Р. К. Васильев, Об условиях сходимости изотонных операторов в частично упорядоченных множествах с классами сходимости,

Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 3, 337–348

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 337—348

УДК 513.88

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ИЗОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ С КЛАССАМИ СХОДИМОСТИ

Р. К. Васильев

Даются необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять элемент x частично упорядоченного множества X со сходимостью, близкой к топологической, чтобы всякая направленность изотонных операторов из множества $X' \subset X$ в X, сходящаяся на некотором множестве $G \subset X'$ к тождественному оператору, сходилась на x к x. Библ. 8 назв.

П. П. Коровкин, изучая в [1] условия сходимости последовательности линейных положительных операторов в некоторых линейных псевдометрических пространствах функций, впервые заметил, что без существенных изменений можно считать рассматриваемые операторы изотонными, т. е. без предположения об их аддитивности и однородности. В настоящей работе изучаются условия сходимости направленностей изотонных операторов в широком классе пространств со сходимостью, не являющихся в общем случае ни линейными, ни метрическими.

1. Символом $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ мы обозначаем направленность (английский термин «net»), заданную на направленном множестве А. Следуя Дж. Л. Келли [2], будем называть направленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ поднаправленностью направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, если существует такая функция N на В со значениями в А, что $y_\beta = x_{N_\beta}$ при всех $\beta \in \mathrm{B}$, и для каждого $\alpha \in \mathrm{A}$ найдется такое $\beta \in \mathrm{B}$, что если $\beta' \geqslant \beta$, то $N_{\beta'} \geqslant \alpha$. Если $\{\mathrm{A}_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ есть семейство направленных множеств, то через $\Pi_{\xi \in \Xi} \mathrm{A}_\xi$ обозначается их декартово произведение, т. е. направленное множество всех функций f на Ξ, таких, что $f(\xi) \in \mathrm{A}_\xi$ при каждом $\xi \in \Xi$.

Пусть $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(c)$ — некоторый класс, образованный парами $(\{x_\alpha\}, x)$, где $\{x_\alpha\}$ — некоторая направленность в множестве X, а x — точка на X; мы говорим, что направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (c)-сходится к x $(x_\alpha \xrightarrow{(c)} x)$ или что $(c)\text{-}\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha = x$, тогда и только тогда, когда $(\{x_\alpha\}, x) \in \mathfrak{C}$. Будем называть $\mathfrak{C}$-*пространством* всякое частично упорядоченное множество (ч.у.м.), в котором задан класс сходимости $\mathfrak{C}(c)$, удовлетворяющий следующему условию:

($\mathfrak{C}$) Пусть $x_{\alpha\gamma} \leqslant y_\gamma \leqslant x_{\beta\gamma}$ при всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $\beta \in \mathrm{B}$ и $\gamma \in \Gamma$, где A, B и Γ — некоторые направленные множества. Тогда, если $x_{\alpha\gamma} \xrightarrow{(c)} x_\alpha$, $x'_{\beta\gamma} \xrightarrow{(c)} x'_\beta$ $(\gamma \in \Gamma)$, $x_\alpha \leqslant x \leqslant x'_\beta$ при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ и $\beta \in \mathrm{B}$, и $x_\alpha \xrightarrow{(c)} x$, $x'_\alpha \xrightarrow{(c)} x$, то $y_\gamma \xrightarrow{(c)} x$.

Примеры $\mathfrak{C}$-пространств будут разобраны в п. 2.

Пусть X есть $\mathfrak{C}$-пространство (с (c)-сходимостью), G и X', где $G \subset X'$,— подмножества в X, а H_a — некоторый класс операторов из X' в X. Через $\hat{G}_a = \hat{G}_a(X', X, c)$ обозначается множество, состоящее из всех таких элементов $x \in X'$, что для любой направленности $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ операторов класса H_a из сходимости $U_\alpha v \xrightarrow{(c)} v$ для всех $v \in G$ следует сходимость $U_\alpha x \xrightarrow{(c)} x$. Ограничиваясь рассмотрением только последовательностей операторов из класса H_a, аналогичным образом можно определить множество $\hat{G}_{as} = \hat{G}_{as}(X', X, c) \subset X'$. Ясно, что $\hat{G}_a \subset \hat{G}_{as}$. Класс изотонных операторов из X' в X (т. е. таких, что $x_1 \geqslant x_2$ влечет $Ux_1 \geqslant Ux_2$) обозначается нами через H_i. Если X — линейное (линейное нормированное) пространство, то через H_p (H_b) обозначается подкласс H_i, состоящий из всех аддитивных (линейных по норме) положительных операторов. Заметим, что $\hat{G}_i \subset \hat{G}_p \subset \hat{G}_b$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$G_x^- = \{z : z \leqslant x,\ z \in G\},$$
$$G_x^+ = \{z : z \geqslant x,\ z \in G\} \quad (x \in X). \tag{1}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X есть $\mathfrak{C}$-пространство, $G \subset X' \subset X$, и $x \in X'$. Тогда, если существуют такие направ-*

ленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset G_x^-$ *и* $\{x'_\beta\}_{\beta\in B}\subset G_x^+$, *что* $x_\alpha\xrightarrow{(c)}x$ *и* $x'_\beta\xrightarrow{(c)}x$, *то* $x\in\hat{G}_i$.

Доказательство. Пусть операторы $U_\gamma\in H_i$ ($\gamma\in\Gamma$) выбраны так, что $U_\gamma v\xrightarrow{(c)}v$ при $v\in G$. Так как $U_\gamma x_\alpha\leqslant U_\gamma x\leqslant U_\gamma x'_\beta$, то по определению $\mathfrak{C}$-пространства $U_\gamma x\xrightarrow{(c)}x$, т. е. $x\in\hat{G}_i$.

Пусть X — ч.у.м. и $G\subset X$. Обозначим через G^* (G_*) множество всех элементов X, которые могут быть получены из элементов G с помощью конечного числа операций $\vee$ ($\wedge$).

ТЕОРЕМА 2. *Если в условиях теоремы 1 X есть структура,* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset G^*$, $\{x'_\beta\}_{\beta\in B}\subset G_*$, $x_\alpha\xrightarrow{(c)}x$, $x'_\beta\xrightarrow{(c)}x$, $x_\alpha\leqslant x\leqslant x'_\beta$, *и операции* $\vee$ *и* $\wedge$ *(c)-непрерывны в* X *), *то* $x\in\hat{G}_i$.

Действительно, пусть $x_\alpha=\sup\limits_i x_{\alpha i}$, $x_{\alpha i}\in G_x^-$, $i=1,2,\ldots,m_\alpha$, $x'_\beta=\inf\limits_j x'_{\beta j}$, $x'_{\beta j}\in G_x^+$, $j=1,2,\ldots,n_\beta$, а операторы U_γ определены как в теореме 1. А так как $x_{\alpha i}\leqslant x\leqslant x'_{\beta j}$, то

$$\sup_i U_\gamma x_{\alpha i}\leqslant U_\gamma x\leqslant\inf_j U_\gamma x'_{\beta j},$$

причем $\sup\limits_i U_\gamma x_{\alpha i}\xrightarrow{(c)}\sup\limits_i x_{\alpha i}=x_\alpha$ и $\inf\limits_j U_\gamma x'_{\beta j}\xrightarrow{(c)}\inf\limits_j f_{\beta j}x'_\beta$. Поэтому $U_\gamma x\xrightarrow{(c)}x$, т. е. $x\in\hat{G}_i$.

2. Рассмотрим некоторые примеры $\mathfrak{C}$-пространств.

Пусть X есть топологическое пространство (вообще говоря, не T_1-пространство), а $\mathfrak{C}$ (c) — класс, образованный всеми направленностями, сходящимися по топологии в X (т. е. $x_\alpha\xrightarrow{(c)}x$ означает, что для любой окрестности U точки x $x_\alpha\in U$ при $\alpha\geqslant\alpha_0(U)$). Заметим, что все сходящиеся в X направленности тогда и только тогда имеют единственный предел, когда X является хаусдорфовым пространством ([2], стр. 98). Топологическая сходимость удовлетворяет следующим четырем условиям ([2], гл. 2):

---

*) То есть $x_\alpha\vee y_\alpha\xrightarrow{(c)}x\vee y$, $x_\alpha\wedge y_\alpha\xrightarrow{(c)}x\wedge y$, если $x_\alpha\xrightarrow{(c)}x$ и $y_\alpha\xrightarrow{(c)}y$.

1c) стационарная направленность $\{x_\alpha = x\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (c)-сходится к x; 2c) если направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (c)-сходится к x, то и всякая ее поднаправленность (c)-сходится к x; 3c) если $(c)\text{-}\lim\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (c)\text{-}\lim\limits_{\beta \in \mathrm{B}_\alpha} x_{\alpha,\beta} = x$, а $F = \mathrm{A} \times \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{B}_\alpha$, то $(c)\text{-}\lim\limits_{(\alpha, f) \in F} x_{\alpha, f(\alpha)} = x$; 4c) если направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ не (c)-сходится к точке x, то существует ее поднаправленность $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, никакая поднаправленность которой не (c)-сходится к x. Более того, сходимость в классе $\mathfrak{C}(X, c)$, удовлетворяющая 1c) — 4c), совпадает с топологической сходимостью в X, если для произвольного множества $D \subset X$ определить замыкание по формуле: $\overline{D} = \{x : (\{x_\alpha\}, x) \in \mathfrak{C}, x_\alpha \in D\}$ (см. [2], теорема 2.9). Заметим также, что в условии 4c) можно считать поднаправленность $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ конфинальной и лежащей в дополнении к некоторой окрестности U точки x.

Предположим теперь, что X частично упорядочено, и будем считать, что топология в X следующим образом связана с порядком:

5c) если $x_\alpha \leqslant y_\alpha \leqslant x'_\alpha$ при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ и $x_\alpha \xrightarrow{(c)} x$, $x'_\alpha \xrightarrow{(c)} x$, то $y_\alpha \xrightarrow{(c)} x$.

ЛЕММА 1. *Частично упорядоченное топологическое пространство X, удовлетворяющее условию 5c), является $\mathfrak{C}$-пространством относительно топологической сходимости.*

Доказательство. Пусть в X $x_{\alpha\gamma} \leqslant y_\gamma \leqslant x'_{\beta\gamma}$, $x_{\alpha\gamma} \xrightarrow{(c)} x_\alpha$, $x'_{\beta\gamma} \xrightarrow{(c)} x'_\beta$ $(\gamma \in \Gamma)$, $x_\alpha \xrightarrow{(c)} x$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, $x'_\beta \xrightarrow{(c)} x_{(\beta \in \mathrm{B})}$. Покажем, что $y_\gamma \xrightarrow{(c)} x$. Положим $z_{\alpha\beta\gamma} = x_{\alpha\gamma}$ при $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \Gamma$, и $z_{\alpha\beta} = x_\alpha$ при $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Тогда из самого определения топологической сходимости следует, что $z_{\alpha\beta\gamma} \xrightarrow{(c)} z_{\alpha\beta}$ $(\gamma \in \Gamma)$ и $z_{\alpha\beta} \xrightarrow{(c)} x$ $((\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B})$. Пусть далее $F = \Pi_{(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}} \{\Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma\}$ и $H = \mathrm{A} \times \mathrm{B} \times F$. Тогда, согласно 3c), направленность $\{z_{\alpha\beta f} = x_{\alpha, f(\alpha,\beta)}\}_{(\alpha,\beta,f) \in H}$ (c)-сходится к x. (Здесь $f(\alpha, \beta)$ есть значение функции $f \in F$ на элементе $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$.) Аналогично направленность $\{z'_{\alpha\beta f} = x'_{\beta, f(\alpha,\beta)}\}_{(\alpha,\beta,f) \in H}$ (c)-сходится к x. Положим $w_{\alpha\beta f} = y_{f(\alpha,\beta)}$ при $(\alpha, \beta, f) \in H$. Так как $z_{\alpha\beta f} \leqslant w_{\alpha\beta f} \leqslant z'_{\alpha\beta f}$, то, согласно 5c), $w_{\alpha\beta f} \xrightarrow{(c)} x$. Более того, $\{w_{\alpha\beta f}\}_{(\alpha,\beta,f) \in H}$ — поднаправленность направленности $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, так как, если $N(\alpha, \beta, f) = f(\alpha, \beta)$,

$\gamma \in \Gamma$ и $f^*(\alpha, \beta) \equiv \gamma$, то из $(\alpha', \beta', f) \geqslant (\alpha, \beta, f^*)$ следует, что $N(\alpha', \beta', f) = f(\alpha', \beta') \geqslant f^*(\alpha', \beta') = \gamma$. Аналогичным образом можно выделить (c)-сходящуюся к x поднаправленность не только из $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, но и из всякой ее конфинальной поднаправленности, а поэтому в силу 4c) $y_\gamma \xrightarrow{(c)} x$.

ЛЕММА 2. *Частично упорядоченное множество X является $\mathfrak{C}$-пространством относительно сходимости в интервальной топологии.*

В самом деле, открытая база интервальной топологии X состоит из дополнений к всевозможным конечным объединениям множеств вида $\{x : x \leqslant v\}$ и $\{x : x \geqslant v\}$, где $v \in X$ (см. [3], стр. 97), а тогда легко видеть, что топологическая сходимость в X удовлетворяет условию 5c).

ЛЕММА 3. *Частично упорядоченное псевдометрическое пространство* (см. [2], стр. 162), *в котором из $x \leqslant y \leqslant z$ следует*

$$\rho(x, z) \geqslant \max[\rho(x, y), \rho(y, z)], \tag{2}$$

удовлетворяет относительно сходимости по псевдометрике условию 5c) *и поэтому является $\mathfrak{C}$-пространством.*

Действительно, если $x_\alpha \xrightarrow{(\rho)} x$, $x'_\alpha \xrightarrow{(\rho)} x$ и $x'_\alpha \leqslant y_\alpha \leqslant x'_\alpha$ при $\alpha \in A$, то $\rho(y_\alpha, x_\alpha) \leqslant \rho(x_\alpha, x'_\alpha) \leqslant \rho(x_\alpha, x) + \rho(x'_\alpha, x) \to 0$. А так как $\rho(y_\alpha, x) \leqslant \rho(y_\alpha, x_\alpha) + \rho(x_\alpha, x)$, то $y_\alpha \xrightarrow{(\rho)} x$. Условие (2) выполняется, в частности, в KN-линеалах (см. [4]).

З а м е ч а н и е. По данному классу сходимости $\mathfrak{C}(c)$ можно построить класс $\mathfrak{C}(c^*)$, считая, что $x_\alpha \xrightarrow{(c^*)} x \; (\alpha \in A)$, если для каждой конфинальной поднаправленности $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ существует конфинальная поднаправленность $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \{x_\beta\}_{\beta \in B}$ (c)-сходящаяся к x. Далее, если в классе $\mathfrak{C}(X, c)$ из $x_\alpha \xrightarrow{(c)} x$ следует (c)-сходимость к x любой конфинальной поднаправленности, то в X можно определить так называемую (c)-топологию, считая замкнутыми те и только те множества $D \subset X$, для которых из $x_\alpha \xrightarrow{(c)} x$, $x_\alpha \in D$, следует, что $x \in D$.

Последовательность $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ элементов ч.у.м. X называется (o)-сходящейся к точке $x \in X$, если существует такая убывающая $\{y_n\}$ и такая возрастающая $\{z_n\}$ последовательности, что $x = \inf y_n = \sup z_n$ и

$z_n \leqslant x_n \leqslant y_n$ при $n = 1, 2, \ldots$. (o)-сходимость удовлетворяет (в терминах последовательностей) условиям 1с), 2с) и 5с), всегда имеет единственный предел, и, кроме того, для монотонных последовательностей $x_n \uparrow x$ ($x_n \downarrow x$) тогда и только тогда, когда $x = \sup x_n$ ($x = \inf x_n$) (см. [4], гл. II, § 6).

ЛЕММА 4. *Всякая структура является $\mathfrak{C}$-пространством относительно класса (o)-сходящихся последовательностей.*

Доказательство. Пусть в структуре X $x_{kn} \xrightarrow{(o)} x_k$ $x_k \xrightarrow{(o)} x$, $x_k \leqslant x$ и $x_{kn} \leqslant y_n$ ($k, n = 1, 2, \ldots$). Прежде всего заметим, что $x = \sup x_k$, ибо существуют такие $z_k \in X$, что $z_k \leqslant x_k$ и $x = \sup z_k$, а тогда, если $u \geqslant x_k$ при всех k, то $u \geqslant x$. Далее, найдутся элементы $z_{kn} \in X$, что $z_{kn} \leqslant x_{kn}$ и $z_{kn} \uparrow x_k$ ($n \to \infty$). Положим $v_n = z_{1n} \vee \vee z_{2n} \vee \ldots \vee z_{nn}$. Ясно, что $z_{kn} \leqslant v_n \leqslant x$ при $k \leqslant n$, $v_n \leqslant y_n$ и $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots$ Поскольку $x_k = z_{kk} \vee \vee z_{k,k+1} \vee \ldots$ и $x = \sup x_k$, то $x = \sup\limits_{n-k \geqslant 0} z_{kn}$ (см. [4], стр. 23). А поэтому, если $u \geqslant v_n$ при всех n, то $u \geqslant x$, т. е. $v_n \uparrow x$. Аналогично, если $x'_{kn} \xrightarrow{(o)} x'_k$, $x'_k \xrightarrow{(o)} x$, $x'_k \geqslant x$ и $x'_{kn} \geqslant y_n$, то найдутся в X такие элементы v'_n, что $v'_n \downarrow x$ и $v'_n \geqslant y_n$. Лемма 4 доказана.

Пусть символ ($*$) обозначает (o^*)-сходимость. Имеет место

ЛЕММА 5. *Всякая структура является $\mathfrak{C}$-пространством относительно класса ($*$)-сходящихся последовательностей. Более того, для последовательностей ($*$)-сходимость и сходимость по (o)-топологии последовательностей эквивалентны.*

Первая часть леммы 5 легко следует из определения $\mathfrak{C}$-пространства леммы 4 и следующего свойства ($*$)-сходимости (см. [5], стр. 49): если $x_{kn} \xrightarrow{(*)} x_k$ ($k, n = 1, 2, \ldots$), то найдутся такие индексы $n_1 < n_2 < \ldots < n_m < \ldots$, что при всех k $x_{kn_m} \xrightarrow{(o)} x_k$. Совпадение топологической сходимости со звездной доказано в [5], стр. 51.

Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ элементов условно полной (у. п.) структуры X называется (o)-сходящейся к точке $x \in X$, если $x = \overline{\lim}\, x_\alpha = \underline{\lim}\, x_\alpha$, где $\overline{\lim}\, x_\alpha = \inf_\alpha \sup \{x_{\alpha'} : \alpha' \geqslant \alpha\}$ и $\underline{\lim}\, x_\alpha = \sup_\alpha \inf \{x_{\alpha'} : \alpha' \geqslant \alpha\}$. ($o$)-сходимость направленностей обладает теми же свойствами, что и (o)-сходимость последовательностей; более того, для последовательностей в у.п. структуре оба определения (o)-сходимости равносильны (см. [4], гл. II, § 6).

ЛЕММА 6. *Всякая условно полная структура является $\mathfrak{C}$-пространством относительно класса (o)-сходящихся направленностей.*

Доказательство. Пусть в у. п. структуре X $x_{\alpha\gamma} \leqslant y_\gamma \leqslant x'_{\beta\gamma}$ $(\alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in \Gamma)$, $x_{\alpha\gamma} \xrightarrow{(o)} x_\alpha$, $x'_{\beta\gamma} \xrightarrow{(o)} x'_\beta$, $x_\alpha \leqslant x \leqslant x'_\beta$, и $x'_\alpha \xrightarrow{(o)} x$, $x'_\beta \xrightarrow{(o)} x$. Тогда при всех α и β $x_\alpha = \underline{\lim}_\gamma x_{\alpha\gamma} \leqslant \underline{\lim}\, y_\gamma \leqslant \overline{\lim}\, y_\gamma \leqslant \overline{\lim}_\gamma x'_{\beta\gamma} = x'_\beta$, и так как $x = \sup x_\alpha = \inf x'_\beta$ (см. доказательство леммы 4), то $y_\gamma \xrightarrow{(o)} x$, что и требовалось доказать.

Замечания. 1) У. п. структура X будет $\mathfrak{C}$-пространством относительно сходимости в (o)-топологии направленностей, если, например, (o)-топология совпадает с интервальной топологией; это, в частности, имеет место, если X — полная структура, хаусдорфовая в интервальной топологии (см. [6]).

2) Если $\mathfrak{C}$-пространство X удовлетворяет 1c), а x — наибольший (наименьший) элемент X, то, полагая $x'_{\beta\gamma} = x'_\beta = x (x_{\alpha\gamma} = x_\alpha = x)$, легко видеть, что определение $\mathfrak{C}$-пространства и условия теорем 1 и 2 для x можно формулировать только слева (справа) от точки x.

3. Пусть X — ч.у.м. и $G \subset X$. Обозначим через $\widetilde{G}$ множество всех элементов $x \in X$, удовлетворяющих соотношению

$$x = \sup G_x^- = \inf G_x^+ \tag{3}$$

(см. (1)), причем, если в X есть наибольший (наименьший) элемент u и $u = \sup G_u^-$ $(u = \inf G_u^+)$, то u также присоединяем к $\widetilde{G}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть X есть условно полная структура, содержащая более одного элемента, и пусть $G \subset X$. Тогда, если $v \in X \setminus \widetilde{G}$, то существует такой изотончый оператор U из X в X, что U тождествен на G, и $Uv \neq v$.*

Доказательство. Пусть $\overline{X}$ — пополнение X до полной структуры. Положим $t = \sup G_v^-$, если $G_v^- \neq \Lambda$, и $t = \inf \overline{X}$, если $G_v^- = \Lambda$. Аналогично $T = \inf G_v^+$, если $G_v^+ \neq \Lambda$, и $T = \sup \overline{X}$, если $G_v^+ = \Lambda$. Учитывая, что $t < T$, можно найти такой $w \in X$, что $t \leqslant w \leqslant T$ и либо $w > v$, либо $w < v$. Это ясно, если оба множества G_v^+ и G_v^- не пусты, или если $v = \sup \overline{X}$ или $v = \inf \overline{X}$. Если же, например, $G_v^+ = \Lambda$ и $v \neq \sup \overline{X}$, то найдется такой $x' \in X$, что $w = v \bigvee x' > v$. В дальнейшем для определенности будем считать, что $w > v$.

Определим на множестве $F = G \bigcup \{v\}$ оператор U, полагая $Uz = z$ при $z \in G$ и $Uv = w$. U — изотонный оператор, так как, если $z \geqslant v$, $z \in G$, то, согласно определению w, $z \geqslant w$, т. е. $Uz \geqslant Uv$. Более того, при всех $z \in F$ оператор U удовлетворяет условию

$$z \leqslant Uz \leqslant z \bigvee w. \tag{4}$$

Пусть теперь $x \in X \setminus F$. В силу (4) можно положить $m = \sup \{Uz\colon\ z \in F_x^-\}$, если $F_x^- \neq \Lambda$, и $M = \inf\{Uz\colon z \in F_x^+\}$, если $F_x^+ \neq \Lambda$, причем $M \geqslant x$, $m \leqslant x \bigvee w$ и $m \leqslant M$. Распространим оператор U на множество $F \bigcup \{x\}$, полагая $Ux = y$, где $y = m \bigvee x$, если $F_x^- \neq \Lambda$, и $y = x$ в противном случае. Тогда U — изотонный оператор, так как, если $z < x$, то $uz \leqslant m \leqslant y = Ux$, а если $z > x$, то $Uz \geqslant M = M \bigvee x \geqslant y = Ux$. С другой стороны, $x \leqslant y \leqslant x \bigvee w \bigvee x = x \bigvee w$, т. е. U удовлетворяет (4) на $F \bigcup \{x\}$.

Пусть $\mathfrak{V} = \{V_Z\}$ — множество всевозможных изотонных операторов со значениями в X, определенных на подмножествах $Z \subset X$, где $Z \supset F$, удовлетворяющих на Z (4) и совпадающих на F с U. $\mathfrak{V}$ становится ч.у.м., если для $V_{Z'}$, $V_{Z''} \in \mathfrak{V}$ считать $V_{Z'} \leqslant V_{Z''}$ в том и только в том случае, когда $Z' \subset Z''$ и $V_{Z'}(x) = V_{Z''}(x)$ при $x \in Z'$. Так как всякая цепь в $\mathfrak{V}$ имеет верхнюю границу — оператор, определенный на объединении областей определения операторов цепи —то, применяя лемму Цорна, найдем в $\mathfrak{V}$ максимальный элемент V_W, который можно принять за искомый оператор U, ибо если $W \neq X$ и $s \in X \setminus W$, то, применяя использованные выше рассуждения, найдем в $\mathfrak{V}$ оператор $V_{W \bigcup \{s\}} > V_W$, а это противоречит максимальности V_W. Теорема 3 доказана.

Пусть X — K-линеал, и $E \subset X' \subset X$. Говорят, что E мажорирует X', если для любого $x \in X'$ существует такой $z \in E$, что $|x| \leqslant z$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть X есть K-пространство, G и X', где $G \subset X'$,— его линейные подмножества, и $v \in X' \setminus \tilde{G}$. Тогда, если линейная оболочка множества $G \cup \{v\}$ мажорирует X', то существует такой положительный аддитивный и однородный оператор U из X' в X, что U тождествен на G и $Uv \neq v$.*

Доказательство. Обозначим через G_1 множество всех элементов вида $z' = z + \lambda v$, где $z \in G$, а λ — скаляр (представление z' в указанном виде единственно), и определим на G_1 оператор U, полагая $Uz' = z + \lambda w$, где w определяется, как в теореме 3. Оператор U аддитивен и однороден. Докажем, что он положителен. Пусть для определенности $w > v$, и пусть $z' = z + \lambda v \geqslant 0$, $z \in G$. Достаточно рассмотреть случай $\lambda < 0$. Тогда $v \leqslant -\lambda^{-1} z$, и $w \leqslant \inf G_v^+ \leqslant -\lambda^{-1} z$, т. е. $Uz' = z + \lambda w \geqslant 0$. Так как G_1 мажорирует X', то в силу теоремы Л. В. Канторовича [4], стр. 301—303 (точнее, в силу тех же самых рассуждений) можно распространить U до положительного аддитивного и однородного оператора на всем X'. Теорема 4 доказана.

Обозначим через G' (G'_*) множество точек $x \in X'$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 (теоремы 2) *), и положим $\tilde{G}_{X'} = \tilde{G} \cap X'$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть X есть условно полная структура, содержащая более одного элемента $G \subset X' \subset X$, и пусть X является $\mathfrak{C}$-пространством, в котором (c)-предел всегда единствен и из $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ следует $x_\alpha \xleftarrow{(c)} x$ ($\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$— направленность в X). Тогда, если выполняется одно из условий:* а) *G есть структура,* б) *операции $\bigvee$ и $\bigwedge$ (c)-непрерывны в X, то (считая $\hat{G}_a = \hat{G}_a(X', X, c)$) $\hat{G}_i = \hat{G}_{is} = \hat{G}_{X'}$, причем $\hat{G}_{X'} = G'$ в случае* а) *и $\tilde{G}_{X'} = G'_*$ в случае* б). *Если же, кроме того, X есть K-пространство, множества G и X' линейны и G мажорирует X', то $\hat{G}_p = \hat{G}_{ps} = \hat{G}_{X'}$.*

Доказательство. Прежде всего, в силу теорем 3 и 4 $\hat{G}_i \subset \hat{G}_{is} \subset \tilde{G}_{X'}$, $\hat{G}_i \subset \hat{G}_p \subset \hat{G}_{ps} \subset \tilde{G}_{X'}$. Далее, пусть $x \in \tilde{G}_{X'}$, $x \neq \inf X$, $x \neq \sup X$ и $\mathfrak{A}^-$ ($\mathfrak{A}^+$) — семейство всех конечных подмножеств из G_x^- (G_x^+), направленное отношением $\supset$. Положим $x_Z = \sup Z$, $Z \in \mathfrak{A}^-$,

*) С учетом замечания 2 после леммы 6.

$y_W = \inf W$, $W \in \mathfrak{A}^+$. Тогда $x = \sup \{x_Z \colon Z \in \mathfrak{A}^-\} = \inf \{y_W \colon W \in \mathfrak{A}^+\}$, т. е. $x_Z \uparrow x$ и $y_W \downarrow x$, и, значит, $x \in G'_*$. Если же $x = \inf X$ или $x = \sup X$, то рассуждения только упрощаются (см. замечание 2 после леммы 6). Следовательно, в случае а) по теореме 1 $\tilde{G}_{X'} \subset G' \subset \hat{G}_i$, а в случае б) по теореме 2 $\tilde{G}_{X'} \subset G'_* \subset \hat{G}_i$, что и требовалось доказать.

4. Пусть $\mathfrak{F}(Q)$ — полная структура всех вещественных функций на бикомпакте Q, принимающих в точках Q также несобственные значения $+\infty$ и $-\infty$, и пусть $F = F(Q)$, $B = B(Q)$ и $C = C(Q)$ — подструктуры $\mathfrak{F}(Q)$, состоящие соответственно из всех конечных, всех ограниченных и всех непрерывных функций; F и B — K-пространства, B и C — KB-линеалы с нормой: $\|f\|_B = \sup\limits_{q \in Q} |f(q)|$. Операции $\bigvee$ и $\bigwedge$ непрерывны по норме B (см. [4], стр. 192—193).

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $F(Q)$ есть $\mathfrak{C}$-пространство, в котором (c)-предел всегда единственен, и из $x_k \rightrightarrows x$ по норме C, $(k = 1, 2, \ldots)$ x_k, $x \in C$, следует $x_k \xrightarrow{(c)} x$, и пусть G — линейное подпространство $C(Q)$, содержащее константы. Далее, пусть $\hat{G}_a = \hat{G}_x(C, B, c)$ при $a = i, p, b, is, ps, bs$, а $\bar{G}$ — замыкание G в B по норме. Тогда, если выполняется одно из условий: а) G есть структура, б) операции $\bigvee$ и $\bigwedge$ (c)-непрерывны в $F(Q)$, то $\hat{G}_a = \hat{G}_a(C, F, c)$ при $a = i, p, is, ps$ и $\hat{G}_i = \hat{G}_p = \hat{G}_b = \hat{G}_{is} = \hat{G}_{ps} = \hat{G}_{bs} = \tilde{G}_C$, причем $\tilde{G}_C = G' = \bar{G}$ в случае а) и $\tilde{G}_C = G'_*$ в случае б).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, $\hat{G}_b = \hat{G}_p$ и $\hat{G}_{bs} = \hat{G}_{ps}$, ибо $H_b = H_p$ (см. [4], стр. 249). Далее, так как G мажорирует $C(Q)$, то по теореме 4 $\hat{G}_a \subset \hat{G}_{as} \subset \tilde{G}_C$ при $a = i, p$. Обратно, пусть $x \in \tilde{G}_C$, а числа $\varepsilon_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ выбраны так, что $\varepsilon_k \to 0$. Каждому $\tau \in Q$ поставим в соответствие такую функцию $x_{k\tau} \in G$ и такую окрестность $U_{k\tau}$ точки τ, что $x_{k\tau} \leqslant x$ и $x(t) - x_{k\tau}(t) < \varepsilon_k$ при $t \in U_{k\tau}$. По определению бикомпакта из $\{U_{k\tau}\}_{\tau \in Q}$ выделяется конечное подмножество $\{U_{k\tau_i}\}_{i = 1, 2, \ldots, s}$, покрывающее Q. Положим $x_k = x_{k\tau_1} \bigvee x_{k\tau_2} \bigvee \ldots \bigvee x_{k\tau_s}$. Тогда $x_k \leqslant x$, $x_k \in G^*$ и $x_k \rightrightarrows x$. Аналогично найдем такие $x'_k \geqslant x$, $x'_k \in G_*$, что $x'_k \rightrightarrows x$. Тогда в силу теорем 1 и 2 $\tilde{G}_C \subset G' \subset \hat{G}_i \subset \hat{G}_p$ или же $\tilde{G}_C \subset G'_* \subset \hat{G}_i \subset \hat{G}_p$, Поэтому $\widetilde{G}_C = G'$ или G'_* и $\hat{G}_a = \hat{\widetilde{G}}_C$ при $a = i, p, is, ps$. Аналогично при тех же a получим, что $\hat{G}_a(C, F, c) = \widetilde{G}_C$ (ибо $\widetilde{G}_C(F) = \widetilde{G}_C(B)$). Наконец, если $x \in \overline{G}$ и G есть структура, то найдутся такие $x_k \in G$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что $x_k \rightrightarrows x$ (см. [2], стр. 97, 105, 164]. А так как $x_k \pm \varepsilon_k \rightrightarrows x$ при $\varepsilon_k = \| x - x_k \|_B$ и $x_k - \varepsilon_k \leqslant x \leqslant x_k + \varepsilon_k$, то $x \in G'$, т. е. $\overline{G} \subset G'$. Но $\overline{G} \supset G'(\rightrightarrows) = \widetilde{G}_C = G'$, и поэтому $\overline{G} = G'$. Теорема 6 доказана.

Равенство $\hat{G}_{bs}(C, B, \rightrightarrows) = \widetilde{G}_C$ в случае $Q = [a, b]$ доказано В. А. Баскаковым [7]; в общем случае оно получено Г. Бауэром ([8], 2), но в несколько иной постановке задачи; он же показал, что $\hat{G}_{bs}(C, B, \rightrightarrows) = \overline{G}$, когда G есть структура.

Пусть $\mathfrak{S}$ есть подмножество пространства $\mathfrak{F}(Q)$, наделенное такой псевдометрикой ρ, удовлетворяющей (2), что если $x_k \rightrightarrows x$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\rho(x_k, x) \to 0$. (Например, $(\rho) = (\rightrightarrows)$; значение $+\infty$ для ρ допустимо, см. [2], стр. 165). Следующий результат с учетом теоремы 1 можно рассматривать как обобщение (в части достаточности) некоторых результатов работы [1] (см. теоремы 4 и 2).

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* $U_\gamma \in H_i(X', \mathfrak{S})$, $\gamma \in \Gamma$, *где* Γ — *направленное множество*, $C(Q) \subset X' \subset \mathfrak{S}$, *и пусть для любых чисел* $\varepsilon > 0$ *и* $N > 0$ *и произвольной совокупности* $\{U_\tau\}_{\tau \in Q}$ *окрестностей точек бикомпакта* Q *существуют такие неотрицательные функции* $z_\tau(t) = z_{\tau, \varepsilon, N, U_\tau}(t) \in C(Q)$, *что* $\min \{z_\tau(t) \colon t \in Q \setminus U_\tau\} \geqslant N$ *и при каждом* $f \in C(Q)$

$$U_\gamma(f(\tau) \pm z_\tau(t);\ \tau) \xrightarrow{(\rho)} f(\tau) \pm \delta_f(\tau), \text{ где } 0 \leqslant \delta_f(\tau) \leqslant \varepsilon. \quad (5)$$

Тогда $U_\gamma f \xrightarrow{(\rho)} f$ *для любой* $f \in C(Q)$.

В самом деле, пусть $f \in C(Q)$, $|f(t)| \leqslant M$ на Q, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $|f(t) - f(\tau)| < \varepsilon_k$ при $t \in U_\tau$ $(\tau \in Q)$. Тогда, если $z_\tau(t) = z_{\tau, \varepsilon_k 2M, U_\tau}(t)$, то $f(\tau) - \varepsilon_k - z_\tau(t) \leqslant f(t) \leqslant f(\tau) + \varepsilon_k + z_\tau(t)$ $(t \in Q)$ и $U_\gamma(f(\tau) - \varepsilon_k - z_\tau(t);\ \tau) \leqslant U_\gamma(f(t); \tau) \leqslant U_\gamma(f(\tau) + \varepsilon_k + z_\tau(t);\ \tau)$. А так как $f(\tau) \pm \varepsilon_k + \delta_{f \pm \varepsilon_k}(\tau) \xrightarrow{(\rho)} \xrightarrow{\rho)} f(\tau)$ $(k \to \infty)$, то из (5) и определения $\mathfrak{C}$-пространства следует: $U_\gamma f \xrightarrow{(\rho)} f$.

Московский автодорожный институт

Поступило 23.VIII.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Коровкин П. П., Опыт аксиоматического построения некоторых вопросов теории приближений функций одного переменного, Уч. зап. Калининского пед. ин-та, 69 (1969), 91—109.

[2] Келли Дж. Л., Общая топология, М., 1968.

[3] Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952.

[4] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.

[5] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950.

[6] Atsumi Koichi, On complete latticeshaving the Hausdorff interval topology, Proc. Amer. Math. Soc., 17, № 1 (1966), 197—199.

[7] Баскаков В. А., О некоторых условиях сходимости линейных положительных операторов, Успехи матем. наук, 16, № 1 (1961), 131—134.

[8] Bauer H., Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 11 (1961), 89—136.

Математические заметки, том 12, выпуск 3 (1972)

Редактор *Н. К. Осколкова*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр* Корректор *Т. А. Панькова*

Сдано в набор 23/VI 1972 г. Подписано к печати 22/VIII 1972 г. Бумага 84×108¹/₃₂

Физ. печ. л. 3,62. Условн. печ. л. 6,09 Уч.-изд. л. 5,68

Тираж 1230 экз. Т-14712. Цена 60 коп.

Заказ № 826

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10