Д. В. Карпов, Дерево разбиения двусвязного графа, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2013, том 417, 86–105

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 417, 2013 г.

Д. В. Карпов

ДЕРЕВО РАЗБИЕНИЯ ДВУСВЯЗНОГО ГРАФА

§1. Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Для множества и количества рёбер графа G мы будем применять обозначения $E(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а максимальную степень вершины графа G обозначим через $\Delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Через $\chi(G)$ мы обозначаем хроматическое число графа G, то есть, наименьшее количество цветов в правильной раскраске вершин графа G.

Индуцированный подграф графа G на множестве вершин $U \subset V(G)$ мы будем обозначать через $G(U)$.

Перед тем, как объяснить, что мы хотим сделать в этой работе, напомним классические понятия блока и точки сочленения связного графа, а также ряд их свойств.

Определение 1. 1) *Пусть $X, Y \subset V(G)$, $R \subset V(G) \cup E(G)$. Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.*

2) *Пусть $x, y \in V(G)$, $xy \notin E(G)$. Через $G + xy$ мы обозначим граф G, к которому добавлено ребро xy.*

Определение 2. *Пусть G – связный граф. Вершина $a \in V(G)$ называется точкой сочленения графа G, если граф $G - a$ несвязен.*

Блоком называется любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

Ключевые слова: связность, двусвязный граф, разбиение, блоки.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-3229.2012.1 и гранта РФФИ No. 11-01-00760-а.

Блоки и точки сочленения – классические понятия, а также важнейший инструмент работы с графами, с помощью которого доказано множество фактов, причем не только из теории связности. В доказательствах часто используется дерево блоков и точек сочленения, которое мы сейчас определим.

Определение 3. *Дерево блоков и точек сочленения графа G – это двудольный граф $B(G)$, вершины одной доли которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \dots, a_n$ графа G, а другой – всем его блокам $B_1, \dots, B_n$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j смежны, если и только если $a_i \in V(B_j)$.*

Несложно доказать, что дерево блоков и точек сочленения – это действительно дерево, все висячие вершины которого соответствуют блокам (доказательство можно найти, например, в [7]). Именно структура дерева помогает работать с блоками и точками сочленения.

Поэтому неоднократно возникали и возникают попытки построения для графов большей связности структуры, аналогичной по своим свойствам дереву блоков и точек сочленения. В 1966 году Татт [4] построил дерево, отображающее структуру расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе.

Мы предложим наш взгляд на эту проблему и построим *дерево разбиения* для двусвязного графа, а также в более общем случае – для набора из попарно независимых разделяющих множеств в k-связном графе. В целом наша конструкция похожа на дерево, построенное Таттом, но мы используем другие средства для описания структуры – понятие *части разбиения*, придуманное в [10].

В результате мы получим дерево, которое несколько более похоже на классическое дерево блоков и точек сочленения. Важно не только построить структуру, но и показать, как она применяется. Удивительно, но структура Татта практически не нашла применения за столько лет. Возможно, мало кто разобрался в соответствующем разделе книги Татта. Мы применим дерево разбиения двусвязного графа для оценки его хроматического числа. С помощью дерева разбиения мы поймем, как выглядят *критические* двусвязные графы. Перед формулировкой результатов дадим основные определения.

1.1. Основные определения. Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

Определение 4. *Пусть* $R \subset V(G)$.

1) *Назовем множество* R *разделяющим, если граф* $G - R$ *несвязен. Обозначим через* $\mathfrak{R}(G)$ *набор, состоящий из всех разделяющих множеств графа* G, *а через* $\mathfrak{R}_k(G)$ – *набор, состоящий из всех* k*-вершинных разделяющих множеств графа* G.

2) *Пусть* $X, Y \subset V(G)$, $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. *Будем говорить, что* R *отделяет множество* X *от множества* Y, *если никакие две вершины* $v_x \in X$ *и* $v_y \in Y$ *не лежат в одной компоненте связности графа* $G - R$.

3) *Будем говорить, что* R *разделяет множество* $X \subset V(G)$, *если не все вершины множества* $X \setminus R$ *лежат в одной компоненте связности графа* $G - R$.

4) *Граф* G *называется* k*-связным, если* $v(G) > k$ *и он остается связным при удалении любого множества из не более чем* $k - 1$ *вершины.*

Определенные выше точки сочленения – это как раз одновершинные разделяющие множества.

Определение 5. *Пусть* G – k*-связный граф. Назовем множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми, если* S *не разделяет* T *и* T *не разделяет* S. *В противном случае мы будем называть эти множества зависимыми.*

К сожалению, разделяющие множества, состоящие из $k \geqslant 2$ вершин, могут быть зависимыми. Именно с этим связаны основные трудности в изучении k-связных графов при $k \geqslant 2$. В работах [6, 9] доказано, что для множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо они независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта – очень простое.

1.2. Основные результаты. Именно наличие пар зависимых множеств мешает построить на множествах из $\mathfrak{R}_k(G)$ и частях из $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$ отображающее их структуру дерево, похожее на дерево блоков и точек сочленения. Главная причина – для зависимых множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ не существует части $A \in \mathrm{Part}(S)$, содержащей множество T. Однако, похожую на дерево блоков и точек сочленения структуру можно построить для набора из попарно независимых множеств, что мы покажем далее. Частным случаем этой конструкции будет дерево разбиения двусвязного графа.

Следующие результаты подчеркнут аналогию между классическими двусвязными блоками связного графа и частями разбиения двусвязного графа.

Очевидно, несвязный граф планарен тогда и только тогда, когда планарен индуцированный подграф на каждой из его компонент связности. Понятно, что связный граф планарен тогда и только тогда, когда планарен любой его блок. В 1937 году Маклейн [1] исследовал процесс разбиения двусвязного графа на *атомы* и показал с помощью теоремы Куратовского о характеризации непланарных графов, что двусвязный граф планарен тогда и только тогда, когда планарны все его атомы. Мы покажем связь между частями двусвязного графа и атомами и переформулируем теорему Маклейна в наших терминах. Отметим, что для критерия планарности нужны именно части разбиения, а не дерево разбиения, отображающее структуру их взаимного расположения.

Понятно, что хроматическое число связного графа равно максимуму хроматических чисел его двусвязных блоков. В разделе 5 мы докажем верхние оценки на хроматическое число графа через хроматические числа его подграфов, индуцированных на частях разбиения.

Списочные раскраски (list colorings) появились относительно недавно и являются сейчас весьма популярным объектом для исследований. Каждой вершине графа $v \in V(G)$ ставится в соответствие список $L(v)$ из k цветов, после чего рассматривается правильная раскраска вершин, в которой каждая вершина v должна быть покрашена в цвет из списка $L(v)$. Минимальное такое натуральное число k, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G, обозначется через $\mathrm{ch}(G)$ (и носит название choice number). Очевидно, $\mathrm{ch}(G) \geqslant \chi(G)$. С помощью дерева разбиения мы докажем оценку и на $\mathrm{ch}(G)$.

Кроме того, с помощью дерева разбиения двусвязного графа мы докажем несколько фактов о структуре критических двусвязных графов.

Определение 6. *k-связный граф G с $v(G) \geqslant k+2$ называется критическим, если для любой вершины $x \in V(G)$ граф $G-x$ не является k-связным.*

Критические k-связные графы исследовались в работах [2, 3], В [3] было доказано, что критический k-связный граф обязательно содержит хотя бы две вершины степени менее $\frac{3k-1}{2}$. Для двусвязных графов это означает наличие двух вершин степени 2. С помощью нашей конструкции дерева разбиения мы легко докажем, что в критическом двусвязном графе на не менее чем 4 вершинах есть хотя бы 4 вершины степени 2. Отметим, что этот факт можно было бы несложно доказать и с помощью конструкции Татта [4], однако ранее этого сделано не было. Кроме того, мы опишем структуру критических двусвязных графов, в которых ровно 4 вершины степени 2.

1.3. Части разбиения, граница и внутренность. Следующие понятия, определенные в [10], удобны для описания взаимного расположения разделяющих множеств в графе.

Определение 7. *Пусть $\mathfrak{S}$ – набор из нескольких разделяющих множеств графа G.*

1) *Множество $A \subset V(G)$ назовем частью $\mathfrak{S}$-разбиения, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.*

Множество всех частей разбиения графа G набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *(В случае, когда неочевидно, какой граф разбивается, мы будем писать* $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$.*)*

2) *Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ назовем внутренними, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем внутренностью части A и будем обозначать через* $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$ мы будем называть граничными, а все их множество – границей и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Доказательство следующей леммы несложно и может быть найдено в [11, теорема 2].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{S}$ – набор разделяющих множеств в графе G, а $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершина $x \in \mathrm{Int}(A)$ не смежна ни с одной из вершин множества $V(G) \setminus A$. Граница* $\mathrm{Bound}(A)$ *состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вершины в $V(G) \setminus A$.*

2) *Если* $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Bound}(A)$ *отделяет* $\mathrm{Int}(A)$ *от* $V(G) \setminus A$.

Рассмотрим в качестве иллюстрации этих понятий самый простой, и в то же время очень важный случай: разбиение k-связного графа одним k-вершинным разделяющим множеством S. Что такое тогда часть $A \in \mathrm{Part}(S)$? Легко понять, что ее внутренность $\mathrm{Int}(A)$ – это компонента связности графа $G - S$, а сама часть A получается добавлением к этой компоненте вершин множества S. Следовательно, индуцированный подграф $G(A)$ связен, и из каждой вершины множества S выходит хотя бы одно ребро к вершинам из $\mathrm{Int}(A)$.

Вернемся к случаю $k = 1$. Точки сочленения связного графа G – это его разделяющие множества, из них состоит $\mathfrak{R}_1(G)$. Множества вершин всех блоков – это части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_1(G))$. С помощью понятия части разбиения удобно описываются свойства блоков и точек сочленения. Вспомним одно из них (доказательство очевидно и может быть найдено в классической литературе).

Лемма 2. *Пусть a, b – точки сочленения графа G, причем $U \in \mathrm{Part}(\{a\})$ – часть, содержащая b. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершина b – точка сочленения графа $G(U)$.*

2) *Любая точка сочленения графа $G(U)$ является точкой сочленения графа G.*

§2. Дерево разбиения

Определение 8. *Пусть G – k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем все множества набора $\mathfrak{S}$ попарно независимы.*

1) *Построим дерево разбиения $T(G, \mathfrak{S})$ следующим образом. Вершины одной доли $T(G, \mathfrak{S})$ – это множества из $\mathfrak{S}$, а вершины другой доли – части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Обозначать вершины $T(G, \mathfrak{S})$ мы будем так же, как соответствующие множества вершин графа G. Вершины $S \in \mathfrak{S}$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда $S \subset A$.*

2) *Построим граф $G^{\mathfrak{S}}$ на множестве вершин $V(G)$ следующим образом: возьмем граф G и для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ добавим все рёбра, соединяющие пары вершин множества S.*

Построение $T(G, \mathfrak{S})$ аналогично построению дерева блоков и точек сочленения. Аналогичными будут и его свойства.

Теорема 1. *Пусть G – k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ – набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $T(G,\mathfrak{S})$ – *это дерево.*

2) *Для каждого множества* $S\in\mathfrak{S}$ *выполняется* $d_{T(G,\mathfrak{S})}(S)=|\mathrm{Part}(S)|$. *Более того, для каждой части* $A\in\mathrm{Part}(S)$ *существует единственная часть* $B\in\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, *такая что* $B\subset A$ *и* B *смежна с* S *в* $T(G,\mathfrak{S})$. *Все висячие вершины дерева* $T(G,\mathfrak{S})$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) *Множество* S *разделяет в графе* G *части* $B,B'\in\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *тогда и только тогда, когда* S *разделяет* B *и* B' *в* $T(G,\mathfrak{S})$.

Перед доказательством теоремы отметим несколько свойств графа $G^{\mathfrak{S}}$.

Лемма 3. *Пусть* G – k*-связный граф, а* $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{R}_k(G)$ – *набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{R}_k(G^{\mathfrak{S}})$. *Более того,* $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})=\mathrm{Part}(G^{\mathfrak{S}};\mathfrak{S})$.

2) *Пусть* $\mathfrak{T}\subset\mathfrak{S}$, $B\in\mathrm{Part}(G;\mathfrak{T})$, *а* $R\in\mathfrak{R}(G^{\mathfrak{S}}(B))$. *Тогда* $R\in\mathfrak{R}(G)$. *В частности, граф* $G^{\mathfrak{S}}(B)$ *является* k*-связным.*

Доказательство. 1) Рассмотрим любое множество $S\in\mathfrak{S}$. Так как множества набора $\mathfrak{S}$ попарно независимы, никакое ребро из $E(G^{\mathfrak{S}})\setminus E(G)$ не может соединять внутренние вершины двух разных частей $\mathrm{Part}(G;S)$. Таким образом, вершины разделены одним из множеств набора $\mathfrak{S}$ в графе G тогда и только тогда, когда они разделены этим множеством в $G^{\mathfrak{S}}$, откуда очевидно следуют утверждения пункта 1.

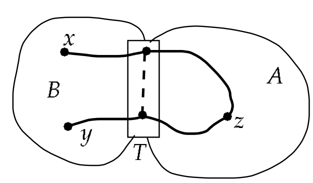

Рис. 1. Построение пути в графе $G^{\mathfrak{S}}(B)$.

2) Пусть $x,y\in B$, а множество R не отделяет x от y в графе G, а следовательно, и в $G^{\mathfrak{S}}$. Рассмотрим кратчайший xy-путь P в графе $G^{\mathfrak{S}}-R$. Предположим, что он содержит вершину $z\notin B$ (см. рис. 1). Тогда существует множество $T\in\mathfrak{T}$, отделяющее z от B. При движении от z в обе стороны по пути P мы попадем в вершины множества

T, которые в $G^{\mathfrak{S}}$ смежны. Но тогда существует более короткий путь: можно заменить участок пути, содержащий z, на ребро между двумя вершинами множества T. Противоречие с выбором пути P показывает, что $V(P) \subset B$, а значит, P – путь в $G^{\mathfrak{S}}(B) - R$.

В завершении доказательства остается отметить, что $\mathfrak{R}_{k-1}(G) = \varnothing$ (граф G – k-связный), а значит и $\mathfrak{R}_{k-1}(G^{\mathfrak{S}}(B)) = \varnothing$, то есть, граф $G^{\mathfrak{S}}(B)$ также является k-связным. □

Доказательство теоремы 1. Будем доказывать все утверждения теоремы индукцией по количеству множеств в наборе $\mathfrak{S}$, причем не фиксируя k-связный граф G. *База* для пустого набора очевидна.

Докажем *индукционный переход.* Рассмотрим граф $G' = G^{\mathfrak{S}}$. Из леммы 1 следует, что разбиения графов G и G' набором $\mathfrak{S}$ одинаковы, будем обозначать это разбиение через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Более того, тогда $T(G, \mathfrak{S}) = T(G', \mathfrak{S})$. Поэтому достаточно доказать утверждения теоремы для графа G'.

Пусть $S \in \mathfrak{S}$, $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $G_i = G'(A_i)$. Как мы знаем, все эти графы k-связны. Пусть набор $\mathfrak{S}_i$ состоит из всех множеств набора $\mathfrak{S}$, лежащих в A_i и отличных от S. Тогда каждое множество из $\mathfrak{S} \setminus S$ лежит ровно в одном из наборов $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$.

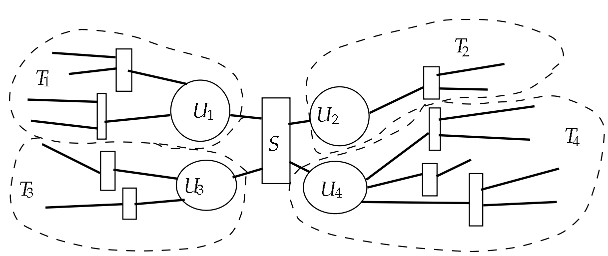

Рис. 2. Дерево $T(G, \mathfrak{S})$.

Пусть $U_i \in \mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$ – часть, содержащая S. По лемме 3 для любой части $U \in \mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$ граф $G'(U)$ является k-связным, а значит, его не разделяет ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, не лежащих в U. Множество S лежит в части U_i, но также не разделяет ее, так как $U_i \subset A_i \in \mathrm{Part}(G; S)$. Это означает, что $\mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i) \subset \mathrm{Part}(G'; \mathfrak{S})$, причем именно часть U_i содержит S. Следовательно,

$$\mathrm{Part}(G';\mathfrak{S}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Part}(G_i;\mathfrak{S}_i),$$

причем объединение – дизъюнктное, а части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, содержащие множество S – это $U_1,\dots,U_n$. Таким образом, утверждение 2 теоремы доказано для множества S, для остальных множеств из $\mathfrak{S}$ доказательство аналогично.

Каждая часть $\mathrm{Part}(G_i;\mathfrak{S}_i)$, кроме U_i, смежна в $T_i = T(G_i,\mathfrak{S}_i)$ с теми же вершинами, что в $T(G,\mathfrak{S})$. Для части U_i в $T(G,\mathfrak{S})$ добавляется ребро к множеству S. Поэтому $T(G,\mathfrak{S}) - S$ распадается ровно на n связных подграфов: это графы T_i (где $i \in \{1,\dots,n\}$) (см. рисунок 2). По индукционному предположению, все эти графы – деревья, а значит, выполнены утверждения пунктов 1 и 3 теоремы. □

Как мы видим, свойства дерева разбиения аналогичны хорошо известным нам свойствам классического дерева блоков и точек сочленения.

§3. Дерево разбиения двусвязного графа

Далее граф G будет двусвязным. Объектом рассмотрения будут множества из $\mathfrak{R}_2(G)$.

Определение 9. *Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ одиночным, если оно независимо со всеми другими множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор, состоящий из всех одиночных множеств графа G.*

В 1966 году Татт [4] описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе именно с помощью дерева, которое он назвал $T(G)$. Это дерево – почти что дерево разбиения двусвязного графа одиночными разделяющими множествами (только эти множества и само дерево были определены в книге Татта более сложным образом). Мы построим похожее дерево с позиции разработанной выше техники.

Понятно, что одиночные множества попарно независимы, что позволяет нам дать следующее определение.

Определение 10. 1) *Дерево разбиения* $\mathrm{BT}(G)$ *двусвязного графа G – это дерево $T(G,\mathfrak{O}(G))$.*

2) *Будем использовать обозначение* $\mathrm{Part}(G)$ *вместо* $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ *и называть части этого разбиения просто частями графа* G. *Часть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ *назовем крайней, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения* $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 1. 1) Из теоремы 1 следует, что $\mathrm{BT}(G)$ – дерево, все висячие вершины которого соответствуют крайним частям $\mathrm{Part}(G)$.

2) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ – крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ – одиночное множество графа G.

Лемма 4. *Пусть* S *– одиночное множество двусвязного графа* G, *а* $x \in S$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если одиночное множество* S *имеет степень* $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = d$, *то* $d_G(x) \geqslant d$. *Если* $d_G(x) = d$, *то вершины множества* S *несмежны.*

2) $d_G(x) \geqslant 3$.

Доказательство. 1) По теореме 1 мы имеем $|\mathrm{Part}(S)| = d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = d$, а во внутренности каждой из d частей $\mathrm{Part}(S)$ есть вершина, смежная с x (иначе граф недвусвязен). Поэтому $d_G(x) \geqslant d$, а в случае равенства все смежные с x вершины лежат во внутренностях частей $\mathrm{Part}(S)$.

2) Пусть $d_G(x) = 2$. По пункту 1 тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$, и вершины множества S несмежны. Значит, $\mathrm{N}_G(x) \in \mathfrak{R}_2(G)$ – множество, зависимое с S, противоречие. $\square$

Теперь наша задача – понять смысл частей графа G.

Определение 11. *Для двусвязного графа* G *обозначим через* G' *граф* $G^{\mathfrak{O}(G)}$ *(то есть граф, полученный из* G *добавлением всех ребер вида* ab, *где* $\{a,b\} \in \mathfrak{O}(G)$*).*

Опишем важное свойство частей графа и одиночных множеств, аналогичное свойству блоков и точек сочленения (см. лемму 2). Это свойство позволит нам “разрезать” двусвязный граф по одиночному множеству.

Лемма 5. *Для двусвязного графа* G *выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество* $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *разделяет вершины* $a, b \in V(G)$ *в графе* G *тогда и только тогда, когда* S *разделяет их в* G'. *В частности,* $\mathfrak{R}_2(G) = \mathfrak{R}_2(G')$.

2) *Пусть* $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *– неодиночное множество, причем* $S \subset A \in \mathrm{Part}(G)$. *Тогда* $S \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$, *причем это множество – неодиночное и в* $G'(A)$.

Доказательство. 1) При построении G' мы соединяем дополнительными рёбрами только пары вершин, составляющих одиночное множество, а такие вершины не разделены ни одним из множеств набора $\mathfrak{R}_2(G)$. Отсюда легко следуют доказываемые утверждения.

2) Пусть $S' \in \mathfrak{R}_2(G)$ – зависимое с S множество. По пункту 1, мы имеем $S, S' \in \mathfrak{R}_2(G')$, причем эти множества зависимы и в графе G'. Так как граф $G'(A)$ двусвязен, нельзя разделить две вершины множества $S \subset A$ в графе G', удалив менее двух вершин из части A. Следовательно, $S' \subset A$. Тогда S и S' разделяют друг друга и в графе $G'(A)$. Следовательно, $S, S' \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$, причем эти множества зависимы. □

Следующая лемма характеризует неодиночные множества. Похожую характеристику использовал в своей книге [4] Татт.

Лемма 6. *Пусть $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ – неодиночное множество. Тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ граф $G(A)$ недвусвязен и имеет точку сочленения, отделяющую a от b.*

Доказательство. Так как S – неодиночное, существует зависимое с ним множество $S' \in \mathfrak{R}_2(G)$. Множество S', как мы знаем, разделяет S. Значит, не существует ab-пути по вершинам A в графе G, который не пересекается с S'. Однако, если S' не пересекает $\mathrm{Int}(A)$, то такой путь, очевидно, существует. Противоречие.

Таким образом, S' пересекает внутренность каждой части $\mathrm{Part}(S)$, откуда следует, что частей ровно две. Более того, если $\{x\} = S' \cap \mathrm{Int}(A)$, то x отделяет друг от друга вершины a и b в $G(A)$. □

Теорема 2. *Пусть G – двусвязный граф без одиночных множеств. Тогда либо G трёхсвязен, либо G – это простой цикл.*

Замечание 2. 1) Напомним, что по нашему определению трёхсвязный граф должен содержать хотя бы 4 вершины. В частности, треугольник не является трёхсвязным графом и две альтернативы из теоремы 2 – взаимно исключающие.

2) Результат теоремы можно получить в качестве следствия результатов, полученных в работе [11] для случая произвольного k. Однако, мы предпочитаем дать более простое доказательство, учитывающее специфику двусвязных графов.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что наш граф G не трёхсвязен. *Для каждого множества* $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$ *и части* $A \in \mathrm{Part}(S)$ *мы докажем, что* $G(A)$ *– это простой* ab*-путь.*

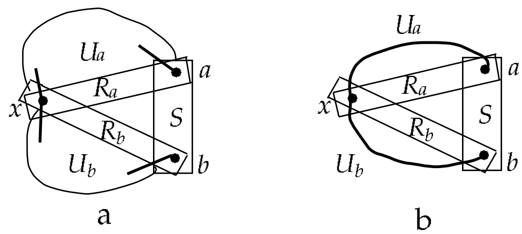

Рис. 3. Двусвязный граф без одиночных множеств.

Доказательство будет индукцией по $|A|$, база для случая, когда часть A имеет ровно одну внутреннюю вершину, очевидна. Докажем переход. Пусть мы хотим доказать утверждение для части $A \in \mathrm{Part}(S)$, а для меньших частей утверждение уже доказано. Пусть $H = G(A)$. Так как S – неодиночное, по лемме 6 граф H имеет точку сочленения x, отделяющую a от b. Пусть U_a и U_b – компоненты связности графа $H - x$, содержащие a и b соответственно (см. рисунок 3a). Из двусвязности графа G следует, что других компонент связности в графе $H - x$ нет (такая компонента выделилась бы и в $G - x$).

Пусть $U'_a = U_a \setminus \{a\} \neq \varnothing$. Тогда $R_a = \{a, x\}$ отделяет U'_a от остальных вершин в графе G. Следовательно, по индукционному предположению, граф $G(U'_a \cup R_a) = G(U_a \cup \{x\})$ – простой ax-путь. Если $U_a = \{a\}$, то $\mathrm{N}_H(a) = \{x\}$ и $G(U_a \cup \{x\})$ – также простой ax-путь. Аналогично, $G(U_b \cup \{x\})$ – простой bx-путь. Следовательно, граф $G(A)$ – это простой ab-путь (см. рисунок 3b).

По лемме 6 мы знаем, что $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$. Как мы доказали, оба графа $G(A_1)$ и $G(A_2)$ – простые пути между вершинами множества S, откуда очевидно следует, что G – простой цикл. □

Следствие 1. *Для каждой части* $A \in \mathrm{Part}(G)$ *граф* $G'(A)$ *либо трёхсвязен, либо является циклом.*

Доказательство. По лемме 3 мы знаем, что граф $G'(A)$ двусвязен. Предположим, $S \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$. По лемме 3 мы имеем $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Множество S не может быть одиночным в G, так как разделяет часть

$A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$. По лемме 5 тогда S – неодиночное разделяющее множество в $G'(A)$. Следовательно, в $G'(A)$ нет одиночных множеств, а значит, по теореме 2 этот граф либо трёхсвязен, либо является циклом. □

Определение 12. *Назовём часть A циклом, если граф $G'(A)$ – простой цикл и блоком, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A – цикл, то мы будем называть $|A|$ длиной цикла A.*

Таким образом, мы знаем, что каждая часть двусвязного графа G – цикл или блок.

Следствие 2. *Если часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ – цикл, то все вершины из $\mathrm{Int}(A)$ имеют степень 2 в графе G.*

Доказательство. Если $x \in \mathrm{Int}(A)$, то рёбра графа G выходят из x только к вершинам части A, а таких рёбер, очевидно, ровно два. □

Изучим, как расположены неодиночные разделяющие множества графа G.

Лемма 7. 1) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(G)$ – цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неодиночное разделяющее множество графа G.*

2) *Любое неодиночное множество $R \in \mathfrak{R}_2(G)$ лежит в части $A \in \mathrm{Part}(G)$, являющейся циклом длины хотя бы 4 и содержит две несоседние вершины этого цикла.*

Доказательство. 1) Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, причем вершины указаны в циклическом порядке, $R = \{a_1, a_m\}$, где $2 < m < k$. Тогда $R \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$ и делит граф $G'(A)$ ровно на две части: $U_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и $U_2 = \{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_1\}$. По лемме 3 мы имеем $R \in \mathfrak{R}_2(G)$. Очевидно, $R \notin \mathfrak{O}(G)$.

2) Множество R независимо со всеми одиночными множествами графа G, а потому лежит в одной из частей $A \in \mathrm{Part}(G)$. По лемме 5 тогда $R \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$. Из нашей классификации (следствие 1) ясно, что тогда A – цикл длины хотя бы 4. Теперь понятно, что R состоит из двух несоседних вершин этого цикла. □

На этом закончим изучение собственно дерева разбиения двусвязного графа и перейдём к его применению.

§4. Части разбиения и планарность

Понятно, что связный граф планарен тогда и только тогда, когда планарен любой его блок. В этом разделе мы обсудим аналогичный критерий планарности для двусвязных графов – в терминах частей разбиения этого графа.

Определение 13. 1) *Граф H' называется подразбиением графа H, если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути. При этом, все внутренние вершины добавляемых путей различны, имеют степень 2 и не содержатся в графе H.*

2) *Вершины графа H', являющиеся вершинами графа H (то есть, не являющиеся внутренними вершинами добавленных путей), называются главными.*

3) *Через $G \supset H$ будем обозначать, что граф G содержит в качестве подграфа подразбиение графа H.*

Лемма 8. *Пусть G – двусвязный граф, $A \in \mathrm{Part}(G)$. Тогда $G \supset G'(A)$.*

Доказательство. Пусть $ab \in E(G'(A)) \setminus E(G)$. Тогда $a, b \in A$ и $\{a, b\} \in \mathfrak{O}(G)$. Пусть $U_{a,b} \in \mathrm{Part}(\{a, b\})$ – часть, не содержащая A. Тогда существует ab-путь $S_{a,b}$ по вершинам части $U_{a,b}$ в графе G. Заменим ребро ab на путь $S_{a,b}$.

В результате нескольких таких замен мы получим подграф H графа G. Пусть ab и xy – два разных замененных ребра (возможно, они имеют общий конец). Тогда части $U_{a,b}$ и $U_{x,y}$ разеделены частью A в $\mathrm{BT}(G)$, поэтому не имеют общей внутренней вершины. Следовательно, никакие два добавленных пути не имеют общей внутренней вершины, а значит, граф H является подразбиением $G'(A)$. □

Следующая теорема почти повторяет теорему, доказанную Маклейном в 1937 году [1].

Теорема 3. *Двусвязный граф G планарен тогда и только тогда, когда для любого блока $B \in \mathrm{Part}(G)$ граф $G'(B)$ планарен.*

Единственное отличие нашей версии от теоремы Маклейна состоит в том, что у Маклейна вместо подграфов вида $G'(B)$ фигурируют так называемые *атомы*, которые на самом деле являются подразбиениями подграфов $G'(B)$. Доказательство теоремы 3 несложно следует из теоремы Куратовского о характеризации непланарных графов.

§5. Части разбиения и хроматическое число

Понятно, что хроматическое число связного графа равно максимуму хроматических чисел его классических двусвязных блоков. В этом разделе мы докажем верхние оценки на хроматическое число двусвязного графа через хроматические числа его подграфов, индуцированных на частях разбиения. Эти оценки с помощью структуры дерева разбиения получаются очень просто.

Теорема 4. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

$$\begin{aligned} &1) \qquad \chi(G) \leqslant \chi(G') = \max_{A\in \mathrm{Part}(G)} \chi(G'(A)),\\ &2) \qquad \chi(G) \leqslant \max_{A\in \mathrm{Part}(G)} \chi(G(A)) + 1, \\ &3) \qquad \chi(G) \leqslant \max\Big(3, \max_{A\text{ – блок } G} \chi(G(A)) + 1\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Разобьем дерево $\mathrm{BT}(G)$ на уровни, пусть уровень 0 состоит из любой части $B \in \mathrm{Part}(G)$, в каждый следующий уровень $\ell+1$ войдут вершины, не вошедшие в уровни $0, \dots, \ell$ и смежные хотя бы с одной вершиной уровня ℓ. По построению дерева $\mathrm{BT}(G)$ понятно, что четные уровни состоят из частей разбиения, а нечетные – из одиночных множеств. Мы будем красить вершины частей графа G в порядке, заданном разбиением на уровни.

1) Достаточно построить правильную раскраску графа G' в

$$k = \max_{A\in \mathrm{Part}(G)} \chi(G'(A))$$

цветов. Граф $G'(B)$ мы, очевидно, можем покрасить в k цветов. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ уровня 2ℓ, тогда она смежна в $\mathrm{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell-1$ и в части A покрашены только две вершины множества S, причем в разные цвета, так как они смежны в G'. Понятно, что существует правильная раскраска графа $G'(A)$ в k цветов. Поскольку вершины множества S в этой раскраске разноцветны, можно считать, что их цвета именно такие, как в раскраске вершин частей предыдущих уровней.

2) Достаточно построить правильную раскраску графа G в

$$m + 1 = \max_{A\in \mathrm{Part}(G)} \chi(G(A)) + 1$$

цветов. Граф $G(B)$ мы можем покрасить даже в m цветов. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ уровня 2ℓ, тогда она смежна в $\mathrm{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell - 1$ и в части A покрашены только две вершины множества $S = \{a, b\}$. Пусть вершины a и b покрашены в цвета i и j, возможно, совпадающие.

Если $i = j$, то покрасим вершины $G(A)$ правильным образом в m цветов, не используя цвет i, а потом перекрасим вершины a и b в цвет i. Если $i \neq j$, то покрасим вершины $G(A)$ правильным образом в m цветов так, чтобы a была покрашена в цвет i, не используя при этом цвет j, а потом перекрасим вершину b в цвет j. В любом случае понятно, что получится правильная раскраска вершин части A, согласованная с раскраской вершин частей предыдущих уровней.

3) Единственное отличие от пункта 2 состоит в том, что если рассматриваемая часть A – цикл, у которого как-то покрашены две вершины, то остальные несложно докрасить, не нарушая правильность раскраски и использовав при этом три цвета. □

Замечание 3. В доказательстве утверждения 2 теоремы 4 мы можем произвольно выбрать часть B, с которой начинается покраска, а для этой части не нужно использовать дополнительный цвет. Поэтому при вычислении максимума в формуле (1) можно не прибавлять 1 к хроматическому числу графа $G(A)$ для одной из частей $A \in \mathrm{Part}(G)$ (именно эту часть нужно будет выбрать в качестве B).

Аналогично, в утверждении 3 можно не прибавлять 1 к хроматическому числу одного из блоков.

Следствие 3. *Если все части двусвязного графа G – циклы, то $\chi(G) \leqslant 3$.*

Перейдем к оценкам на списочное хроматическое число двусвязного графа.

Теорема 5. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $$\mathrm{ch}(G) \leqslant \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \mathrm{ch}(G(A)) + 2.$$

2) $$\mathrm{ch}(G) \leqslant \max\Bigl(3, \max_{A\ \text{– блок}\ G} \mathrm{ch}(G(A)) + 2\Bigr).$$

Доказательство. 1) Аналогично теореме 4 мы разобьем вершины дерева разбиения на уровни, начиная с части B и будем красить части по уровням. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ уровня 2ℓ, тогда она смежна в $\mathrm{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell - 1$ и в части A покрашены только две вершины множества $S = \{x, y\}$.

В списке каждой вершины графа $G(A)$ хотя бы $\mathrm{ch}(G(A)) + 2$ цвета. Удалим из списков цвета вершин x и y, оставшихся цветов хватит для правильной раскраски оставшихся вершин части A.

2) Отличие от пункта 1 состоит в раскраске частей-циклов. Пусть A – цикл. Тогда ранее покрашено две вершины части A. Теперь покрасим остальные вершины: это возможно, так как в момент покраски очередной вершины покрашено не более двух ее соседей, а в списке есть три цвета. □

Замечание 4. В доказательстве теоремы 5 мы можем произвольно выбрать часть B, с которой начинается покраска, а для этой части не нужно использовать дополнительные два цвета. Поэтому при вычислении максимума можно не прибавлять 2 к $\mathrm{ch}(G(A))$ для одной из частей $A \in \mathrm{Part}(G)$ (именно эту часть нужно будет выбрать в качестве B).

§6. Критические двусвязные графы

Дерево $\mathrm{BT}(G)$ помогает понять, как устроены критические двусвязные графы.

Теорема 6. 1) *Двусвязный граф G является критическим тогда и только тогда, когда все его части-блоки и части-треугольники пусты (то есть, имеют пустую внутренность).*

2) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(S)$ – крайняя часть критического двусвязного графа G, смежная в $\mathrm{BT}(G)$ с одиночным множеством S. Тогда A – цикл с хотя бы 4 вершинами, и все вершины A, кроме двух вершин множества S, имеют в графе G степень 2.*

3) *Критический двусвязный граф имеет хотя бы четыре вершины степени 2.*

Доказательство. 1) Из леммы 7 очевидно, что вершины, не входящие в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$ (то есть вершины, удаление которых не нарушает двусвязность графа G) – это как раз внутренние вершины блоков и треугольников графа G.

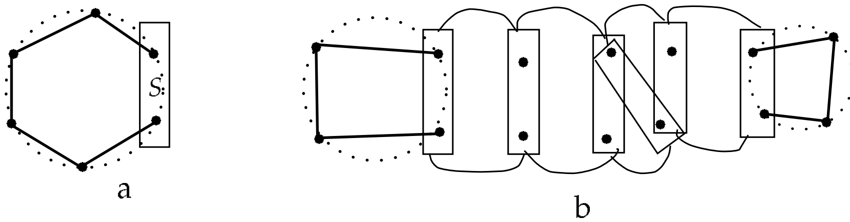

Рис. 4. Критические двусвязные графы.

2) Пусть A – крайняя часть графа G. По пункту 1, тогда A – цикл длины хотя бы 4, а S состоит из двух соседних вершин этого цикла. Остальные (хотя бы две) вершины A – внутренние и по следствию 2 имеют степень 2 в графе G (см. рисунок 4a).

3) Если граф G имеет хотя бы одно одиночное множество, то у графа G не менее двух крайних частей, утверждение очевидно следует из пункта 2. Пусть одиночных множеств у графа G нет. Критический двусвязный граф, очевидно, не является трёхсвязным и содержит хотя бы 4 вершины. Значит, по теореме 2 граф G – цикл длины не менее 4, в этом случае утверждение очевидно. $\square$

Более того, теперь понятно, как устроены критические двусвязные графы, у которых ровно 4 вершины степени 2. Во-первых, это цикл из четырех вершин. Теперь рассмотрим такой граф G не менее чем с пятью вершинами. Тогда дерево $\mathrm{BT}(G)$ должно иметь ровно две висячие вершины, то есть, все некрайние блоки и все одиночные множества имеют степень два в $\mathrm{BT}(G)$. Значит, каждое одиночное множество делит граф ровно на две части (для неодиночных множеств это всегда так).

Рассмотрим некрайнюю часть $A \in \mathrm{Part}(G)$. Так как $d_{\mathrm{BT}(G)}(A) = 2$, граница A состоит ровно из двух одиночных множеств, то есть, имеет 3 или 4 вершины. Докажем, что $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$. Если A – блок или треугольник, то это доказано в теореме 6. Если A – цикл длины хотя бы 4, то его внутренняя вершина имеет степень 2 в графе G, как уже доказывалось выше, то есть, количество вершин степени два увеличивается.

Таким образом, некрайняя часть $\mathrm{Part}(G)$ может быть треугольником, четырёхугольником или блоком из четырёх вершин, причем ее вершины покрываются двумя одиночными множествами, смежными с этой частью в дереве $\mathrm{BT}(G)$. Пример критического двусвязного графа G с 4 вершинами степени 2 приведен на рисунке 4б.

Литература

1. S. MacLane, *A structural characterization of planar combinatorial graphs.* — Duke Math. J. **3**, No. 3 (1937), 460–472.
2. G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, *Critically n-connected graphs.* — Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 63–68.
3. Y. O. Hamidoune, *On critically h-connected graphs.* — Discr. Math. **32** (1980), 257–262.
4. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
5. W. T. Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
6. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
7. Ф. Харари, *Теория графов.* Мир, М., 1973.
8. О. Оре, *Теория графов.* Наука, М., 1968.
9. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
10. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
11. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.

Karpov D. V. The tree of decomposition of a biconnected graph.

The tree of decomposition of a k-connected graph by a set $\mathfrak{S}$ of pairwise independent k-vertex cutsets is defined as follows. The vertices of this tree are cutsets of $\mathfrak{S}$ and parts of decomposition of the graph by the set $\mathfrak{S}$, each cutset is adjacent to all parts that contain it. We prove, that the graph described above is a tree.

The tree of decomposition of a biconnected graph is a particular case of this construction: it is the tree of decomposition of a biconnected graph by the set of all its single cutsets (i.e., 2-vertex cutsets, that are independent with all other 2-vertex cutsets).

We show that this tree has much in common with the classic tree of blocks and cutpoints of a connected graph. With the help of the tree of decomposition of a biconnected graph we prove a planarity criterium and find some upper bounds on the chromatic number of this graph. Finally, we study the structure of critical biconnected graphs and prove that each such graph has at least four vertices of degree 2.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
Математико-механический факультет
СПбГУ Университетский пр., 28, 198504,
Санкт-Петербург, Старый Петергоф
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 31 октября 2013 г.