |w^m - w^l|^\alpha \sum_{i=1}^n \overline{B}_i^{-1}(C_{12}(R, \rho)\mathrm{B}(\nabla w^l + \nabla\psi))(|w^m_{x_i}| + |w^l_{x_i}|)d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant \nu^\alpha C_{13} \int\limits_{|w^l| < \rho+1, |w^m| < \rho+1} \Big(\mathrm{B}(\nabla w^l) + \mathrm{B}(\nabla w^m) + \mathrm{B}(\nabla\psi)\Big)\, d\boldsymbol{x}.$$

Учитывая (6.12), устанавливаем оценку

$$|I_2| \leqslant C_{14}(R, \rho)\nu^\alpha, \quad m, l \geqslant \rho + 1. \tag{6.30}$$

Соединяя (6.28) – (6.30), выводим

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)} \gamma(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leqslant C_{15}(R,\rho)\nu^{\alpha}, \quad \nu\in(0,1].$$

Для любого $\delta>0$ при фиксированных R,ρ выбором ν можно добиться оценки $C_{15}(R,\rho)\nu^{\alpha}<\delta$.

Применяя лемму 4.8, для любого $\varepsilon>0$ устанавливаем неравенство

$$\operatorname{mes} E_{\nu,\theta,\rho}(R)<\varepsilon, \quad m,l\geqslant m_1. \tag{6.31}$$

Кроме того, согласно (6.21), можно выбрать $m_2(\nu,R)$ такое, что

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R):|w^l-w^m|\geqslant\nu\}<\varepsilon, \quad m,l\geqslant m_2. \tag{6.32}$$

Соединяя (6.25), (6.31), (6.32), в итоге выводим неравенство

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R):|\nabla(w^l-w^m)|\geqslant\theta\}<6\varepsilon, \quad m,l\geqslant m_0=\max\{m_1,m_2\}.$$

Отсюда следует фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla w^m\}$ на множестве $\Omega(R)$ при любом $R>0$, это влечет (6.24), а также выборочную сходимость:

$$\nabla w^m\to\nabla w \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m\to\infty. \tag{6.33}$$

Шаг 5. Докажем, что

$$b^m(\boldsymbol{x},w^m)\to b_{\psi}(\boldsymbol{x},w) \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad m\to\infty, \tag{6.34}$$

$$b^m(\boldsymbol{x},w^m)\to b_{\psi}(\boldsymbol{x},w) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m\to\infty. \tag{6.35}$$

Из (6.11) при $h=k$ имеем:

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant 2k\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x},w^m)|+|B_0'(w^m)|/m\big)\,d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant k\}} |A^m_{0\psi}-A^0_{0\psi}|d\boldsymbol{x}+$$

$$+\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant k\}} |A^0_{0\psi}|d\boldsymbol{x}+\frac{1}{k}\int\limits_{\{\Omega:k\leqslant|w^m|<2k\}} \phi_{\psi}d\boldsymbol{x}.$$

Ввиду того, что $A^0_{0\psi},\ \phi_{\psi}\in L_1(\Omega)$, сходимости (6.1) и абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства, учитывая (6.19), для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать достаточно большое k такое, что:

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant 2k\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x},w^m)|+|B_0'(w^m)|/m\big)\,d\boldsymbol{x}<\varepsilon, \quad m=1,2,\ldots. \tag{6.36}$$

Из непрерывности $b_{\psi}(\boldsymbol{x},s_0)$ по s_0 и сходимости $w^m\to w$ почти всюду в Ω следует сходимость (6.35).

Теперь установим фундаментальность последовательности $\{b^m(\boldsymbol{x},w^m)\}$ в пространстве $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$: для любого компакта $Q\subset\Omega$

$$\int\limits_{Q}|b^m(\boldsymbol{x},w^m)-b^l(\boldsymbol{x},w^l)|d\boldsymbol{x}\to 0, \quad m,l\to\infty. \tag{6.37}$$

Для этого введем обозначение $\Delta^{ml}(\boldsymbol{x})=|b^m(\boldsymbol{x},w^m)-b^l(\boldsymbol{x},w^l)|$ и запишем соотношение:

$$\int\limits_{Q}\Delta^{ml}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int\limits_{\{Q:|w^m|\geqslant 2k,|w^l|\geqslant 2k\}}\Delta^{ml}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\{Q:|w^m|<2k,|w^l|<2k\}}\Delta^{ml}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+$$

$$+\int\limits_{\{Q:|w^m|<2k,|w^l|\geqslant 2k\}}\Delta^{ml}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\{Q:|w^m|\geqslant 2k,|w^l|<2k\}}\Delta^{ml}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Согласно (6.36), для любого $\varepsilon>0$ за счет выбора k справедлива оценка $I_1<2\varepsilon$ равномерная по m и l.

Применяя (6.35), (6.13) и теорему Лебега, выбором m_0 можно установить неравенство

$$I_2 \leqslant \int\limits_{\{Q:|w^m|<2k,|w^l|<2k\}} \Delta^{ml}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < \varepsilon, \quad m,l > m_0.$$

Оценим интеграл I_3. Для области интегрирования в I_3 справедливо вложение:

$$\{Q : |w^m| < 2k, |w^l| \geqslant 2k\} \subset \{Q : |w^m| \geqslant k, |w^l| \geqslant 2k\} \cup \{Q : |w^m| < k, |w^l| \geqslant 2k\}.$$

Согласно (6.36), выбором k можно установить оценки:

$$I_{31} = \int\limits_{\{Q:|w^m|\geqslant k,|w^l|\geqslant 2k\}} |b^m(\boldsymbol{x}, w^m) - b^l(\boldsymbol{x}, w^l)|d\boldsymbol{x} < 2\varepsilon,$$

$$I_{32} = \int\limits_{\{Q:|w^m|<k,|w^l|\geqslant 2k\}} |b^m(\boldsymbol{x}, w^m) - b^l(\boldsymbol{x}, w^l)|d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{\{Q:|w^m|<k,|w^l|\geqslant 2k\}} G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \varepsilon,$$

равномерные по m,l. Поскольку $\operatorname{mes}\{Q : |w^m| < k, |w^l| \geqslant 2k\} \to \operatorname{mes}\{Q : |w| \leqslant k, |w| \geqslant 2k\} = 0$ при $k,l \to \infty$, то, ввиду $G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x}) \in L_1(Q)$ и абсолютной непрерывности интеграла, выбором m_0 можно установить неравенство

$$\int\limits_{\{Q:|w^m|<k,|w^l|\geqslant 2k\}} G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < \varepsilon, \quad m,l \geqslant m_0.$$

Таким образом $I_3 < 4\varepsilon$ для $m,l \geqslant m_0$. Интеграл I_4 оценивается аналогичным образом.

Соединяя оценки для $I_i,\ i = 1,2,3,4$, устанавливаем (6.37). Ввиду полноты пространства $L_1(Q)$ найдется функция $v \in L_1(Q)$ такая, что

$$b^m(\boldsymbol{x}, w^m) \to v \quad \text{в} \quad L_1(Q), \quad m \to \infty. \tag{6.38}$$

Кроме того, $b^m(\boldsymbol{x}, w^m) \to v,\ m \to \infty$, выборочно почти всюду в Ω. Отсюда, ввиду сходимости (6.35), следует, что $v(\boldsymbol{x}) = b_\psi(\boldsymbol{x}, w)$ почти всюду в Ω. Таким образом, сходимость (6.34) доказана.

Далее, установим сходимости:

$$B_0'(w^m)/m \to 0 \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m \to \infty, \tag{6.39}$$

$$B_0'(w^m)/m \to 0 \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{6.40}$$

Согласно (6.36), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать k так, что:

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant 2k\}} |B_0'(w^m)|/md\boldsymbol{x} < \varepsilon, \quad m = 1,2,\ldots.$$

Кроме того, выбором m_0 можно добиться неравенства:

$$\int\limits_{\{Q:|w^m|<2k\}} |B_0'(w^m)|/md\boldsymbol{x} \leqslant |B_0'(2k)|/m \operatorname{mes} Q < \varepsilon, \quad m \geqslant m_0.$$

Из последних оценок следует сходимость (6.40), которая влечет (6.39).

Из оценки (6.15), ввиду (6.35), согласно теореме Фату следует, что $b_\psi(\boldsymbol{x}, w) \in L_1(\Omega)$, отсюда вытекает справедливость условия 1ψ) определения 1ψ.

Шаг 6. Покажем, что $T_k w \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ для любого $k > 0$. Соединяя (6.18), (2.7) для любого фиксированного $k > 0$ выводим оценку

$$\|T_k w^m\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)} = \|\nabla T_k w^m\|_{\mathrm{B}} \leqslant C_{17}(k), \quad m = 1,2,\ldots.$$

Рефлексивность пространства $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ позволяет выделить слабо сходящуюся в $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ подпоследовательность $T_k w^m \rightharpoonup v,\ m \to \infty$, причем $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$. Непрерывность естественного отображения $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \to \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega)$ влечет слабую сходимость

$$\nabla T_k w^m \rightharpoonup \nabla v \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{6.41}$$

Пользуясь сходимостями (6.20), (6.33), для любого фиксированного $k>0$ устанавливаем

$$\nabla T_k w^m \to \nabla T_k w \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m\to\infty.$$

Отсюда, применяя лемму 4.4, имеем слабую сходимость

$$\nabla T_k w^m \rightharpoonup \nabla T_k w \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega), \quad m\to\infty. \tag{6.42}$$

Из (6.41), (6.42) следует равенство $v=T_k w\in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$.

Шаг 7. Чтобы доказать неравенство (3.11ψ) возьмем функции $T\in\mathcal{F}$, $\xi\in C_0^\infty(\Omega)$ и применим пробную функцию $v=T(w^m-\xi)$ в тождестве (6.6). Получим

$$J=[\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)\cdot\nabla T(w^m-\xi)]=-[\big(b^m(\boldsymbol{x},w^m)+B_0'(w^m)/m+A^m_{0\psi}\big)\,T(w^m-\xi)]=-I. \tag{6.43}$$

Левый интеграл можно записать в виде

$$J=[\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)\cdot\nabla w^m T'(w^m-\xi)-\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)\cdot\nabla\xi T'(w^m-\xi)]=J_1-J_2. \tag{6.44}$$

Из сходимостей $w^m\to w$, $T_m w^m\to w$, $\nabla w^m\to\nabla w$ почти всюду в Ω (см. (6.20), (6.33)), ввиду непрерывности функций $\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})$ по $s_0,\boldsymbol{s}$, $T'(r)$, имеем:

$$\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)T'(w^m-\xi)\to\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)T'(w-\xi) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m\to\infty.$$

Отсюда, по лемме Фату имеем:

$$[\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\cdot\nabla w T'(w-\xi)d]\leqslant\lim_{m\to\infty}\inf J_1. \tag{6.45}$$

Из (6.22) следует ограниченность последовательности норм

$$\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)T'(w^m-\xi))\|_1\leqslant$$
$$\leqslant C_{18}\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m))\chi(|w^m|\leqslant k+\|\xi\|_\infty)\|_1\leqslant C_{19}, \quad m=1,2,\ldots.$$

Применяя лемму 4.4, устанавливаем слабую сходимость:

$$\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)T'(w^m-\xi)\rightharpoonup\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)T'(w-\xi) \quad \text{в} \quad L_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega), \quad m\to\infty.$$

Выполняя предельный переход в J_2 имеем:

$$\lim_{m\to\infty}J_2=[\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\cdot\nabla\xi T'(w-\xi)]. \tag{6.46}$$

Интеграл I также разобьем на два слагаемых. Первый интеграл

$$I_1=[\big(b^m(\boldsymbol{x},w^m)+B_0'(w^m)/m\big)\,T(w^m-\xi)]$$

оценивается следующим образом. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{K^l\}$ компактных подмножеств Ω таких, что $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}K^l=\Omega$. Пусть $\operatorname{supp}\xi\subset K^l$, $l\geqslant l_0$, $v^m=w^m-\xi$, $v=w-\xi$, $c^m(\boldsymbol{x},w^m)=b^m(\boldsymbol{x},w^m)+B_0'(w^m)/m$, тогда, учитывая (6.5), при $l\geqslant l_0$ имеем:

$$I_1=\int\limits_{\Omega\setminus K^l}c^m(\boldsymbol{x},w^m)T(w^m)d\boldsymbol{x}+\int\limits_{K^l}c^m(\boldsymbol{x},w^m)T(v^m)d\boldsymbol{x}\geqslant\int\limits_{K^l}c^m(\boldsymbol{x},w^m)T(v^m)d\boldsymbol{x}=\overline{I}_1.$$

Рассмотрим интеграл

$$\widetilde{I}_1=\int\limits_{K^l}(b_\psi(\boldsymbol{x},w)T(v)-c^m(\boldsymbol{x},w^m)T(v^m))d\boldsymbol{x}=\int\limits_{K^l}(b_\psi(\boldsymbol{x},w)-c^m(\boldsymbol{x},w^m))T(v)d\boldsymbol{x}+$$
$$+\int\limits_{K^l}c^m(\boldsymbol{x},w^m)(T(v)-T(v^m))d\boldsymbol{x}=\widetilde{I}_{11}+\widetilde{I}_{12}.$$

В силу сходимостей (6.34), (6.40) интеграл $\widetilde{I}_{11} \to 0$ при $m \to \infty$. Для $\widetilde{I}_{12}$ имеем:

$$\widetilde{I}_{12} = \int\limits_{\{K^l:|w^m|\geqslant L\}} c^m(\boldsymbol{x}, w^m)(T(v) - T(v^m))d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{K^l:|w^m|<L\}} c^m(\boldsymbol{x}, w^m)(T(v) - T(v^m))d\boldsymbol{x} = \\ = \widetilde{I}_{121} + \widetilde{I}_{122}.$$

В силу (6.36) выбором большого L получим неравенство $|\widetilde{I}_{121}| < \varepsilon$ (равномерно по m). А для фиксированного L, ввиду (6.13), применяя теорему Лебега находим, что $|\widetilde{I}_{122}| < \varepsilon$ при $m \geqslant m_0$.

Итак, $\widetilde{I}_1 \to 0$ при $m \to \infty$, поэтому

$$\int\limits_{K^l} b_\psi(\boldsymbol{x}, w)T(w - \xi)d\boldsymbol{x} = \lim_{m\to\infty} \overline{I}_1 \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf I_1. \tag{6.47}$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, заменяем K_l на Ω.

Применяя (6.1), (6.2), пользуясь теоремой Лебега, выполняем предельный переход при $m \to \infty$ во втором интеграле, получаем

$$I_2 = [A^m_{0\psi} T(w^m - \xi)d] \to [A^0_{0\psi} T(w - \xi)]. \tag{6.48}$$

Соединяя (6.43) – (6.48) выводим (3.11ψ).

□

Пример 6.1. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} (g_i(u - \psi)B'_i(u_{x_i} - \psi_{x_i}) + f_i(\boldsymbol{x}))_{x_i} - g_0(u - \psi)\varphi(\boldsymbol{x}) - f_0(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{6.49}$$

с непрерывно дифференцируемыми N–функциями $B_1(z), \ldots, B_n(z)$, удовлетворяющими Δ_2–условию, такими, что $B'_1(z), \ldots, B'_n(z)$ строго монотонны при $z \geqslant 0$ и справедливо (2.11). Функции $g_i(z),\ z \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n,$ — неубывающие, непрерывные, кроме того $g_i(z),\ i = 1, \ldots, n,$ липшицевы, положительные, ограничены снизу. Если $f_i(\boldsymbol{x}) \in L_{\overline{B}_i}(\Omega),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ f_0(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega),$ то для функций

$$a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = g_i(s_0 - \psi)B'_i(s_i - \psi_{x_i}) + f_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad a_0(\boldsymbol{x}, s_0) = g_0(s_0 - \psi)\varphi(\boldsymbol{x}) + f_0(\boldsymbol{x}),$$

выполнены условия (3.3)–(3.7), (3.9). Согласно теореме 3.1 существует решение задачи (6.49), (1.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалевский А. А.* Априорные свойства решений нелинейных уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L_1-данными// Совр. мат. Фундам. напр. — 2006. – *16*, — С. 47–67.
2. *Кожевникова Л. М., Хаджи А. А.* О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях// Вестн. Самарск. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2015. — № 19. — С. 44–62.
3. *Кожевникова Л. М., Хаджи А. А.* Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 8. — С. 99–126.
4. *Королев А. Г.* Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева—Орлича// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1983. — № 1. — С. 32–37.
5. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81 (123)*, № 2. — С. 228–255.
6. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
7. *Рутицкий Я. Б., Красносельский М. А.* Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Физматлит, 1958.
8. *Aharouch L., Benkirane A., Rhoudaf M.* Strongly nonlinear elliptic variational unilateral problems in Orlicz space// Abstr. Appl. Anal. — 2006. — *2006*. — Article ID 46867; `http://dx.doi.org/10.1155/AAA/2006/46867`

9. *Aharouch L., Bennouna J., Touzani A.* Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces// Rev. Mat. Complut. — 2009. — *22*, № 1. — С. 91–110.
10. *Bendahmane M., Karlsen K.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in R^n with advection and lower order terms and locally integrable data// Potential Anal. — 2005. — *22*, № 3. — С. 207–227.
11. *Benilan P., Boccardo L., Galluet T., Pierre M., Vazquez J. L.* An L_1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. Class. Sci. — 1995. — *22*, № 2. — С. 241–273.
12. *Benkirane A., Bennouna J.* Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces// Abstr. Appl. Anal. — 2002. — *7*, № 2. — С. 85–102.
13. *Boccardo L.* Some nonlinear Dirichlet problems in L_1 involving lower order terms in divergence form// Pitman Res. Notes Math. Ser. V. — 1996. — *350*. — С. 43–57.
14. *Boccardo L., Gallouet T.* Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures// Commun. Partial Differ. Eqs. — 1992. — *17*, №№ 3–4. — С. 641–655.
15. *Boccardo L., Gallouet T., Marcellini P.* Anisotropic equations in L_1// Differ. Integral Eqs. — 1996. — *9*, № 1. — С. 209–212.
16. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Nonlinear elliptic equations in R^n without growth restrictions on the data// J. Differ. Eqs. — 1993. — *105*, № 2. — С. 334–363.
17. *Brezis H.* Semilinear equations in R_N without condition at infnity// Appl. Math. Optim. — 1984. — *12*, № 3. — С. 271–282.
18. *Browder F. E.* Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1977. — *74*, № 7. — С. 2659–2661.
19. *Gossez J. P.* Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients// Trans. Am. Math. Soc. — 1974. — *190*. — С. 163–206.
20. *Gwiazda P., Wittbold P., Wróblewska A., Zimmermann A.* Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces/ Ph.D. programme: Mathematical methods in natural sciences. — 2011. — Preprint № 2011-013.

Л. М. Кожевникова
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета;
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета
E-mail: `kosul@mail.ru`